**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

**و...**

سایت ویژه ریاضیات **www.riazisara.ir**

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# جبر خطی

کنت هافمن
ری کنزی

ترجمهٔ جمشید فرشیدی

# جبر خطی

کنت هافمن
ری کنزی

ترجمهٔ جمشید فرشیدی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

بسم الله الرحمن الرحيم

# فهرست مطالب


| عنوان | صفحه |
|---|---|
| پیشگفتار مؤلفین | ۱ |
| فصل ۱. معادلات خطی | ۵ |
| ۱.۱. هیأتها | ۵ |
| ۲.۱. دستگاههای معادلات خطی | ۷ |
| ۳.۱. ماتریسها و اعمال سطری مقدماتی | ۱۰ |
| ۴.۱. ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پلکانی | ۱۸ |
| ۵.۱. ضرب ماتریسی | ۲۵ |
| ۶.۱. ماتریسهای معکوس‌پذیر | ۳۱ |
| فصل ۲. فضاهای برداری | ۴۱ |
| ۱.۲. فضاهای برداری | ۴۱ |
| ۲.۲. زیرفضاها | ۴۸ |
| ۳.۲. پایه و بعد | ۵۶ |
| ۴.۲. مختصات | ۶۷ |
| ۵.۲. خلاصهٔ هم‌ارزی سطری | ۷۵ |
| ۶.۲. محاسبات مربوط به‌زیرفضاها | ۷۸ |

| عنوان | صفحه |
|---|---|
| **فصل ۳. تبدیلهای خطی** | ۹۱ |
| ۱.۳. تبدیلهای خطی | ۹۱ |
| ۲.۳. جبر تبدیلهای خطی | ۱۰۰ |
| ۳.۳. یکریختی | ۱۱۲ |
| ۴.۳. نمایش ماتریسی تبدیلها | ۱۱۵ |
| ۵.۳. تابعکهای خطی | ۱۲۹ |
| ۶.۳. دوگان مضاعف | ۱۴۱ |
| ۷.۳. ترانهادهٔ تبدیل خطی | ۱۴۷ |
| **فصل ۴. چند جمله‌ایها** | ۱۵۳ |
| ۱.۴. جبرها | ۱۵۳ |
| ۲.۴. جبر چند جمله‌ایها | ۱۵۶ |
| ۳.۴. درون‌یابی لاگرانژ | ۱۶۱ |
| ۴.۴. ایدآلهای چند جمله‌ایها | ۱۶۶ |
| ۵.۴. تجزیهٔ چند جمله‌ایها به‌سازه‌های اول | ۱۷۵ |
| **فصل ۵. دترمینان** | ۱۸۳ |
| ۱.۵. حلقه‌های جابجایی | ۱۸۳ |
| ۲.۵. تابع دترمینان | ۱۸۴ |
| ۳.۵. جایگشتها و یکتایی دترمینان | ۱۹۶ |
| ۴.۵. چند خاصیت دیگر دترمینان | ۲۰۴ |
| ۵.۵. مدول | ۲۱۴ |
| ۶.۵. تابع چند خطی | ۲۱۶ |
| ۷.۵. حلقهٔ گراسمان | ۲۲۶ |
| **فصل ۶. فرمهای متعارف مقدماتی** | ۲۳۷ |
| ۱.۶. مقدمه | ۲۳۷ |
| ۲.۶. مقادیر سرشت‌نما | ۲۳۸ |
| ۳.۶. چند جمله‌ایهای پوچساز | ۲۴۹ |
| ۴.۶. زیرفضاهای پایا | ۲۶۰ |

| عنوان | صفحه |
| --- | --- |
| ۵.۶. مثلث‌بندی همزمان با قطری‌سازی همزمان | ۲۶۹ |
| ۶.۶ تجزیه به‌مجموع مستقیم | ۲۷۲ |
| ۷.۶. مجموعهای مستقیم پایا | ۲۷۸ |
| ۸.۶. قضیهٔ تجزیهٔ اولیه | ۲۷۶ |
| **فصل ۷. فرمهای گویا و ژوردان** | **۲۹۷** |
| ۱.۷. زیرفضاهای دوری و پوچساز | ۲۹۷ |
| ۲.۷. تجزیه‌های دوری و فرم گویا | ۳۰۲ |
| ۳.۷. فرم ژوردان | ۳۱۸ |
| ۴.۷. محاسبهٔ سازه‌های پایا | ۳۲۸ |
| ۵.۷. خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده | ۳۴۱ |
| **فصل ۸. فضاهای ضرب داخلی** | **۳۵۱** |
| ۱.۸. ضربهای داخلی | ۳۵۱ |
| ۲.۸. فضاهای ضرب داخلی | ۳۵۹ |
| ۳.۸. تابعکهای خطی و الحاقیه | ۳۷۶ |
| ۴.۸. عملگرهای یکانی | ۳۸۸ |
| ۵.۸. عملگرهای نرمال | ۴۰۳ |
| **فصل ۹. عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی** | **۴۱۳** |
| ۱.۹. مقدمه | ۴۱۳ |
| ۲.۹ فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی | ۴۱۴ |
| ۳.۹. فرمهای مثبت | ۴۲۰ |
| ۴.۹. چند مطلب دیگر دربارهٔ فرمها | ۴۲۹ |
| ۵.۹. نظریهٔ طیفی | ۴۳۳ |
| ۶.۹. چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال | ۴۴۹ |
| **فصل ۱۰. فرمهای دو خطی** | **۴۶۱** |
| ۱.۱۰. فرمهای دوخطی | ۴۶۱ |
| ۲.۱۰. فرمهای دو خطی متقارن | ۴۷۱ |

| عنوان | صفحه |
| --- | --- |


| عنوان | صفحه |
| --- | --- |
| ۳.۱۰. فرمهای دو خطی متقارن کج | ۴۸۲ |
| ۴.۱۰. گروههای حافظ فرمهای دو خطی | ۴۸۷ |
| **پیوستها** | ۴۹۵ |
| پ.۱. مجموعه | ۴۹۶ |
| پ.۲. تابع | ۴۹۷ |
| پ.۳. رابطهٔ همارزی | ۵۰۱ |
| پ.۴. فضاهای خارج قسمت | ۵۰۵ |
| پ.۵. روابط همارزی در جبر خطی | ۵۰۸ |
| پ.۶. اصل موضوع انتخاب | ۵۰۹ |
| **واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی** | ۵۱۱ |
| **واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی** | ۵۲۷ |
| **فهرست راهنما** | ۵۳۳ |



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

## پیشگفتار مؤلفین

هدف اصلی ما از نوشتن این کتاب تهیهٔ کتابی درسی برای درس جبرخطی دورهٔ لیسانس در انستیتو تکنولوژی ماساچوست (M. I. T.) بوده است. این درس برای دانشجویان بامهاد ریاضی درسطح سال سوم طرح‌ریزی شده بود؛ با این وجود سه‌چهارم دانشجویان از سایررشته‌های علمی وفنی، از دانشجویان سال اول گرفته تا دانشجویان بعد از لیسانس، جلب این درس می‌شدند. چنین توصیفی امروزه هم درمورد مستمعین این درس در M. I. T. عموماً درست است. در ده‌سالی که از چاپ اول این کتاب می گذرد، دوره‌های جبرخطی در سراسر کشور رشد نموده وبه‌یکی ازمؤلفین فرصتی دست داده است تامطالب بنیانی این کتاب را برای گروههای مختلفی در دانشگاههای براندایز[1]، واشینگتن (سینت‌لوئیس[2])، وکالیفرنیا (ایروین[3]) تدریس کند.

منظور اصلی ما از تجدیدنظردرکتاب جبرخطی افزایش تنوع درسهایی بوده‌است که بسهولت بتواند ازروی آن تدریس شود. ازیك طرف، فصلها، بخصوص فصلهای‌مشکل را طوری پی‌ریزی کرده‌ایم که درطول راه ایستگاههای طبیعی متعددی وجود داشته باشدتا دست مدرس در انتخاب موضوع برای یك دورهٔ سه‌ماهه یا نیمساله به‌میزان قابل توجهی باز نگه داشته شود. ازطرف دیگر، مقدارمطالب کتاب را افزایش داده‌ایم، تا بتواندبرای یك دوره یکسالهٔ نسبتاً جامع در جبرخطی به‌کار رود وحتی به‌عنوان کتابی مرجع مورد استفادهٔ ریاضیدانان قرارگیرد.

تغییرات عمده، در نحوهٔ برخورد ما با فرمهای متعارف وفضاهای ضرب داخلی صورت گرفته است. دیگرآنکه فصل ۶ را همچون گذشته با نظریهٔ فضایی عمومی که زمینهٔ نظریهٔ فرمهای متعارف است آغازنمی کنیم. ابتدا مقادیر سرشت‌نما را دررابطه باقضایای قطری کردن ومثلثی کردن مطرح می کنیم وسپس راه‌خودرا به‌سوی نظریهٔ عمومی می گشاییم. فصل ۸ را به‌دو نیمه شکسته‌ایم تا به‌دنبال مطالب اساسی درمورد فضاهای ضرب داخلی

1. Brandeis 2. St. Louis 3. Irvine

وقطری کردن یکانی، فصل ۹ را بیاوریم که دربارهٔ فرمهای یك ونیم خطی است و دربارهٔ خواص پیچیده‌تر عملگرهای نرمال ازجمله عملگرهای نرمال روی فضاهای ضرب داخلی حقیقی به‌بحث می‌پردازد.

بعلاوه، نسبت به‌چاپ اول چند تغییر کوچك هم داده واصلاحاتی نیز درآن به‌عمل آورده‌ایم. اما فلسفهٔ بنیانی متن را همچنان حفظ کرده‌ایم.

ما برای این واقعیت که ممکن است اکثر دانشجویان عمدتاً به‌ریاضیات علاقه‌مند نباشند امتیاز خاصی قایل نشده‌ایم. زیرا اعتقاد داریم که دروس ریاضی نباید تکنیکهایی درهم وبرهم به‌دانشجویان رشته‌های علوم، مهندسی، یاعلوم اجتماعی بیاموزند، بلکه باید وسیله‌ای جهت درك مفاهیم بنیانی ریاضی برای آنان فراهم آورند.

از طرف دیگر، ما ازگوناگونی زمینه‌های تحصیلی دانشجویان وبخصوص از این واقعیت که دانشجویان ممکن است دراستدلال ریاضی مجرد تجربهٔ بسیار اندکی داشته باشند، بخوبی آگاه بوده‌ایم. بهمین دلیل درابتدای کتاب از معرفی بیش از حد ایده‌های مجرد خودداری کرده‌ایم. ضمناً پیوستی راکه متضمن مفاهیمی اساسی چون مجموعه، تابع، و رابطهٔ هم‌ارزی است به کتاب افزوده‌ایم. به‌تجربه دریافته‌ایم که روی این‌مفاهیم زیادمکث نکنیم، بلکه به‌دانشجویان توصیه نماییم که‌هنگام‌مواجههٔ با این مفاهیم به‌پیوست‌مراجعه کنند.

در سراسرکتاب مثالهای متنوع بسیاری برای مفاهیم مهمی که درمتن ظاهرمی‌شوند گنجانیده‌ایم. مطالعهٔ چنین مثالهایی واجد اهمیتی اساسی است و به‌کم شدن تعداد دانشجویانی منجر می‌شود که می‌توانند تعاریف، قضایا، و اثباتها را به‌ترتیب منطقی ولی بدون درك معانی مفاهیم مجرد تکرارکنند. کتاب همچنین شامل انواع بسیاری تمرین طبقه‌بندی شده (درحدود ششصدتمرین) است که مسائل سرراست را دربرمی گیرد تامسائلی راکه مخصوص دانشجویان خیلی زبده است. هدف این بوده است که تمرین بخش مهمی ازکتاب را تشکیل بدهد.

فصل یك با دستگاههای معادلات خطی ویافتن جواب آنها ازطریق عملهای سطری مقدماتی روی ماتریسها سروکار دارد. کار ما این بوده است که حدود شش ساعت درسی روی این مطالب وقت صرف کنیم. این فصل برای دانشجویان تصویری از خاستگاههای جبرخطی را فراهم می‌کند، ونیزشیوهٔ محاسباتی لازم جهت فهم مثالهایی ازمفاهیم مجردتری راکه درفصلهای بعد پیش می‌آیند به‌آنان می‌آموزد. فصل ۲ فضاهای برداری، زیرفضاها، پایه‌ها، و بعد را مورد بحث قرارمی‌دهد. فصل ۳ دربارهٔ تبدیلهای خطی، جبر آنها، نمایش آنها توسط ماتریسها، ونیز دربارهٔ یکریختیها، تابعکهای خطی، وفضاهای دوگان گفتگو می‌کند. فصل ۴ به‌تعریف جبر چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت، ایدآلهای درآن جبر، و تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌سازه‌های اول می‌پردازد. این فصل همچنین ریشه‌ها، فرمول‌تیلور، و فرمول درون‌یابی لاگرانژ را مورد بحث قرارمی‌دهد. فصل ۵ دترمینان ماتریسهای مربعی را عرضه می‌کند ــ دترمینان به‌عنوان تابع $n$خطی متناوبی از سطرهای ماتریس در نظر گرفته می‌شود ــ و سپس به‌توابع چندخطی روی مدولها ونیز به‌حلقهٔ گراسمان می‌پردازد.

مطالب مربوط به‌مدولها، مفهوم دترمینان را درمقامی گسترده‌تر وفراگیرنده‌تر از آنچه‌که معمولاً درکتب درسی مقدماتی یافت می‌شود، قرارمی‌دهد. فصلهای ۶ و ۷ دربرگیرندهٔ بحثی است درمورد مفاهیمی‌که برای تحلیل یك تبدیل خطی تنها روی یك فضای برداری با بعد متناهی، تحلیل مقادیر سرشت‌نما (ویژه)، تبدیلهای مثلثی شونده وقطری شدنی، ونیز برای تحلیل مفاهیم اجزای قطری شدنی وپوچ توان تبدیلهای عمومیتر و فرمهای متعارف گـویا و ژردان بنیانی هستند. قضایای تجـزیهٔ اولیه وتجزیهٔ دوری، کـه قضیهٔ دوم ضمن مطالعهٔ زیرفضاهای مجـاز پیش می‌آید، نقشی اساسی به‌عهده دارند. فصل ۷ شامل مبحثی است درمورد ماتریسهای برروی یك میدان چند جمله‌ایها، محاسبهٔ سازه‌های پایا ومقسوم‌علیه‌های مقدماتی ماتریسها، ونیزشامل پروراندن فـرم متعارف اسمیت است. این فصل با بحثی راجع به‌عملگرهای نیم‌ساده،جهت تکمیل تحلیل یك عملگر، پایان می‌پذیرد. فصل ۸ بتفصیل دربارهٔ فضاهای ضرب داخلی بـا بعد متناهی گفتگو می کند. این فصل هندسهٔ پایه را،جهت ربط متعامدسازی با ایدهٔ «بهترین تقریب یـك بردار»،شامل‌می‌شود و راهش‌را به‌مفاهیم تصویرمتعامد یك بردار بروی یك زیرفضا و مکمل متعامد یك زیرفضا می گشاید. همچنین این فصل عملگرهای یکانی را مورد بحث قرارمی‌دهد، وبه‌قطری‌کردن‌عملگرهای خودالحاق و نرمال منتهی می‌شود. فصل ۹ پس از معرفی فـرمهای یك‌ونیم خطی،آنها را به عملگرهای مثبت و خودالحاق روی فضاهای ضـرب داخلی مربوط می‌سازد و به‌سمت نظریهٔ طیفی عملگرهای نرمال وسپس به‌سمت نتایج ظـریف‌تر دربارهٔ عملگرهای نرمـال روی فضاهای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط به‌پیش می‌رود. فصل ۱۰ ضمن بحث دربارهٔ فرمهای دوخطی، برفرمهای متعارف برای فرمهای متقارن ومتقارن‌کـج ونیز برگروههای حافظ فرمهـای نابتهگون، به‌ویژه برگروههای متعامد، یکانی، شبه‌متعامد و لورنتس تأکید می کند.

به‌گمان ما هردرسی که این‌کتاب را مورد استفاده قراردهد باید فصلهای ۱، ۲، و۳ بجز احتمالاً بخشهای ۶.۳ و ۷.۳ راکه با دوگان مضاعف وترانهادهٔ تبدیلی خطی سروکار دارند تماماً شامـل شود. فصلهای ۴ و ۵ دربارهٔ چندجمله‌ایها و دترمینانها را می‌توان با درجات متفاوتی ازدقت تدریس‌کرد. درحقیقت، اید آلهای چندجمله‌ایها وخواص بنیانی دترمینانها را می‌توان‌کاملاً به‌طور خلاصه وبدون خدشهٔ جدی به‌سیرمنطقی متن، درس‌داد؛ با این وجود، تمایل ماآین است‌که این فصلها (به‌استثنای نتایج مربوط به‌مدولها) باکمال دقت مورد بحث قرارگیرند، چراکه این مطالب به‌نحـو بسیار بارزی نمایانگر ایده‌های اساسی جبرخطی هستند. بالاخره یك درس مقدماتی می‌تواند به‌طور مطلوبی باچهاربخش اول فصل ۶ همراه با فصل ۸ (جدید) پایان پذیرد. درصورتی‌که فرمهای گویا و ژردان نیز مدنظرباشند، پوشش جامع‌تری ازفصل ۶ الزامی است.

هنوزهم مدیون‌کسانی هستیم‌که ما را درچاپ اول یاری‌داده‌اند، بویژه به‌استادانی چون هری فورستنبرگ، لویس هوارد، دانیل‌کن، ادوارد ترپ، وبه‌خانم جودیت بوورز، خانم بتی آن (سارجنت) رز و دوشیزه فیلیس رویی. بعـلاوه، علاقه‌مندیم از بسیاری از

دانشجویان و همکارانی‌که نظر تیز بینشان سبب این تجدیدچاپ شده است و نیزازکارکنان پرنتیس-هال به‌خاطر بردباریشان در سروکله زدن بـا دومؤلف گرفتار درعذاب مدیریت دانشگاهی تشکر کنیم. درپایان، تشکرخاص خود را به‌خانم سوفیاکولوراس، هم به‌خاطر مهارت و هم به‌لحاظ کوششهای خستگی‌ناپذیرش درماشین‌کردن نسخهٔ خطی تجدیدنظرشده تقدیم می کنیم.

ک. م. ه. / ر. ا. ک.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# ۱

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# معادلات خطی

## ۱.۱. هیأتها

فرض می‌کنیم خواننده با جبر مقدماتی اعداد حقیقی واعداد مختلط آشنا باشد. خواص جبری اعدادی که در بخش عمده‌ای از این کتاب به‌کار خواهند رفت، ازفهرست مختصر خواص جمع وضرب مذکور در زیر بسهولت قابل استخراج‌اند. فرض کنیم $F$ نمایشگر مجموعهٔ اعداد حقیقی یا مجموعهٔ اعداد مختلط باشد.

۱. جمع جابجایی است؛ یعنی به‌ازای هر $x$ و $y$ در $F$،

$$x+y=y+x.$$

۲. جمع شرکت‌پذیراست؛ یعنی به‌ازای هر $x$، $y$، و $z$ در $F$،

$$x+(y+z)=(x+y)+z.$$

۳. عنصر[1] یکتایی مانند ۰ (صفر) در $F$ وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x$ در $F$، $x+0=x$.

۴. به‌هر $x$ در $F$ عنصر یکتای $(-x)$ در $F$ متناظر است به‌طوری‌که $x+(-x)=0$.

۵. ضرب جابجایی است؛ یعنی به‌ازای هر $x$ و $y$ در $F$،

---

۱. عنصر را گاهی عضو هم می‌نامند.ـم.

$$xy = yx.$$

۶. ضرب شرکت‌پذیراست؛ یعنی به‌ازای هر $x$، $y$، و $z$ در $F$،

$$x(yz) = (xy)z.$$

۷. عنصرغیرصفریکتایی مانند ۱ (یك) در $F$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x$ در $F$، $x1 = x$.

۸. به‌هر $x$ غیرصفردر $F$، عنصریکتای $x^{-1}$ (یا $1/x$) در $F$ متناظراست به‌طوری که $xx^{-1} = 1$.

۹. ضرب برروی جمع پخش‌پذیر است؛ بدین معنی‌که، به‌ازای هر $x$، $y$، و $z$ در $F$، $x(y+z) = xy + xz$.

فرض‌کنیم مجموعهٔ $F$ متشکل از اشیاء $x$، $y$، $z$، ...، و دو عمل، به‌صورت زیر، روی عناصرآن دردست باشند. عمل اول، که جمع نام دارد، به‌هرجفت عنصـر $x$ و $y$ در $F$، عنصر $(x+y)$ در $F$ را مربوط می‌سازد؛ عمل دوم، کـه ضرب نامیده می‌شود، به‌هر جفت $x$ و $y$، عنصر $xy$ در $F$ را وابسته می‌سازد؛ بعلاوه، این دوعمل شرایط (۱)ـ(۹) فوق‌الذکررا برمی‌آورند. دراین صورت، مجموعهٔ $F$ همراه با ایـن دو عمل یك هیأت نامیده می‌شود. به‌صورت نادقیق، یك هیأت عبارت است ازمجموعه‌ای همراه با چندعمل روی اشیاء آن‌که رفتاری شبیه به‌اعمال جمع، ضرب، تفریق، و تقسیم معمولی در اعداد دارند؛ بدین معنی‌که از نه قاعدهٔ جبری مذکور دربالا تبعیت می‌کنند. $C$، مجموعهٔ اعداد مختلط، همراه با اعمال‌جمع و ضرب معمولی یك هیأت است، وهمچنین است $R$ مجموعهٔ اعداد حقیقی.

دربخش اعظم این‌کتاب «اعداد»ی راکه به‌کار می‌بریم می‌توانند عناصر یك هیأت دلخواه مانند $F$ باشند. برای تثبیت این عمومیت، به‌جای «عدد»، واژهٔ «اسکالر» رابه‌کار خواهیم برد. هرگاه خواننده هیأت اسکالرهارا همواره زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط فرض‌کند، چیززیادی را ازدست نداده است. یك زیرهیأت از هیأت $C$، مجموعه‌ای است مانند $F$ از اعداد مختلط‌کـه خود تحت اعمال معمولی جمع و ضرب اعداد مختلط، یك هیأت باشد. منظوراین است‌که ۰و۱ درمجموعهٔ $F$ قرارداشته باشند، و اگر$x$ و $y$ عناصر $F$ باشند، $(x+y)$، $-x$، $xy$، و $x^{-1}$ (هرگاه $x \neq 0$) نیز در$F$ باشند. مثالی ازاین‌گونه زیرهیأتها، هیأت اعداد حقیقی $R$است. زیرا، اگراعدادحقیقی را با اعداد مختلط$a+bi$ که در آنها $b = 0$ یکی بگیریـم، ۰ و ۱ هیأت اعداد مختلط، اعدادی حقیقی محسوب می‌شوند، و اگر$x$ و $y$ حقیقی باشند، $(x+y)$، $-x$، $xy$، و $x^{-1}$ (هرگاه $x \neq 0$) نیز حقیقی خواهند بود. مثالهای دیگری نیزدر زیر آورده خواهد شد. نکتهٔ بحثمان درمورد زیرهیأتها اساساً ایـن است‌که: اگر بااسکالـرهای زیرهیأت معینی از $C$ کارکنیم، انجام اعمال جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم‌روی این اسکالرها ما را اززیرهیأت مفروض خارج نخواهد ساخت.

**مثال ۱.** مجموعهٔ **اعداد صحیح و مثبت**: ۱، ۲، ۳، ...، به‌دلایل مختلف زیر هیأتی از $C$ نیست. مثلاً، ۰ عددی صحیح ومثبت نیست؛ به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت $n$، $n-$ عددی صحیح ومثبت نمی‌باشد؛ به‌ازای هرعدد صحیح ومثبت $n$، بجز ۱، $1/n$ عددی صحیح ومثبت نیست.

**مثال ۲.** مجموعهٔ **اعداد صحیح**: ...، ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲، ...، زیر هیأتی از $C$ نیست، چراکه به‌ازای هرعدد صحیح $n$، $1/n$ عدد صحیحی نیست مگرآنکه $n$ برابر ۱ یا ۱− باشد. مجموعهٔ اعداد صحیح همراه با اعمال جمع وضرب معمولی همهٔشرایط (۱)–(۹)، بجز شرط (۸) را برمی‌آورد.

**مثال ۳.** مجموعهٔ **اعداد گویا**، یعنی اعدادی به‌صورت $p/q$ که درآنها $p$ و $q$ اعدادی صحیح‌اند و $q\neq 0$، زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط است. عمل تقسیم، که در مجموعهٔ اعداد صحیح ممکن نیست، درمجموعهٔ اعدادگویا امکان‌پذیر است. مناسب است که خوانندهٔ علاقه‌مند تحقیق کندکه هرزیرهیأت دلخواه $C$ باید شامل همهٔ اعدادگویا باشد.

**مثال ۴.** مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط به‌صورت $x+y\sqrt{2}$، که در آنها $x$ و $y$ گویا هستند، زیرهیأتی از $C$ است. تحقیق این مطلب را به‌خواننده وامی گذاریم.

درمثالها وتمرینات این کتاب خواننده بهتراست یا می‌بایدفرض کندکه هیأت‌درگیر دربحث زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط است، مگرآنکه صریحاً قید شده باشدکه هیأت کلی‌تری منظورشده است. دراینجا قصدآن را نداریم که درمورد این نکته به‌بحث مفصلی بپردازیم؛ اما، به‌هرتقدیر بهتراست‌که علت قبول چنین قراردادی را بیان‌کنیم. درهیأت $F$ ممکن است بتوان یکهٔ ۱ را چندین‌بار با خودش جمع کرد و به ۰ دست یافت (ر. ك. تمرین ۵ بخش ۲.۱):

$$1+1+\cdots+1=0.$$

این وضع در هیأت اعداد مختلط (یا در زیرهیأت دلخواهی ازآن) رخ نمی‌دهد. هرگاه چنین وضعی در $F$ روی دهد، آنگاه کوچکترین $n$ی که مجموع $n$ تا ۱ برابر ۰ شود، **سرشت‌نمای هیأت** $F$ نامیده می‌شود. اگرچنین وضعی درهیأت $F$ رخ ندهد، آنگاه (به‌دلیلی کم‌وبیش عجیب) $F$ را هیأتی **با سرشت‌نمای صفر** می‌نامند. اغلب، درمواردی‌که $F$ را زیرـ هیأتی از $C$ فرض می‌کنیم، آنچه راکه می‌خواهیم تضمین بشود، این است‌که $F$ هیأتی باشد با سرشت‌نمای صفر؛ اما، معمولاً بهتراست در نخستین برخورد با جبرخطی خیلی نگران سرشت‌نمای هیأتها نباشیم.

## ۲.۱. دستگاههای معادلات خطی

گیریم $F$ یك هیأت باشد. حال مسئلهٔ یافتن $n$ اسکالر(عنصر $F$) $x_1$، ...، $x_n$ که درشرایط

www.riazisara.ir


$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

صدق می‌کنند، را مورد توجه قرار می‌دهیم. دراینجا $y_1$، ...، $y_m$، و $A_{ij}$ها، به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant m$ و $1 \leqslant j \leqslant n$، عناصر مفروضی از $F$ هستند. (۱-۱) را یك **دستگاه $m$ معادلهٔ خطی $n$ مجهولی** می‌نامیم. هر $n$تایی $(x_1, \ldots, x_n)$ ازعناصر $F$ که درهریك ازمعادلات (۱-۱) صدق کند، یك **جواب** دستگاه نامیده می‌شود. هرگاه $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$، گوییم دستگاه **همگن** است، یا آنکه هریك ازمعادلات همگن می‌باشد.

شاید اساسی‌ترین روش یافتن جوابهای یك دستگاه معادلات خطی، روش «حذف» باشد. این روش را می‌توان روی دستگاه همگن

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

نشان داد. اگر $(-2)$ برابر معادلهٔ دوم را به‌معادلهٔ اول بیفزاییم، معادلهٔ

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

یا $x_2 = -x_3$ را به‌دست می‌آوریم. اگر(۳)برابر معادلهٔ اول را به‌معادلهٔ دوم بیفزاییم، معادلهٔ

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

یا $x_1 = -x_3$ حاصل می‌شود. لذا، نتیجه می‌گیریم که اگر $(x_1, x_2, x_3)$ یك جواب باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = -x_3$. بعکس، بآسانی می‌توان دید که هرسه‌تایی ازاین نوع یك جواب است. بنابراین، مجموعهٔ جوابها متشکل‌است ازهمهٔ سه‌تاییهای $(-a, -a, a)$.

جوابهای این دستگاه معادلات را با «حذف مجهولها» یافتیم؛ بدین معنی که باضرب معادلات دراسکالرها وسپس افزودن آنها به‌هم معادلاتی به‌دست آوردیم که درآنها بعضی از $x_j$ها ظاهر نشدند. می‌خواهیم این فرایند را اندکی رسمیت بخشیم تا علت درست بودنش را دریابیم ونیز بتوانیم محاسبات لازم برای حل یك دستگاه را با روشی منظم انجام بدهیم.

فرض کنیم برای دستگاه عمومی (۱-۱)، $m$ اسکالر $c_1$، $c_2$، ...، $c_m$ را انتخاب، معادلهٔ $j$ام را در $c_j$ ضرب، وسپس آنها را با هم جمع کرده باشیم. بدین‌نحو، معادلهٔ

$$(c_1A_{11} + \cdots + c_mA_{m1})x_1 + \cdots + (c_1A_{1n} + \cdots + c_mA_{mn})x_n$$
$$= c_1y_1 + \cdots + c_my_m$$

را به‌دست می‌آوریم. چنین معادله‌ای را یك **ترکیب خطی** از معـادلات (۱-۱) می‌نامیم. بدیهی است که هرجواب کل دستگاه معادلات (۱-۱)، یك جواب ایـن معادلهٔ جدید نیـز خواهد بود. این مطلب، ایدهٔ اساسی فرایند حذف است. اگر دستگاه معادلات خطی دیگر

$$\begin{aligned} B_{11}x_1 + \cdots + B_{1n}x_n &= z_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ B_{k1}x_1 + \cdots + B_{kn}x_n &= z_k \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱)$$

را داشته باشیم، که در آن هریك ازاین $k$ معادله ترکیبی خطی از معادلات دستگاه (۱-۱) باشد، آنگاه هرجواب (۱-۱) یك جواب دستگاه جدید نیز هست. البته، این امکان وجود دارد که برخی ازجوابهای (۱-۲) جواب (۱-۱) نباشند. واضح است که اگر هرمعادلهٔ دستگاه اصلی ترکیبی خطی ازمعادلات دستگاه جدید باشد، ایـن وضع پیش نخواهد آمـد. دو دستگاه معادلات خطی را **هم‌ارز** نامیم، هر گاه هرمعادلهٔ یك دستگاه ترکیبی خطی ازمعادلات دستگاه دیگر باشد. بدین نحو، می‌توانیم مشاهدات خود را رسماً به‌صورت زیر بیان کنیم.

**قضیهٔ ۱.** جوابهای دستگاههای معادلات خطی هم‌ارز یکی هستند.

هر گاه فرایند حـذف دریافتن جوابهـای دستگاهی نظیر (۱-۱) مؤثر باشد، دراین صورت باید دیـد چگونه می‌توان بـا تشکیل ترکیبات خطی معادلات داده شده، دستگاه معادلات هم‌ارزی به‌دست آورد که حل آن ساده‌تر باشد. دربخش بعد، دربارهٔ یـك روش انجام این کار بحث خواهیم کرد.

## تمرین

۱. تحقیق کنید مجموعه‌ای از اعداد مختلط کـــه در مثال ۴ توصیف شده زیرهیأتی از $C$ است.

۲. فرض کنید $F$ هیأت اعداد مختلط باشد. آیـا دو دستگاه معادلات خطی زیرهم‌ارزند؟ اگر چنین است، هرمعادلهٔ این‌دو دستگاه را به‌صورت ترکیبی خطی ازمعادلات دستگاه دیگر بیان کنید.

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad\qquad 3x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 + x_2 = 0 \qquad\qquad x_1 + x_2 = 0$$

۳. دستگاههای معادلات زیررا همانند تمرین ۲ بررسی کنید.

$$-x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \qquad\qquad x_1 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \qquad\qquad x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0$$

۴. دستگاههای زیررا همانند تمرین ۲ مورد بررسی قراردهید.

$$\left(1+\frac{i}{2}\right)x_1 + 8x_2 - ix_3 - x_4 = 0 \qquad 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 0$$

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \qquad 3x_2 - 2ix_3 + 5x_4 = 0$$

۵. فرض‌کنید $F$ مجموعهٔ متشکل از تنها دوعنصر ۰ و ۱ باشد. اعمال جمع و ضرب را با جدولهای زیرتعریف می‌کنیم:

| $+$ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ |

| $\cdot$ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ |

تحقیق‌کنیدکه $F$ همراه با این دوعمل یك هیأت است.

۶. ثابت‌کنیدکه اگر جوابهای دودستگاه معادلات خطی همگن یکی باشند، آنگاه آن دو دستگاه هم‌ارزند.

۷. ثابت‌کنیدکه هرزیرهیأت ازهیأت اعداد مختلط شامل همهٔ اعدادگویاست.

۸. ثابت‌کنیدکه هرهیأت با سرشت‌نمای صفرشامل نسخه‌ای ازهیأت اعدادگویاست.

## ۳.۱. ماتریسها و اعمال سطری مقدماتی

درتشکیل ترکیبات خطی از معادلات خطی نمی‌توان بدون توجه به‌این نکته‌گذشت‌که نیازی به‌ادامهٔ نوشتن «مجهولهای» $x_1$، ...، $x_n$ نیست،چراکه محاسبات عملاً فقط روی ضرایب $A_{ij}$ و اسکالرهای $y_i$ صورت می‌گیرند. دستگاه (۱-۱) را اکنون به‌صورت

$$AX = Y$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

خلاصه می‌کنیم. $A$ را **ماتریس ضرایب** این دستگاه می‌نامیم. دراصل باید بگوییم که آرایهٔ مستطیلی نموده شده در بالا یک ماتریس نیست، بلکه نمایشی از یک ماتریس است. یك **ماتریس $m\times n$ برروی هیأت** $F$ عبارت است ازیك تابع $A$ ازمجموعهٔ جفتهای $(i, j)$ از اعداد صحیح، $1\leqslant i\leqslant m$ و $1\leqslant j\leqslant n$، در هیأت $F$. **درایه‌های** ماتریس $A$ عبارتند از اسکالرهای $A(i, j)=A_{ij}$، واغلب بسیار راحت‌تراست که، همچون بالا، این ماتریس را با نمایش درایه‌هایش دریك آرایهٔ مستطیلی $m$سطری و $n$ستونی توصیف کنیم. بدین نحو، $X$ (در بالا) یك ماتریس $n\times 1$ است، یا یك ماتریس $n\times 1$ را تعریف می‌کند، و $Y$ یك ماتریس $m\times 1$ می‌باشد. درحال حاضر، $AX=Y$ چیزی جز نمادی خلاصه‌نویسی برای دستگاه معادلات‌خطی ما نیست. بعدها، که ضرب ماتریسها را تعریف کردیم، $Y$ به‌معنی حاصل ضرب دوماتریس $A$ و $X$ نیزخواهد بود.

اکنون می‌خواهیم آن دسته ازاعمال روی سطرهای ماتریس$A$ را، که متناظر به تشکیل ترکیبات خطی معادلات در دستگاه $AX=Y$ هستند، مورد توجه قراربدهیم. ابتدا، توجه خود را بهسه **عمل سطری مقدماتی** روی یک ماتریس $m\times n$، مانند $A$، برروی هیأت $F$ محدود می‌سازیم:

۱. ضرب یك سطر$A$ دریك اسکالر غیرصفر $c$؛

۲. گذاشتن به‌جای سطر $r$م $A$ سطر $r$ بعلاوهٔ $c$ برابرسطر $s$، که درآن $c$ یك اسکالر است و $r\neq s$.

۳. تعویض دوسطر $A$.

بدین‌نحو، یك عمل سطری مقدماتی عبارت است از نوعی تابع (قاعدهٔ) خاص مانند $e$ که به‌هرماتریس $m\times n$، مانند $A$، ماتریس $e(A)$ راکه $m\times n$ است متناظر می‌سازد. $e$ را بطوردقیق می‌توان دراین سه‌حالت، به‌صورت زیر توصیف کرد:

۱. $e(A)_{ij}=A_{ij}$ هرگاه $i\neq r$، و $e(A)_{rj}=cA_{rj}$.

۲. $e(A)_{ij}=A_{ij}$ هرگاه $i\neq r$، و $e(A)_{rj}=A_{rj}+cA_{sj}$.

۳. $e(A)_{ij}=A_{ij}$ هرگاه $i$ مخالف با $r$ و مخالف با $s$ باشد، و $e(A)_{rj}=A_{sj}$، و $e(A)_{sj}=A_{rj}$. درتعریف $e(A)$، درواقع این مهم نیست که ماتریس $A$ چندستون دارد، اما تعداد سطرهای آن کاملاً حائزاهمیت است. مثلاً، درتصمیم گیری راجع به این که معنی تعویض سطرهای ۵ و ۶ در یك ماتریس $5\times 5$ چیست، باید کمی نگران بود. برای اجتناب ازاین گونه پیچیدگیها، توافق می کنیم که عمل سطری مقدماتی $e$ روی ردهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی هیأت $F$، به‌ازای یك $m$ ثابت اما هر $n$ دلخواه، تعریف می‌شود. به بیان دیگر،

یك $e$ بخصوص روی ردهٔ همهٔ ماتریسهای $m$سطری برروی $F$ تعریف می‌شود.

یك دلیل این‌که ما خود را به‌این سه نوع ساده ازاعمال سطری محدود می‌سازیم این است که پس از انجام یك‌چنین عمل $e$ روی یك ماتریس $A$، می‌توانیم با انجام عملی مشابه روی $e(A)$ ماتریس $A$ را دوباره به‌دست بیاوریم.

**قضیهٔ ۲.** به هر عمل سطری مقدماتی $e$ یك عمل سطری مقدماتی $e_1$، از همان نوع $e$، متناظر است، به‌طوری که به‌ازای هر ماتریس $A$، $e_1(e(A))=e(e_1(A))=A$. به‌بیان دیگر، عمل (تابع) معکوس هرعمل سطری مقدماتی وجود دارد، و خود یك عمل سطری مقدماتی از همان نوع است.

اثبات. (۱) فرض کنیم $e$ عملی باشد که سطر$r$ یك ماتریس را در اسکالرغیرصفر $c$ ضرب می کند. $e_1$ را عملی بگیرید که سطر $r$ را در اسکالر $c^{-1}$ ضرب می کند. (۲) فرض کنید $e$ عملی باشدکه سطر$r$ را با سطر $r$ بعلاوهٔ $c$ برابر سطر$s$، $s\neq r$، جایگزین می کند. در این حالت، $e_1$ را عملی بگیریدکه سطر $r$م را با سطـر$r$ بعلاوهٔ $(-c)$ برابر سطر $s$ جایگزین می‌سازد. (۳) اگر $e$ عمل تعویض سطرهای$r$م و $s$م باشد، $e_1$ را همان $e$ بگیرید. در هریك از ایـن سه حالت، به‌ازای هـرماتریس $A$، بوضوح داریم

$$e_1(e(A))=e(e_1(A))=A. \quad \square$$

**تعریف.** اگر $A$ و $B$ دوماتریس $m\times n$ برروی هیأت $F$باشند،گوییم $B$ هم ارزسطری $A$ است، هرگاه بتوان $B$ را با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی از $A$ به‌دست آورد.

با استفاده ازقضیهٔ۲ خواننده براحتی می تواند مطالب زیررا تحقیق کند. هرماتریس هم‌ارز سطری خودش است؛ اگر$B$ هـم‌ارز سطری $A$ باشد، آنگاه $A$ هـم‌ارز سطری $B$ است؛ اگر $B$ هم‌ارز سطری $A$ و $C$ هم‌ارز سطری $B$ باشد، آنگاه $C$ هـم‌ارز سطری $A$ است. به‌بیان دیـگر، هم‌ارزی سطری یك رابطهٔ هم‌ارزی است (ر. ك. ضمیمه).

**قضیهٔ ۳.** اگر دو ماتریس $m\times n$، $A$ و $B$ هم‌ارز سطری باشند، آنگاه جوابهای دو دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ و $BX=0$ یکی هستند.

اثبات. فرض‌کنیم با دنباله‌ای متناهی ازاعمال سطری مقدماتی، از $A$ به‌$B$ برسیم:

$$A=A_0\to A_1\to\cdots\to A_k=B.$$

کافی است ثابت‌کنیـم جوابهـای دو دستـگاه $A_jX=0$ و $A_{j+1}X=0$ یکـی هستنـد؛ یعنـی، اعمـال سطـری مقـدمـاتی مجموعـهٔ جوابهـا را تغییـر نمی‌دهند.

لذا، فرض‌کنیم $B$ با یك تك‌عمل سطری مقدماتی از $A$ به‌دست آید. صرف‌نظر از نوع این عمل، اعم از (۱)، (۲)، یا (۳)، هـرمعادله دستگاه $BX=0$ ترکیبی خطی از

معادلات دستگاه $AX=0$ است. چون معکوس یك عمل سطری مقدماتی خود یك عمل سطری مقدماتی است، هرمعادلهٔ دستگاه $AX=0$ نیز ترکیبی خطی از معادلات دستگاه $BX=0$ می‌باشد. ازاین‌رو، این دودستگاه هم‌ارزند، و بنابرقضیهٔ ۱ جوابهایشان یکی است. □

**مثال ۵.** فرض کنیم $A$ هیأت اعداد گویا باشد، و

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس $A$ انجام می‌دهیم، و با اعدادی در پرانتز نوع عمل انجام شده را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

www.riazisara.ir



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

هم‌ارزی سطری ماتریس $A$ با ماتریس آخر دنبالهٔ بالا، علی‌الخصوص برای ما روشن می‌سازد که جوابهای

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x_3 - \frac{11}{3}x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad + \frac{17}{3}x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad - \frac{5}{3}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

یکی هستند. در دستگاه دوم، روشن است که هر گاه مقدار دلخواه گویای $c$ را به $x_4$ نسبت بدهیم، جواب $(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}c, c)$ را به‌دست می‌آوریم، ونیز روشن است که همهٔ جوابها به‌همین صورت می‌باشند.

**مثال ۶.** فرض کنیم $F$ هیأت اعداد مختلط باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

درانجام اعمال سطری غالباً راحت‌تراست که چند عمل از نوع (۲) را توأماً انجام دهیم. با درنظر داشتن این مطلب،

$$\begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، دستگاه معادلات

$$-x_1 + ix_2 = 0$$
$$-ix_1 + 3x_2 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 = 0$$

فقط دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = 0$ است.

درمثالهای ۵ و۶، بدیهی است که اعمال سطری را به‌طور تصادفی انجام نداده‌ایم. گزینش ماازاعمال سطری تحت تأثیرتمایلی برای ساده‌کردن ماتریس ضرایب، به‌گونه‌ای شبیه به«حذف مجهولها» دردستگاه معادلات خطی، صورت می گیرد. اکنون، اجازه‌بدهید تعریفی رسمی ازنوع ماتریسی راکه سعی داشتیم بدان دست یابیم، ارائه کنیم.

**تعریف.** ماتریسِی $m \times n$، مانند $R$، **تحویل شدهٔ سطری** نامیده می‌شود، هرگاه:

(الف) اولین درایهٔ غیرصفر در هر سطر غیرصفر $R$ برابر ۱ باشد؛

(ب) همهٔ درایه‌های دیگر هرستونی از $R$ که شامل درایهٔ غیر صفر مقدم یك سطر است، ۰ باشند.

**مثال ۷.** یك‌مثال ازماتریسهای تحویل شدهٔسطری، **ماتریس همانی** $n \times n$ (مربعی) $I$ است. این ماتریس، ماتریسی $n \times n$ است که با

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{هرگاه } i = j \\ 0 & \text{هرگاه } i \neq j \end{cases}$$

تعریف می‌شود. این اولین کاربرد **دلتای کرونکر**[1] ($\delta$) است که کراراً به‌کار خواهد رفت.

در مثالهای ۵ و۶، آخرین ماتریسها در دنباله‌های نمایش داده شده، ماتریسهای

---

1. Kronecker

تحویل شدهٔ سطری هستند. دومثال از ماتریسهایی که تحویل شدهٔ سطری نیستند، ماتریسهای زیرند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

دومین ماتریس درشرط (الف) صدق نمی‌کند، زیرا درایهٔ غیرصفرمقدم اولین سطرآن ۱ نیست. اولین ماتریس شرط (الف) را برمی‌آورد، اماستون ۳ آن حایزشرط (ب)نیست.

اکنون ثابت می‌کنیم که می‌توان از هرماتریس داده شده، با تعدادی متناهی عمل سطری مقدماتی، به‌یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری رسید. ترکیب این مطلب با قضیهٔ ۳ ابزار مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی به‌دست می‌دهد.

**قضیهٔ ۴.** هرماتریس $m\times n$ برروی هیأت $F$، هم‌ارز سطری یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری است.

اثبات. گیریم $A$ یك ماتریس $m\times n$ برروی هیأت $F$ باشد. اگر همهٔ درایه‌های سطراول $A$ برابر ۰ باشند، آنگاه تا آنجایی‌که به‌سطر اول مربوط است، شرط (الف) برقرار است. اگرسطراول دارای یك درایهٔ غیرصفر باشد، $k$ راکوچکترین عدد صحیح مثبت $j$ می‌گیریم که به‌ازای آن $A_{1j}\neq ۰$. سطر اول را در $A_{1k}^{-1}$ ضرب می‌کنیم تا بدین ترتیب شرط (الف) درسطراول برقرارباشد. اکنون به‌ازای هر $i\geqslant ۲$، $(-A_{ik})$ برابر سطراول‌را به‌سطر $i$اُم می‌افزاییم. بدین‌نحو، درایهٔ غیرصفرمقدم سطراول درستون $k$اُم قرار می‌گیرد؛ این درایه ۱ است، و هردرایهٔ دیگرستون $k$اُم برابر ۰ است.

اکنون ماتریس حاصل ازاعمال فوق را درنظرمی‌گیریم. هرگاه همهٔ درایه‌های‌سطر دوم ۰ باشند، روی آن هیچ‌عملی انجام‌نمی‌دهیم. اما، اگردرایه‌ای درسطردوم مخالف ۰ باشد، این سطر را دراسکالرمناسبی ضرب می‌کنیم تا درایهٔ غیرصفر مقدم آن ۱ بشود. در حالتی‌که سطراول، درایهٔ غیرصفرمقدمی درستون $k$اُم داشته باشد، این درایهٔ غیرصفرمقدم سطردوم‌نمی‌تواندرستون $k$اُم‌قرارگیرد. لذا، فرض‌کنیددرایهٔ اخیردرستون $k'\neq k$ باشد. با افزودن مضربهای مناسبی ازسطردوم به‌سطوردیگر، می‌توان ترتیبی دادکه تمامی درایه‌های ستون $k'$، بجز ۱ موجود درسطر دوم، ۰ گردند. نکتهٔ مهم قابل توجه این است‌که ضمن انجام اعمال اخیر، نه‌تنها درایه‌های سطر ۱ در ستونهای ۱، ...، $k$ تغییرنمی‌کنند، بلکه همهٔ درایه‌های ستون $k$اُم نیزبدون تغییر می‌مانند. البته، اگرهمهٔ درایه‌های سطراول صفر باشند، اعمال روی سطردوم تأثیری برسطراول نخواهند داشت.

هرگاه روش فوق‌الذکررا هربار روی یك سطربه‌کار بندیم، روشن است‌که پس ازطی مراحلی متناهی به‌یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری دست خواهیم یافت. □

## تمرین

۱. همهٔ جوابهای دستگاه معادلات

$$(۱-i)x_۱ - i x_۲ = ۰$$
$$۲x_۱ + (۱-i)x_۲ = ۰$$

را به‌دست آورید.

۲. اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

با تحویل سطری کردن $A$، همهٔ جوابهای $AX = ۰$ را به‌دست آورید.

۳. اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۶ & -۴ & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

همهٔ جوابهای دستگاههای $AX = ۲X$ و $AX = ۳X$ را به‌دست آورید. (علامت $cX$ نشانگر ماتریسی است که هردرایهٔ آن $c$ برابر درایهٔ متناظرش درماتریس $X$ است.)

۴. یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری بیابیدکه هم‌ارز سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} i & -(۱+i) & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۲i & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد.

۵. ثابت کنیدکه دوماتریس زیرهم‌ارز سطری نیستند:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & -۱ & ۰ \\ b & c & ۳ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}.$$

۶. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ماتریسی ۲ × ۲ با درایه‌های مختلط باشد. همچنین فرض کنید $A$ تحویل شدهٔ سطری باشد، و $a+b+c+d=0$. ثابت کنید که دقیقاً سه ماتریس از این نوع وجود دارد.

۷. ثابت کنید که عمل تعویض دو سطر یك ماتریس را می‌توان با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی از دو نوع دیگر انجام داد.

۸. دستگاه معادلات $AX=0$ را که در آن

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یك ماتریس ۲ × ۲ بر روی هیأت $F$ است، در نظر بگیرید. ثابت کنید که:

(الف) اگر همهٔ درایه‌های $A$ صفر باشند، آنگاه هر جفت $(x_1, x_2)$ جوابی برای $AX=0$ است.

(ب) اگر $ad-bc\neq 0$، آنگاه دستگاه $AX=0$ فقط دارای جواب بدیهی $x_1=x_2=0$ است.

(پ) اگر $ad-bc=0$ و درایه‌ای از $A$ مخالف ۰ باشد، آنگاه جوابی چون $(x_1^0, x_2^0)$ وجود دارد به‌طوری که $(x_1, x_2)$ یك جواب دستگاه است اگر و تنها اگر اسکالری چون $y$ با شرایط $x_1=yx_1^0$ و $x_2=yx_2^0$ وجود داشته باشد.

## ۴.۱ ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پلکانی

تا به‌حال، کار ما روی دستگاههای معادلات خطی از کوششی جهت یافتن جوابهای این دستگاهها نشأت می‌گرفت. در بخش ۳.۱ روشی متعارفی برای یافتن این جوابها بنیاد نهادیم. اکنون می‌خواهیم اطلاعاتی به‌دست آوریم که اندکی بیشتر جنبهٔ نظری دارند، و برای این منظور، مناسب است ازماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پا را کمی فراتر نهیم.

**تعریف.** ماتریس $m\times n$ ی، مانند $R$، **تحویل شدهٔ سطری پلکانی** نامیده می‌شود هرگاه:

(الف) $R$ تحویل شدهٔ سطری باشد؛

(ب) هر سطر $R$ که همهٔ درایه‌هایش صفر باشند، زیر همهٔ سطوری که دارای درایه‌ای غیرصفرند واقع بشود؛

(پ) اگر سطرهای ۱، ...، $r$ سطرهای غیرصفر ماتریس $R$ باشند و درایهٔ غیرصفر مقدم سطر $i$ام در ستون $k_i$ام، $i=1, 2, \ldots, r$، واقع بشود، آنگاه

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_r.$$

هرماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $m \times n$ مانند $R$ را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد. یا هر درایهٔ $R$ برابر ۰ است، و یا عدد صحیح مثبتی مانند $r$، $1 \leqslant r \leqslant m$، و $r$ عدد صحیح مثبت $k_1$، $k_2$، ...، $k_r$، با شرط $1 \leqslant k_i \leqslant n$ وجود دارند به‌طوری که
(الف) به‌ازای $i > r$، $R_{ij} = 0$؛ و اگر $j < k_i$، آنگاه $R_{ij} = 0$.
(ب) $R_{ik_j} = \delta_{ij}$، $1 \leqslant i \leqslant r$ و $1 \leqslant j \leqslant r$.
(پ) $k_1 < \cdots < k_r$.

**مثال ۸.** ماتریس همانی $n \times n$ و **ماتریس صفر** $m \times n$ که با "۰" نشان داده می‌شود و همهٔ درایه‌هایش ۰ هستند، دو مثال از ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پلکانی‌اند. هرچند، خواننده در ساختن مثالهای دیگر نباید مشکل چندانی داشته باشد، با این حال، علاقه‌مندیم مثالی غیربدیهی هم ارائه کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**قضیهٔ ۵.** هر ماتریس $m \times n$ مانند $A$ با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز سطری است.

اثبات. می‌دانیم که $A$ هم‌ارز سطری با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری است. تنها چیزی که باید ثابت کنیم این است که باانجام تعدادی متناهی عمل تعویض سطری روی یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری می‌توان آن را به‌شکل تحویل شدهٔ سطری پلکانی درآورد. □

در مثالهای ۵ و ۶ اهمیت ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری را در حل دستگاههای معادلات خطی همگن دیدیم. اکنون به‌طور خلاصه دستگاه $RX = 0$ را، که در آن $R$ یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است، مطرح می‌کنیم. فرض کنیم سطرهای ۱، ...، $r$ سطرهای غیرصفر $R$، و درایهٔ غیرصفرمقدم سطر $i$م آن در ستون $k_i$م باشد. دراین‌صورت، دستگاه $RX = 0$ مرکب از $r$ معادلهٔ غیربدیهی است. بعلاوه، مجهول $x_{k_i}$ فقط در $i$مین معادله (با ضریب غیرصفر) ظاهرمی‌شود. اگر $u_1$، ...، $u_{n-r}$ را $(n-r)$ مجهول غیراز $x_{k_1}$، ...، $x_{k_r}$ فرض کنیم، آنگاه $r$ معادلهٔ غیربدیهی در $RX = 0$، به‌صورت

$$\begin{aligned} x_{k_1} + \sum_{j=1}^{n-r} c_{1j} u_j &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j=1}^{n-r} c_{rj} u_j &= 0 \end{aligned} \tag{۳-۱}$$

هستند. همهٔ جوابهای دستگاه معادلات $RX=0$ با تخصیص مقادیری دلخواه به $u_1$، ...، $u_{n-r}$ و سپس محاسبهٔ مقادیر متناظر $x_{k_1}$، ...، $x_{k_r}$ از (۱-۳) به‌دست می‌آیند. مثلاً، اگر $R$ ماتریس نشان داده شده در مثال ۸ باشد، آنگاه $r=2$، $k_1=2$، $k_2=4$، و دو معادلهٔ غیربدیهی در دستگاه $RX=0$، عبارتند از

$$x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \qquad \text{یا} \qquad x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_4 + 2x_5 = 0 \qquad \text{یا} \qquad x_4 = -2x_5.$$

لذا، می‌توان هرمقداری به $x_1$، $x_3$، و $x_5$ تخصیص داد، مثلاً $x_1=a$، $x_3=b$، و $x_5=c$ و جواب $(a,\ 3b-\frac{1}{2}c,\ b,\ -2c,\ c)$ را به‌دست‌آورد.

حال درمورد دستگاه معادلات $RX=0$ مطلب دیگری را بررسی می کنیم. اگر $r$، تعداد سطرهای غیرصفرماتریس $R$، کمتر از $n$ باشد، آنگاه دستگاه $RX=0$ دارای یک جواب غیربدیهی، یعنی یك جواب $(x_1, \ldots, x_n)$ است که در آن همهٔ $x_j$ها صفر نیستند. زیرا، به‌دلیل اینکه $r<n$، می‌توانیم $x_j$ای را انتخاب کنیم که در بین $r$ مجهول $x_{k_1}$، ...، $x_{k_r}$ نباشد، و دراین صورت می‌توانیم جوابی همچون جواب بالا راکه درآن این $x_j$ برابر ۱ باشد، بسازیم. این مطلب ما را به‌یکی از بنیادیترین واقعیتهای در بارهٔ دستگاههای معادلات خطی همگن می‌رساند.

**قضیهٔ ۶.** اگر $A$ یك ماتریس $m\times n$ و $m<n$ باشد، آنگاه دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ یك جواب غیربدیهی دارد.

اثبات. فرض‌کنیم $R$ یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی باشدکه با $A$ هم‌ارز سطری است. بنابر قضیهٔ ۳، جوابهای دستگاههای $AX=0$ و $RX=0$ یکی هستند. اگر $r$ تعداد سطرهای غیرصفر $R$ باشد، آنگاه یقیناً $r\leqslant m$، وچون $m<n$، داریم $r<n$. از ملاحظات فوق بیدرنگ نتیجه می‌شودکه $AX=0$ یك جواب غیربدیهی دارد. □

**قضیهٔ ۷.** اگر $A$ یك‌ماتریس $n\times n$ (مربعی) باشد، آنگاه $A$ هم‌ارز سطری‌ماتریس همانی $n\times n$ است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات $AX=0$ فقط جواب بدیهی داشته باشد.

اثبات. اگر $A$ هم‌ارز سطری $I$ باشد، آنگاه جوابهای $AX=0$ و $IX=0$ یکی هستند. بعکس، فرض‌کنیم $AX=0$ فقط‌دارای جواب‌بدیهی $X=0$ باشد. $R$ را ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $n\times n$ی می گیریم که هم‌ارز سطری $A$ است. فرض‌کنیم $r$ تعداد سطرهای غیرصفر $R$ باشد. در این صورت، $RX=0$ هیچ جواب غیربدیهی‌ندارد. بنابراین، $r\geqslant n$. از طرفی، چون $R$ دارای $n$ سطراست، روشن است که $r\leqslant n$ وبنابراین $r=n$. چون مطلب اخیر به‌این معنی است که $R$ عملاً در هریك از $n$ سطرش یك درایهٔ غیرصفرمقدم ۱ دارد، و نیز این ۱ها هریك در یکی از $n$ ستون مختلف قرار دارند، $R$

می‌باید ماتریس همانی $n\times n$ باشد. □

اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم که اثر اعمال سطری مقدماتی درجریان حل یك دستگاه معادلات خطی ناهمگن $AX=Y$ چیست؟ در بدو امر، تفاوتی اساسی بین این حالت و حالت همگن مشاهده می‌شود، وآن این است که علی‌رغم این‌که دستگاه همگن همواره دارای جواب بدیهی $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ است، لازم نیست یك دستگاه ناهمگن اصلاً جوابی داشته باشد.

$A'$، **ماتریس افزودهٔ** دستگاه $AX=Y$ را تشکیل می‌دهیم. این ماتریس، ماتریسی $m\times(n+1)$ است که $n$ ستون اولش ستونهای ماتریس $A$ و ستون آخرش $Y$ است. به‌طور دقیقتر،

$$A'_{ij}=A_{ij} \qquad \text{اگر } j\leqslant n\text{،}$$
$$A'_{i(n+1)}=y_i\,.$$

فرض کنیم دنباله‌ای ازاعمال سطری‌مقدماتی روی $A$ انجام داده‌ایم تا به‌یك ماتریس‌تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی $R$ برسیم. اگر همین دنباله از اعمال سطری را روی ماتریس افزودهٔ $A'$ انجام دهیم، به‌ماتریسی چون $R'$ می‌رسیم که $n$ ستون اولش ستونهای $R$، و ستون آخرش متشکل از اسکالرهای معین $z_1$، $\cdots$، $z_m$ است. اسکالرهای $z_i$، درایه‌های ماتریس $m\times 1$

$$Z=\begin{bmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_m\end{bmatrix}$$

هستند که از به‌کار بستن دنبالهٔ اعمال سطری فوق روی ماتریس $Y$ حاصل می‌شوند. برای خواننده می‌باید روشن باشد که، درست شبیه اثبات قضیهٔ ۳، دستگاههای $AX=Y$ و $RX=Z$ هم‌ارزند، و از این‌رو، جوابهایشان یکی است. تعیین این‌که آیا دستگاه $RX=Z$ دارای جوابی هست یا نه، و نیز تعیین همهٔ جوابهای این دستگاه، درصورت وجود، کار بسیار آسانی است. زیرا، اگر $R$ دارای $r$ سطرغیرصفرباشد، و درایهٔ غیرصفر مقدم سطر $i$ام درستون $k_i$ام، $i=1,2,\cdots,r$، قراربگیرد، آنگاه $r$ معادلهٔ اول $RX=Z$ عملاً $x_{k_1}$،$\cdots$،$x_{k_r}$ را بر حسب $(n-r)$ مجهول باقیماندهٔ $x_j$ واسکالرهای $z_1$،$\cdots$،$z_r$ بیان می‌کنند. $(m-r)$ معادلهٔ آخرعبارتند از

$$\begin{aligned} 0&=z_{r+1}\\ \vdots\ &\quad\ \vdots\\ 0&=z_m \end{aligned}$$

و بنابراین، شرط وجود جواب برای دستگاه این است که به‌ازای $i > r$، $z_i = ۰$. اگر این شرط برقرار باشد، همهٔ جوابهای دستگاه، دقیقاً مانند حالت همگن، با تخصیص مقادیر دلخواه به $(n-r)$ مجهول $x_j$، وسپس محاسبهٔ $x_{k_i}$ از $i$ مین معادله به‌دست می‌آیند.

**مثال ۹.** گیریم $F$ هیأت اعدادگویا و

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد، و بخواهیم دستگاه $AX=Y$ را، به‌ازای مقادیر $y_۱$، $y_۲$، و $y_۳$ حل کنیم. روی ماتریس افزودهٔ $A'$ دنباله‌ای از اعمال سطری که $A$ را تحویل شدهٔ سطری‌می‌سازد، انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & y_۲ \\ ۰ & ۵ & -۱ & y_۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ & (y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۵ & -۱ & y_۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ & (y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۰ & ۰ & (y_۳-y_۲+۲y_۱) \end{bmatrix} \xrightarrow{(۱)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}(y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۰ & ۰ & (y_۳-y_۲+۲y_۱) \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۱}{۵}(y_۱+۲y_۲) \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}(y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۰ & ۰ & (y_۳-y_۲+۲y_۱) \end{bmatrix}.$$

از این‌رو، شرطی که تحت آن دستگاه $AX=Y$ دارای جواب باشد، عبارت است از

$$۲y_۱-y_۲+y_۳=۰.$$

هرگاه اسکالرهای داده شدهٔ $y_i$ این شرط را برآورند، همهٔ جوابها با تخصیص یک مقدار

دلخواه $c$ به $x_3$، و سپس محاسبهٔ

$$x_1 = -\frac{3}{5}c + \frac{1}{5}(y_1 + 2y_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1)$$

به‌دست می‌آیند.

اکنون به‌مشاهدهٔ آخرین مطلب دربارهٔ دستگاه $AX = Y$ می‌پردازیم. فرض کنیم برحسب اتفاق درایه‌های ماتریس $A$ و اسکالرهای $y_1$، ...، $y_m$ در زیر هیأت $F_1$ از هیأت $F$ قرار گیرند. اگر دستگاه معادلات $AX = Y$ دارای جوابی با $x_1$، ...، $x_n$ در $F$ باشد، این دستگاه دارای جوابی با $x_1$، ...، $x_n$ در $F_1$ است؛ زیرا، برروی هریك از این دو هیأت، شرط وجود جواب برای دستگاه عبارت است از برقراری روابط‌معینی بین $y_1$، ...، $y_m$ در $F_1$ (روابط $z_i = 0$، به‌ازای $i > r$، که قبلاً ذکرشد). به‌عنوان مثال، فرض کنیم $AX = Y$ دستگاهی از معادلات خطی باشد که درآن اسکالرهای $y_k$ و همچنین $A_{ij}$ها همه حقیقی‌اند. اگر جوابی برای این دستگاه موجود باشد که در آن $x_1$، ...، $x_n$ مختلط باشند، آنگاه این دستگاه دارای جوابی است که‌در آن $x_1$، ...، $x_n$ حقیقی‌اند.

## تمرین

۱. همهٔ جوابهای دستگاه‌معادلات زیر را با تحویل سطری کردن ماتریس ضرایب آن به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -4x_1 \qquad\quad + 5x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 13x_3 &= 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{8}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

۲. ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی‌ای بیابیدکه هم‌ارز سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$$

باشد. جوابهای $AX=0$ را به‌دست آورید.

۳. همهٔ ماتریسهای $2\times 2$ تحویل شدهٔ سطری پلکانی را به‌طور صریح توصیف کنید.

۴. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

را درنظر بگیرید. آیا این‌دستگاه‌جواب‌دارد؟ اگرچنین است، همهٔ این‌جوابهارا صریحاً توصیف کنید.

۵. مثالی ازیك دستگاه دومعادلهٔ خطی دومجهولی بیاوریدکه جواب نداشته باشد.

۶. نشان دهید دستگاه

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

جواب ندارد

۷. همهٔ جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 &= -2 \\ 2x_1 \qquad - 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= -7 \end{aligned}$$

را بیابید.

۸. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

به‌ازای کدام سه‌تاییهای $(y_1, y_2, y_3)$ دستگاه $AX=Y$ جواب دارد؟

۹. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

به‌ازای کدام $(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴)$ دستگاه $AX=Y$ جواب دارد؟

۱۰. فرض کنید $R$ و $R'$ دو ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی ۳ × ۲ باشند وجوابهای دستگاههای $RX=۰$ و $R'X=۰$ یکی باشند. ثابت کنید $R'=R$.

## ۵.۱. ضرب ماتریسی

واضح است که فرایند تشکیل ترکیبات خطی از سطرهای یک ماتریس، فرایندی بنیانی است (یا به‌هرحال، باید چنین باشد). بدین دلیل، ارائهٔ طرحی با نظام برای بیان این نکته‌که دقیقاً چه اعمالی باید انجام شوند، ارجح است. به‌صورت مشخصتر، فرض کنیم $B$ ماتریسی $n\times p$ برروی هیأت $F$، با سطرهای $\beta_۱$، ...، $\beta_n$ باشد، ونیز فرض‌کنیم از $B$ ماتریس $C$ با سطرهای $\gamma_۱$، ...، $\gamma_m$ را با تشکیل ترکیبات خطی معین

$$\gamma_i = A_{i۱}\beta_۱ + A_{i۲}\beta_۲ + \cdots + A_{in}\beta_n \qquad (۴\text{-}۱)$$

ساخته‌ایم. سطرهای $C$ با $mn$ اسکالر $A_{ij}$ که خود درایه‌های ماتریسی $m\times n$ مانند $A$ هستند تعیین می‌شوند. اگر (۱-۴) را به‌صورت

$$(C_{i۱} \cdots C_{ip}) = \sum_{r=۱}^{n} (A_{ir}B_{r۱} \cdots A_{ir}B_{rp})$$

بسط دهیم، می‌بینیم‌که درایه‌های $C$ با رابطهٔ زیرمشخص می‌شوند:

$$C_{ij} = \sum_{r=۱}^{n} A_{ir}B_{rj}.$$

**تعریف.** فرض کنیم $A$ ماتریسی $m\times n$ بر روی هیأت $F$، و $B$ ماتریسی $n\times p$ بر روی همین هیأت باشد. **حاصلضرب** $AB$، ماتریس $m\times p$ی مانند $C$ است که درایهٔ $(i$ و $j)$ آن عبارت است از

$$C_{ij} = \sum_{r=۱}^{n} A_{ir}B_{rj}.$$

**مثال ۱۰.** در این مثال، چند حاصل ضرب از ماتریسهایی با درایه‌های گویا آمده است.

(الف)
$$\begin{bmatrix} ۵ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ & -۱ & ۲ \\ ۱۵ & ۴ & ۸ \end{bmatrix}$$

در اینجا

$$\begin{aligned} \gamma_۱ &= (۵ \quad -۱ \quad ۲) = \phantom{-}۱\cdot(۵ \quad -۱ \quad ۲) + ۰\cdot(۱۵ \quad ۴ \quad ۸) \\ \gamma_۲ &= (۰ \quad ۷ \quad ۲) = -۳\cdot(۵ \quad -۱ \quad ۲) + ۱\cdot(۱۵ \quad ۴ \quad ۸) \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} ۰ & ۶ & ۱ \\ ۹ & ۱۲ & -۸ \\ ۱۲ & ۶۲ & -۳ \\ ۳ & ۸ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \\ ۵ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۶ & ۱ \\ ۳ & ۸ & -۲ \end{bmatrix}$$

در اینجا

$$\begin{aligned} \gamma_۲ &= (۹ \quad ۱۲ \quad -۸) = -۲(۰ \quad ۶ \quad ۱) + ۳(۳ \quad ۸ \quad -۲) \\ \gamma_۳ &= (۱۲ \quad ۶۲ \quad -۳) = \phantom{-}۵(۰ \quad ۶ \quad ۱) + ۴(۳ \quad ۸ \quad -۲) \end{aligned}$$

(پ)
$$\begin{bmatrix} ۸ \\ ۲۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

(ت)
$$\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۶ & ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} [۲ \quad ۴].$$

در اینجا

$$\gamma_۲ = (۶ \quad ۱۲) = ۳(۲ \quad ۴)$$

(ث)
$$[۲ \quad ۴] \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = [۱۰]$$

(ج)
$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۹ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۹ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \end{bmatrix} \quad (چ)$$

توجه به این نکته مهم است که ضرب‌دوماتریس همواره قابل تعریف نیست؛ ضرب دوماتریس زمانی، وتنها زمانی، تعریف می‌شود که تعداد ستونهای ماتریس اول برابر با تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد. لذا، تعویض ترتیب سازه‌ها دربندهای (الف)، (ب)، و (پ) مثال فوق بی‌معنی است. غالباً، ضربهایی مانند $AB$ را بدون ذکرصریح اندازهٔ سازه‌های آن می‌نویسیم؛ در چنین حالاتی استنباط این است که ضرب تعریف می‌شود. از (ت)، (ث)، (ج)، و(چ) درمی‌یابیم که‌حتی اگرضربهای $AB$ و $BA$ هر دو تعریف بشوند، لزوماً $AB=BA$ درست نیست؛ به بیان دیگر، ضرب ماتریسی جابجایی نیست.

**مثال ۱۱.**

(الف) اگر $I$ ماتریس‌همانی $m\times m$ و $A$ ماتریسی $m\times n$ باشد، آنگاه $IA=A$.
(ب) اگر $I$ ماتریس همانی $n\times n$ و $A$ ماتریسی $m\times n$ باشد، آنگاه $AI=A$.
(پ) اگر $0^{k,m}$ ماتریس صفر $k\times m$ باشد، آنگاه $0^{k,m}A=0^{k,n}$. به طورمشابه $A0^{n,p}=0^{m,p}$.

**مثال ۱۲.** فرض کنیم $A$ ماتریسی $m\times n$ برروی هیأت $F$ باشد. نماد اختصاری پیشین برای دستگاههای معادلات خطی، یعنی $AX=Y$، باتعریف ضرب ماتریسی سازگار است. زیرا، اگر

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

و $x_i$ ها در $F$ باشند، آنگاه $AX$ ماتریس $m\times 1$

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

است که در آن $y_i=A_{i1}x_1+A_{i2}x_2+\cdots+A_{in}x_n$.

استفاده ازماتریسهای ستونی نمادی را پیشنهاد می‌کندکه غالباً مفید است. اگر $B$

ماتریسی $n \times p$ باشد، ستونهای $B$ ماتریسهای $n \times 1$ ، $B_1$ ، ... ، $B_p$ خواهند بود که به صورت

$$B_j = \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p$$

تعریف می‌شوند، وماتریس $B$ توالی این ستونهاست:

$$B = [B_1, \cdots, B_p].$$

درایهٔ $(i, j)$ ماتریس‌حاصل‌ضرب $AB$ ازسطر $i$ام $A$ وستون $j$ام $B$ شکل می گیرد. خواننده خود تحقیق خواهدکردکه ستون $j$ام ماتریس $AB$ برابر $AB_j$ است:

$$AB = [AB_1, \cdots, AB_p].$$

علی‌رغم‌این که‌ضرب‌ماتریسها به‌ترتیب نوشتن‌سازه‌هایش بستگی دارد، اما همان‌طور که قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد از نحوهٔ شرکت آنها مستقل است.

**قضیهٔ ۸.** اگر $A$ ، $B$ ، و $C$ ماتریسهایی بر روی هیأت $F$ باشند که ضربهای $BC$ و $A(BC)$ تعریف بشوند، آنگاه ضربهای $AB$ و $(AB)C$ نیز تعریف می‌شوند و

$$A(BC) = (AB)C.$$

**اثبات.** فرض کنیم $B$ ماتریسی $n \times p$ باشد. چون $BC$ تعریف‌می‌شود، $C$ ماتریسی است با $p$ سطر، ولذا $BC$، $n$ سطر دارد. حال، به‌دلیل اینکه $A(BC)$ هم تعریف‌می‌شود می‌توانیم فرض کنیم‌که $A$ ماتریسی است $m \times n$. بنابراین، حاصل‌ضرب $AB$ وجود دارد وماتریسی $m \times p$ است. ازاینجا نتیجه می‌شودکه حاصل‌ضرب $(AB)C$ وجود دارد. برای نشان دادن تساوی $A(BC) = (AB)C$، کافی است نشان دهیم‌که به‌ازای هر $i$ و $j$،

$$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}.$$

طبق تعریف

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir}(BC)_{rj} \\
&= \sum_r A_{ir} \sum_s B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_s \Big(\sum_r A_{ir} B_{rs}\Big) C_{sj} \\
&= \sum_s (AB)_{is} C_{sj} \\
&= [(AB)C]_{ij}. \quad \square
\end{aligned}$$

اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ (مربعی) باشد، ضرب $AA$ تعریف می‌شود. این ماتریس‌را با $A^2$ نشان می‌دهیم. بنابرقضیهٔ ۸، $A(AA)=(AA)A$، یا $A^2A=AA^2$، ازاین رو، ضرب $AAA$ بدون ابهام تعریف می‌شود. این حاصلضرب را با $A^3$ نشان می‌دهیم. در حالت عمومی، ضرب $A\cdots A$ ($k$ بار) بدون ابهام تعریف می‌شود، واین حاصل ضرب را با $A^k$ نشان می‌دهیم.

توجه کنید که ازجمله نتایجی که رابطهٔ $A(BC)=(AB)C$ ایجاب می‌کند، یکی این است که ترکیبهایی خطی از ترکیبهای خطی سطرهای $C$، مجدداً ترکیبهای خطی‌از سطرهای $C$ هستند.

اگر $B$ ماتریس مفروضی باشد و $C$ به وسیلهٔ یك عمل سطری مقدماتی از $B$ حاصل شده باشد، آنگاه هرسطر $C$ ترکیبی خطی‌ازسطرهای $B$ است؛ وازاین رو، ماتریسی‌چون $A$ وجود دارد به طوری که $AB=C$. معمولاً ماتریسهایی با این خاصیت زیادند، و لذا مناسبت دارد ونیزممکن است دربین‌آنها یکی‌راکه دارای خواص ویژه‌ای است انتخاب کنیم. قبل ازآنکه به‌این بحث وارد شویم، نیاز داریم‌که با رده‌ای ازماتریسها آشنا شویم.

**تعریف.** یك ماتریس $m\times m$ **یك ماتریس مقدماتی** خوانده می‌شود هرگاه بتوان‌آن را ازماتریس همانی $m\times m$ با تنها یك عمل سطری مقدماتی به دست‌آورد.

**مثال۱۳.** یك ماتریس مقدماتی ۲ × ۲ لزوماً یکی ازماتریسهای زیر است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad c\neq 0,\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},\quad c\neq 0.$$

**قضیهٔ۹.** فرض‌کنیم $e$ یك عمل سطری مقدماتی و $E$ ماتریس مقدماتی $m\times m$، $E=e(I)$ باشد. دراین صورت، به ازای هرماتریس $m\times n$ مانند $A$، داریم

$$e(A)=EA.$$

اثبات. نکتهٔ‌مهم‌این‌است که‌درایهٔ واقع‌درسطر$i$م‌وستون $j$م ماتریس‌حاصلضرب $EA$، ازسطر $i$م ماتریس $E$ وستون $j$م ماتریس $A$ شکل می‌گیرد. لذا، لازم است هریك ازسه نوع عمل سطری مقدماتی را جداگانه بررسی‌کنیم. دراینجا اثبات مفصلی برای عملی‌از نوع (۲) خواهیم‌آورد. بررسی دوحالت دیگر، حتی ازاین یکی‌هم ساده‌تر است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود. فرض‌کنیم $r\neq s$، و $e$ عمل «جایگزینی سطر $r$ با سطر $r$ بعلاوهٔ $c$ برابر سطر $s$» باشد. دراین‌صورت

$$E_{ik}=\begin{cases}\delta_{ik}, & i\neq r\\ \delta_{rk}+c\delta_{sk}, & i=r.\end{cases}$$

www.riazisara.ir



بنا براین،

$$(EA)_{ij}=\sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj}=\begin{cases}A_{ik}, & i\neq r\\ A_{rj}+cA_{sj}, & i=r.\end{cases}$$

و به بیان دیگر، $EA=e(A)$. $\square$

**نتیجه.** فرض‌کنیم $A$ و $B$ دو ماتریس $m\times n$ برروی هیأت $F$ باشند. در این صورت، $B$ هم‌ارزسطری $A$ است اگروتنها اگر $B=PA$ و $P$ حاصل ضربی ازماتریسهای مقدماتی $m\times m$ باشد.

**اثبات.** فرض کنیم $B=PA$، که در آن $P=E_s\cdots E_2E_1$، و $E_i$ ها ماتریسهای مقدماتی $m\times m$ باشند. در این صورت، $E_1A$ هم ارز سطری $A$، و $E_2(E_1A)$ هم‌ارز سطری $E_1A$، وبنا براین $E_2E_1A$ هم ارزسطری $A$ است؛ با ادامهٔ این راه می‌بینیم که $(E_s\cdots E_1)A$ هم ارزسطری $A$ است.

حال فرض کنیم $B$ هم ارزسطری $A$ باشد، و $E_1$، $E_2$، ...، $E_s$ ماتریسهای مقدماتی متناظر به دنباله‌ای ازاعمال سطری مقدماتی باشند که $A$ را به $B$ تبدیل می‌کنند. دراین‌صورت، $B=(E_s\cdots E_1)A$. $\square$

## تمرین

۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ -1\end{bmatrix},\qquad C=[1\quad -1].$$

ماتریسهای $ABC$ و $CAB$ را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}.$$

مستقیماً تحقیق کنید که $A(AB)=A^2B$.

۳. دو ماتریس مختلف ۲ × ۲ مانند $A$ بیابید به طوری‌که $A^2=0$ ولی $A\neq 0$.

۴. برای ماتریس $A$ در تمرین ۲ ، ماتریسهای مقدماتی $E_1$ ، $E_2$ ، ... ، $E_k$ را بیابید که

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

۵. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

آیا ماتریسی چون $C$ باخاصیت $CA = B$ وجود دارد؟

۶. فرض کنید $A$ ماتریسی $m \times n$ ، و $B$ ماتریسی $n \times k$ باشد. نشان دهید که ستونهای $C = AB$ ترکیباتی خطی ازستونهای $A$ هستند. اگر $\alpha_1$ ، ... ، $\alpha_n$ ستونهای‌ماتریس $A$ ، و $\gamma_1$ ، ... ، $\gamma_k$ ستونهای ماتریس $C$ باشند،آنگاه

$$\gamma_j = \sum_{r=1}^{n} B_{rj} \alpha_r.$$

۷. فرض کنید $A$ و $B$ دوماتریس $2 \times 2$ باشندکه $AB = I$. ثابت کنید $BA = I$.

۸. فرض کنید

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

ماتریسی$2 \times 2$ باشد. می‌خواهیم بدانیم چه‌وقت ممکن‌است ماتریسهایی $2 \times 2$ مانند $A$ و $B$ یافت به‌طوری که $C = AB - BA$. ثابت‌کنید چنین ماتریسهایی را می‌توان یافت اگر و تنها اگر $C_{11} + C_{22} = 0$.

## ۶.۱ ماتریسهای معکوس‌پذیر

فرض‌کنیم ماتریس $m \times m$ی مانند $P$ حاصل‌ضربی از ماتریسهای مقدماتی باشد. به‌ازای هر ماتریس $m \times n$ مانند $A$ ، ماتریس $B = PA$ هم‌ارز سطری $A$ است؛ از این رو، $A$ نیز هم‌ارز سطری $B$ است و حاصل‌ضربی چون $Q$ از ماتریسهای مقدماتی وجود دارد به‌طوری که $A = QB$. این امر، بخصوص، هنگامی‌که $A$ ماتریس همانی $m \times m$ باشد، درست است. به‌بیان دیگر، ماتریس $m \times m$ی چون $Q$ که خودحاصل‌ضربی ازماتریسهای مقدماتی‌است، وجوددارد به‌طوری که $QP = I$. بزودی خواهیم‌دید که‌وجودماتریسی‌مانند $Q$

با خاصیت $QP=I$، هم‌ارز این‌مطلب‌است که $P$ حاصل‌ضربی ازماتریسهای مقدماتی‌است.

**تعریف.** فرض کنیم $A$ یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) بر روی هیأت $F$ باشد . یك ماتریس $n\times n$ مانند $B$، به‌طوری که $BA=I$، یك **معکوس چپ** $A$ نامیده می‌شود؛ یك ماتریس $n\times n$ مانند $B$ با این شرط که $AB=I$ یـك **معکوس راست** $A$ نـام دارد. اگر $AB=BA=I$، آنگاه $B$ بـه یـك **معکوس دوطرفه** $A$ مـوسوم است و $A$ **معکوس‌پذیر** نامیده می‌شود.

**لم.** اگـر $A$ دارای یك معکـوس چپ $B$ و یك معکـوس راست $C$ باشد، آنگاه $B=C$.

اثبات. فرض‌کنیم $BA=I$ و $AC=I$. در این صورت

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C. \quad \square$$

بنابراین، اگر $A$ یـك معکوس چپ و یـك معکوس راست داشته باشد، آنگاه $A$ معکوس‌پذیر است و دارای معکوس دوطرفهٔ یکتایی است. ایـن معکوس را کـه با $A^{-1}$ نشان می‌دهیم، به‌طور ساده **معکوس** $A$ می‌نامیم.

**قضیهٔ ۱۰** فرض کنیم $A$ و $B$ دو ماتریس $n\times n$ بر روی هیأت $F$ باشند.

(۱) اگـر $A$ معکـوس‌پذیر باشد، $A^{-1}$ نیز معکوس‌پذیـر است و $(A^{-1})^{-1}=A$.

(۲) اگر $A$ و $B$ هـر دو معکـوس‌پـذیـر باشند، $AB$ نیز معکـوس پـذیـر است و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

اثبات. گزارهٔ اول از تقارن تعریف بسادگی نتیجه می‌شود. گزارهٔ دوم، از تحقیق صحت روابط

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$$

به‌دست می‌آید. $\square$

**نتیجه.** هر حاصل‌ضربی از ماتریسهای معکوس‌پذیر ماتریسی است معکوس‌پذیر.

**قضیهٔ ۱۱.** هر ماتریس مقدماتی معکوس‌پذیر است.

اثبات. فرض‌کنیم $E$ ماتریس مقدماتی متناظر به‌عمل سطری مقدماتی $e$ باشد. اگر $e_1$ عمل معکوس $e$ باشد (قضیهٔ ۲) و $E_1=e_1(I)$، آنگاه

$$EE_1=e(E_1)=e(e_1(I))=I$$

و

$$E_1E=e_1(E)=e_1(e(I))=I.$$

از این‌رو، $E$ معکوس‌پذیر است و $E_1=E^{-1}$. $\square$

**مثال ۱۴.**

(الف)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(پ)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}$$

(ت) اگر $c \neq 0$،

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

**قضیهٔ ۱۲.** اگر $A$ ماتریسی $n \times n$ باشد، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(۱) $A$ معکوس‌پذیر است.

(۲) $A$ هم‌ارز سطری ماتریس همانی $n \times n$ است.

(۳) $A$ حاصلضربی است از ماتریسهای مقدماتی.

اثبات. گیریم $R$ ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی‌ای باشد که هم‌ارز سطری $A$ است. طبق قضیهٔ ۹ (یا نتیجهٔ آن)،

$$R = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

که در آن $E_1$، ...، $E_k$ ماتریسهای مقدماتی هستند. همهٔ $E_j$ها معکوس پذیرند، و از این رو،

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R.$$

چون حاصلضرب ماتریسهای معکوس‌پذیر ماتریسی است معکوس‌پذیر، می‌بینیم که $A$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $R$ معکوس‌پذیر باشد. ازطرفی چون $R$ یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی (مربعی) است، $R$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر هر سطر $R$ شامل یك درایهٔ غیر صفر باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر $R = I$. تا اینجا نشان داده‌ایم که $A$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $R = I$؛ و اگر $R = I$ آنگاه $A = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}$. اکنون، باید روشن باشد که (۱)، (۲)، و (۳) گزاره‌های هم‌ارزی در بارهٔ ماتریس $A$ هستند. □

نتیجه. اگر $A$ یك ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر باشد و دنباله‌ای ازاعمال سطری مقدماتی، $A$ را به ماتریس همانی تحویل کند، آنگاه همان دنبالهٔ اعمال هنگامی که بر $I$ به‌کار بسته شود، $A^{-1}$ را به دست می‌دهد.

**نتیجه.** فرض‌کنیم $A$ و $B$ دو ماتریس $m\times n$ باشند. در این صورت، $B$ هم‌ارزسطری $A$ است اگر وتنها اگر $B=PA$، و $P$ یك ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیر باشد.

**قضیهٔ ۱۳.** برای ماتریسی $n\times n$ مانند $A$،گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(۱) $A$ معکوس‌پذیر است.

(۲) دستگاه همگن $AX=0$ فقط جواب بدیهی $X=0$ را دارد.

(۳) دستگاه معادلات $AX=Y$، به ازای هر ماتریس $n\times 1$ مانند $Y$، لااقل یك جواب دارد.

اثبات. بنا بر قضیهٔ ۷، شرط (۲) هم ارز این مطلب است که $A$ هم‌ارز سطری ماتریس همانی است. از این‌رو، بنابر قضیهٔ ۱۲، (۱) و (۲) هم‌ارزند. اگر $A$ معکوس‌پذیر باشد، جواب دستگاه $AX=Y$ عبارت است از $X=A^{-1}Y$. بعکس، فرض‌کنیم دستگاه $AX=Y$ به‌ازای هر $Y$ مفروض دارای یك‌جواب باشد. گیریم $R$ ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی‌ای باشد که هم‌ارز سطری $A$ است. می‌خواهیم نشان بدهیم‌که $R=I$. بدین صورت،کافی است نشان دهیم‌که همهٔ درایه‌های آخرین سطر $R$ برابر ۰ نیستند. فرض کنیم

$$E=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

اگر دستگاه $RX=E$ برای $X$ قابل حل باشد، سطرآخر $R$ هیچ‌گاه ۰ نیست. می‌دانیم که $R=PA$ و $P$ ماتریسی معکوس‌پذیر است. بنابراین، $RX=E$ اگر و تنها اگر $AX=P^{-1}E$؛ و بنا بر (۳) دستگاه اخیر لااقل یك جواب دارد. □

**نتیجه.** ماتریسی مربعی که دارای یك معکوس چپ یا یك معکوس راست باشد، معکوس‌پذیر است.

اثبات. فرض‌کنیم $A$ یك ماتریس $n\times n$ و دارای یك معکوس چپ باشد؛ یعنی، یك ماتریس $B$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $BA=I$. در این صورت، چون $X=IX=B(AX)$، دستگاه $AX=0$ فقط دارای جواب بدیهی است. بنابراین، $A$ معکوس‌پذیر است. از طرف دیگر، فرض‌کنیم $A$ دارای یك معکوس راست باشد؛ یعنی، ماتریسی چون $C$ یافت شود به‌طوری‌که $AC=I$. آنگاه $C$ دارای یك معکوس چپ است و بنابراین معکوس‌پذیر. پس $A=C^{-1}$، و از این‌رو $A$ معکوس‌پذیر و دارای

معکوس $C$ است. □

**نتیجه.** فرض کنیم $A=A_1A_2\cdots A_k$ و $A_1,\cdots,A_k$ ماتریسهایی $n\times n$ (مربعی) باشند. در این صورت، $A$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر هر $A_j$ معکوس‌پذیر باشد.

اثبات. قبلاً نشان دادیم که حاصل‌ضرب دو ماتریس معکوس‌پذیر ماتریسی است معکوس‌پذیر. از این مطلب بسادگی مشهود است که اگر هر $A_j$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $A$ نیز معکوس‌پذیر است.

حال فرض کنیم $A$ معکوس‌پذیر باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم $A_k$ معکوس‌پذیر است. فرض کنیم $X$ ماتریسی $n\times 1$ باشد و $A_kX=0$، در این صورت $AX=(A_1\cdots A_{k-1})A_kX=0$. چون $A$ معکوس‌پذیر است، باید داشته باشیم $X=0$. بنابراین، دستگاه معادلات $A_kX=0$ هیچ جواب نابدیهی ندارد. لذا، $A_k$ معکوس‌پذیر است. حال، $A_1\cdots A_{k-1}=AA_k^{-1}$ معکوس‌پذیر است. با استدلال قبل، $A_{k-1}$ نیز معکوس‌پذیر است، با ادامهٔ این راه بدین نتیجه می‌رسیم که هر $A_j$ معکوس‌پذیر است. □

اکنون می‌خواهیم به آخرین نکته در بارهٔ حل معادلات خطی بپردازیم. فرض کنیم $A$ ماتریسی $m\times n$ باشد و بخواهیم دستگاه معادلات $AX=Y$ را حل کنیم. اگر $R$ یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز سطری با $A$ باشد، آنگاه $R=PA$ که در آن $P$ ماتریسی $m\times m$ ومعکوس‌پذیر است. جوابهای دستگاه $AX=Y$ دقیقاً همان‌جوابهای دستگاه $RX=PY(=Z)$ هستند. درعمل، یافتن ماتریس $P$ خیلی‌مشکلتر از تحویل کردن $A$ به $R$ نیست. زیرا، فرض کنیم ماتریس افزودهٔ $A'$ از دستگاه $AX=Y$ را که در آن اسکالرهای دلخواه $y_1,\cdots,y_m$ در آخرین ستون قرار می‌گیرند، تشکیل داده باشیم. در این صورت، اگر روی $A'$ دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی را به‌کار بندیم که $A$ را به $R$ سوق می‌دهد، آنگاه روشن خواهد شد که ماتریس $P$ چیست. (بهتر است خواننده به مثال ۹ که در آن این فرایند به‌طور اساسی به‌کار بسته شده است، رجوع کند.) درحالت خاص، اگر $A$ ماتریسی مربعی باشد، این فرایند روشن می‌سازد که $A$ معکوس‌پذیر است یا نه، و اگر معکوس‌پذیر باشد، $P$، معکوس آن چیست. چون قبلاً لب مثالی از چنین محاسبه‌ای را ارائه کرده‌ایم، اینك به یك مثال $۲\times۲$ اکتفا می‌کنیم.

**مثال ۱۵.** فرض کنیم $F$ هیأت اعداد گویا باشد، و

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}.$$

در این صورت،

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & y_1 \\ ۱ & ۳ & y_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(۳)} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & y_2 \\ ۲ & -۱ & y_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 0 & -7 & y_1 - 2y_2 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(2y_2 - y_1) \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7}(y_2 + 3y_1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(2y_2 - y_1) \end{bmatrix}.$$

حال واضح است که $A$ معکوس‌پذیر است و

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

ممکن است چنین به‌نظر آید که درمحاسبهٔ معکوسها ادامهٔ نوشتن اسکالرهای دلخواه $y_1$، $y_2$، ... پر زحمت باشد. عده‌ای حمل دو دنباله ازماتریسها را، یکی برای توصیف تحویل‌کردن $A$ به‌ماتریس همانی، و دیگری برای ثبت اثر همان دنباله اعمال روی ماتریس همانی، ترجیح می‌دهند. خواننده خود قضاوت خواهد کرد که‌کدام روش از نظر ثبت مطالب و نوشتن روش بهتری است.

**مثال ۱۶.** می‌خواهیم معکوس ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

را بیابیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 60 & -60 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

این مطلب نباید از نظر خوانندگان دور مانده باشد که تاکنون در مورد سطرهای ماتریسها به‌طور مفصل بحث‌کرده‌ایم ولی مطلب چندانی دربارهٔ ستونها نگفته‌ایم. بدین جهت توجه خود را روی سطرها متمرکز کردیم که از دیدگاه معادلات خطی این امر طبیعیتر به‌نظر می‌آمد. چون مسلماً هیچ نکتهٔ خاصی در مورد سطرها وجود ندارد، بحث انجام شده در بخشهای قبل می‌توانست به‌جای سطرها روی ستونها هم انجام بگیرد.

روشن است که اگر یك عمل ستونی مقدماتی، و نیز هم‌ارزی ستونی به‌طریقی شبیه به‌طریقهٔ تعریف عمل سطری مقدماتی و هم‌ارزی سطری تعریف شود، هر ماتریس $m\times n$ هم‌ارز ستونی یك ماتریس «تحویل شدهٔ ستونی پلکانی» است. بعلاوه، هر عمل ستونی مقدماتی به‌شکل $A\to AE$ است که در آن $E$ یك ماتریس مقدماتی $n\times n$ است ـ و الی آخر.

## تمرین

۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $R$ که هم‌ارز سطری $A$ باشد، ونیز یك ماتریس $۳\times ۳$ معکوس‌پذیر $P$ بیابید که $R=PA$.

۲. تمرین ۱ را با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & i \\ ۱ & -۳ & -i \\ i & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

انجام دهید.

۳. در مورد هر یك از دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۴ & -۱ & ۲ \\ ۶ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

با به‌کاربردن اعمال سطری مقدماتی، معکوس‌پذیر بودن یا نبودن آنها را معلوم کنید؛ در صورت معکوس‌پذیر بودن، معکوس آنها را بیابید.

۴. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}.$$

به‌ازای کدام $X$ یك اسکالر $c$ وجود دارد به‌طوری که $AX=cX$؟

۵. معلوم کنید که ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر است یا نه و $A^{-1}$ را در صورت وجود بیابید.

۶. فرض کنید $A$ یك ماتریس ۱ × ۲، و $B$ ماتریسی ۲ × ۱ باشد. ثابت کنید که $C=AB$ معکوس‌پذیر نیست.

۷. فرض کنید $A$ یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) باشد. دوگزارهٔ زیر را ثابت کنید:
(الف) اگر $A$ معکوس‌پذیر باشد، و به‌ازای یك ماتریس $n\times n$ مانند $B$، $AB=0$، آنگاه $B=0$.
(ب) اگر $A$ معکوس‌پذیر نباشد، آنگاه ماتریسی $n\times n$ مانند $B$ وجود دارد که $AB=0$ ولی $B\neq 0$.

۸. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

با به‌کارگیری اعمال سطری مقدماتی ثابت کنید که $A$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $(ad-bc)\neq 0$.

۹. ماتریس $n\times n$ی مانند $A$ **بالا مثلثی** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای $i>j$، $A_{ij}=0$؛ یعنی، هرگاه همهٔ درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی آن ۰ باشند. ثابت کنید یك ماتریس (مربعی) بالا مثلثی معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن مخالف صفر باشند.

۱۰. تعمیم زیر از تمرین ۶ را ثابت کنید: اگر $A$ ماتریسی $m\times n$ و $B$ ماتریسی $n\times m$ باشد و $n<m$، آنگاه $AB$ معکوس‌پذیر نیست.

۱۱. فرض کنید $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد. نشان دهید که با تعدادی متناهی عمل سطری

و/یا ستونی مقدماتی می‌توان از $A$ به‌یك ماتریس $R$ رسید که هم «تحویل شدهٔ سطری پلکانی» وهم «تحویل شدهٔ ستونی پلکانی» باشد؛ یعنی، $R_{ij}=0$ هرگاه $i\neq j$، $R_{ii}=1$ به‌ازای $1\leqslant i\leqslant r$، و $R_{ii}=0$ هرگاه $i>r$. نشان دهید $R=PAQ$ که در آن $P$ و $Q$ بترتیب ماتریسهایی $m\times m$ و $n\times n$ معکوس‌پذیر هستند.

۱۲. نتیجهٔ مثال ۱۶ این مطلب را تداعی می‌کند که شاید ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر و معکوس آن $A^{-1}$ دارای درایه‌های صحیح باشد. آیا می‌توانید این مطلب را ثابت کنید؟

# ۲

# فضاهای برداری

## ۱.۲. فضاهای برداری

دربخشهای مختلف ریاضیات با مجموعه‌هایی روبرو می‌شویم که مطالعهٔ «ترکیبات خطی» عناصر آنها، هم بامعنی و هم جالب است. مثلا، هنگام مطالعهٔ معادلات خطی کاملا طبیعی به نظررسید که ترکیبات خطی سطرهای یک ماتریس را مورد توجه قراربدهیم. احتمال دارد که خواننده، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کرده ودرآنجا با ترکیبات خطی توابع روبروشده باشد؛ واگر درس معادلات دیفرانسیل را گرفته باشد، قطعاً این مفهوم را دیده است. همچنین، احتمالا خواننده بردارهای درفضای اقلیدسی سه بعدی، بویژه ترکیبات خطی چنین بردارهایی را تجربه کرده است.

به بیان نادقیق، جبر خطی آن شاخه از ریاضیات است که دربارهٔ خواص عام دستگاههایی جبری متشکل ازیک مجموعه همراه با مفهومی مناسب ازنوعی «ترکیب خطی» ازعناصرآن به بحث می‌پردازد. دراین بخش ما به تعریف شیئی ریاضی می‌پردازیم که بنا برتجربه مفیدترین تجرید ازاین نوع دستگاههای جبری است.

**تعریف.** یک **فضای برداری** (یا فضای خطی) متشکل است از:

۱. یک هیأت $F$ از اسکالرها؛

۲. یک مجموعهٔ $V$ از اشیائی به نام بردارها؛

۳. یک قاعده (یا عمل) به‌نام جمع برداری که به هر جفت ازبردارهای $\alpha$ و $\beta$ از

$V$ بردار $\alpha+\beta$ از $V$ راکه‌مجموع $\alpha$ و $\beta$ نامیده‌می‌شود وابسته می‌سازد با این شرایط که

(الف) جمع جابجایی است؛ یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$؛

(ب) جمع شرکت‌پذیر است؛ یعنی $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\alpha)$؛

(پ) بردار یکتای ۰ به نام بردار صفر در $V$ موجود است به طوری که به ازای هر $\alpha$ در $V$، $\alpha+0=\alpha$؛

(ت) به ازای هر بردار $\alpha$ در $V$، بردار یکتای $-\alpha$ در $V$ موجود است به‌طوری که $\alpha+(-\alpha)=0$؛

۴. یك قاعده (یا عمل) به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر $c$ از $F$ و هر بردار $\alpha$ از $V$ بردار $c\alpha$ در $V$ را که حاصل ضرب $c$ و $\alpha$ نامیده می‌شود وابسته سازد با این شرایط‌که

(الف) به ازای هر $\alpha$ در $V$، $1\alpha=\alpha$؛

(ب) $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$؛

(پ) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$؛

(ت) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

توجه به‌این نکته مهم است که طبق تعریف، یك فضای برداری شیئی است مرکب، متشکل ازیك هیأت، یك مجموعه ازبردارها، و دو عمل با خواص ویژهٔ معین. مجموعهٔ مفروضی ازبردارها می‌تواند بخشی‌ازچند فضای برداری متمایز باشد (ر. ك. مثال ۵ زیر). هرگاه هیچ امکان اشتباهی نباشد، فضای برداری را به طور ساده با $V$ نشان می‌دهیم، و هنگامی که مشخص کردن هیأت نیزلازم باشد، خواهیم گفت که V **فضایی برداری برروی هیأت** $F$ است. نام «بردار» عمدتاً به جهت سهولت به عناصر مجموعهٔ $V$ اطلاق می‌شود. منشأ این نامگذاری را می‌توان ازمثال ۱ که درزیرآمده است دریافت؛ اما، به این نام نباید بیش از اندازه اهمیت داد، زیرا چیزهای متنوعی که به عنوان بردار در $V$ قرار می‌گیرند ممکن است شباهت چندانی با هیچ‌یك ازمفاهیم بردارکه خواننده در ذهن دارد نداشته باشند. می‌کوشیم این تنوع را با چند مثال روشن کنیم؛ حین مطالعهٔ فضاهای برداری برتعداد این مثالها به طور قابل ملاحظه‌ای خواهیم افزود.

**مثال ۱. فضای $n$تایی $F^n$** . فرض‌کنیم $F$ هیأتی دلخواه‌و $V$ مجموعهٔ همهٔ $n$تایی‌های $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ازاسکالرهای $x_i$ در $F$ باشد. با فرض $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ و $y_i$ ها در $F$، مجموع $\alpha$ و $\beta$ با

$$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n) \qquad (۱-۲)$$

و حاصل‌ضرب اسکالر $c$ و بردار $\alpha$ با

$$c\alpha=(cx_1,\ cx_2,\ \cdots,\ cx_n) \qquad (۲-۲)$$

تعریف می‌شود. بررسی این حکم که جمع برداری و ضرب اسکالری اخیر درشرایط (۳) و (۴) صدق می‌کنند با استفاده از خواص مشابه جمع و ضرب عناصر $F$ آسان است.

**مثال ۲. فضای ماتریسهای $m\times n$** ، $F^{m\times n}$ . گیریم $F$ هیأتی دلخواه و $n$ و $m$ اعدادی صحیح ومثبت باشند. فرض کنیم $F^{m\times n}$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ بر روی هیأت $F$ باشد. مجموع دو بردار $A$ و $B$ از $F^{m\times n}$ با

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij} \qquad (۲\text{-}۳)$$

و حاصل‌ضرب اسکالر $c$ وماتریس $A$ با

$$(cA)_{ij}=cA_{ij} \qquad (۲\text{-}۴)$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که $F^{1\times n}=F^n$.

**مثال ۳. فضای توابع ازیك مجموعه به‌یك هیأت.** گیریم $F$ هیأتی دلخواه و $S$ مجموعه‌ای غیر تهی باشد. فرض کنیم $V$ مجموعهٔ همهٔ توابع ازمجموعهٔ $S$ درمجموعهٔ $F$ باشد. مجموع دو بردار $f$ و $g$ از $V$ بردار $f+g$ است؛ یعنی، تابعی از $S$ در $F$ است که با

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s) \qquad (۲\text{-}۵)$$

تعریف می‌شود. حاصل‌ضرب اسکالر $c$ و تابع $f$ ، تابع $cf$ است که با

$$(cf)(s)=cf(s) \qquad (۲\text{-}۶)$$

تعریف می‌شود. مثالهای قبل حالات خاصی از این مثال هستند. زیرا هر $n$ تایی ازعناصر $F$ ممکن است به عنوان تابعی ازمجموعهٔ $S$ متشکل ازاعداد صحیح ۱، ۲، $\ldots$، $n$ در $F$ محسوب شود. به طورمشابه، هرماتریس $m\times n$ برروی هیأت $F$ تابعی است ازمجموعهٔ $S$ متشکل ازجفت اعداد صحیح $(i,j)$ باشرایط $1\leqslant i\leqslant m$ و $1\leqslant j\leqslant n$، درهیأت $F$. حال برای این مثال، چگونگی بررسی صدق شرایط (۳) و (۴) توسط اعمال تعریف شده را نشان می‌دهیم. برای جمع برداری:

(الف) چون عمل جمع در $F$ جابجایی است، به ازای هر $s$ در $S$

$$f(s)+g(s)=g(s)+f(s)$$

و از این‌رو، دوتابع $f+g$ و $g+f$ یکی هستند.

(ب) چون عمل جمع در $F$ شرکت‌پذیر است، به ازای هر $s$ در $S$

$$f(s)+[g(s)+h(s)]=[f(s)+g(s)]+h(s)$$

وبنابراین، تابع $f+(g+h)$ همان تابع $(f+g)+h$ است.

(پ) برداریکتای صفر، همان تابع صفر است که به هرعنصر $S$ اسکالر ۰ از $F$ را تخصیص می‌دهد.

(ت) به ازای هر $f$ در $V$ ، $(-f)$ تابعی است که با

$$(-f)(s)=-f(s)$$

تعریف می‌شود.

اکنون خواننده می‌بایست به‌آسانی بتواند با برهانی شبیه به‌آنچه که درمورد جمع برداری آوردیم، نشان دهد که ضرب اسکالری درشرایط مذکور در (۴) صدق می‌کند.

**مثال۴. فضای توابع چند جمله‌ای برروی هیأت $F$.** فرض‌کنیم $F$ یك هیأت، و $V$ مجموعهٔ همهٔ توابع $f$ ، از $F$ در $F$ ، با قاعده‌ای به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n \qquad (۲\text{-}۷)$$

باشد. دراینجا $c_0$، $c_1$، $\cdots$ ، $c_n$ اسکالرهای ثابتی متعلق به $F$ (ومستقل از$x$) هستند. چنین تابعی یك **تابع چند جمله‌ای برروی** $F$ نامیده می‌شود. فرض‌کنیم جمع وضرب اسکالری طبق مثال۳ تعریف بشوند. دراینجا باید توجه داشت که اگر $f$ و $g$ دوتابع چندجمله‌ای و $c$ در $F$ باشد، آنگاه $f+g$ و $cf$ هم توابعی چندجمله‌ای هستند.

**مثال۵.** هیأت‌اعدادمختلط $C$ می‌تواند به عنوان فضایی برداری برروی هیأت‌اعداد حقیقی $R$ محسوب شود. درحالت‌کلی‌تر، فرض‌کنیم $F$ هیأت اعداد حقیقی باشد و $V$ مجموعهٔ $n$ تایی‌های $\alpha=(x_1, \ldots, x_n)$ که در آن $x_1$ ، $\cdots$ ، $x_n$ اعدادی مختلط هستند. جمع بردارها وضرب اسکالری را طبق (۲-۱) و (۲-۲) درمثال ۱ تعریف‌می‌کنیم. بدین طریق به یك فضای برداری برروی هیأت $R$ دست می‌یابیم که با فضاهای $C^n$ و $R^n$ اختلاف بسیاردارد.

اینك به استخراج چند حکم ساده که تقریباً بلافاصله از تعریف فضای برداری نتیجه می‌شوند، می‌پردازیم. اگر $c$ یك اسکالر و $0$ بردار صفر باشد، آنگاه بنابر ۳ (پ) و ۴ (پ)

$$c0=c(0+0)=c0+c0 .$$

با افزودن $-(c0)$ به‌دو طرف این تساوی و استفاده از ۳ (ت) داریم

$$c0=0 . \qquad (۲\text{-}۸)$$

به‌طور مشابه، به‌ازای اسکالر۰ و هر بردار $\alpha$ داریم

$$0\alpha=0 . \qquad (۲\text{-}۹)$$

اگر $c$ یك اسکالر غیر صفر و $\alpha$ برداری باشدکه $c\alpha=0$، آنگاه بنابر (۲-۸)، $c^{-1}(c\alpha)=0$. اما

$$c^{-1}(c\alpha)=(c^{-1}c)\alpha=1\alpha=\alpha$$

و ازاینجا، $\alpha=0$. بنابراین، می‌بینیم که اگر $c$ یك اسکالر و $\alpha$ یك بردار باشد و $c\alpha=0$، آنگاه یا $c$ اسکالر صفراست و یا $\alpha$ بردار صفر.

اگر $\alpha$ برداری دلخواه در $V$ باشد، آنگاه

$$0=0\alpha=(1-1)\alpha=1\alpha+(-1)\alpha=\alpha+(-1)\alpha$$

و ازآن نتیجه می‌شود که

$$(-1)\alpha=-\alpha. \qquad (10\text{-}2)$$

سرانجام، از خواص شرکت‌پذیری و جابجایی عمل جمع برداری نتیجه می‌شود که حاصل جمع چند بردار نیز مستقل از نحوهٔ ترکیب و شرکت این بردارها درجمع است. مثلاً، اگر $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\alpha_3$، و $\alpha_4$ بردارهایی در $V$ باشند، آنگاه

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)=[\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_3)]+\alpha_4$$

و چنین مجموعی می‌تواند بدون ابهام به‌صورت

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

نوشته شود.

**تعریف.** بردار $\beta$ از $V$ یك **ترکیب خطی** بردارهای $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_n$ از $V$ نامیده می‌شود، هرگاه اسکالرهایی چون $c_1$، $\cdots$، $c_n$ در $F$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i.$$

تعمیمهای دیگر خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری وخواص پخش‌پذیری ۴(پ) و ۴(ث) ضرب اسکالری، در ترکیبات خطی نیز به‌کار می‌روند:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}d_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}(c_i+d_i)\alpha_i$$

$$c\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}(cc_i)\alpha_i.$$

بخشهای معینی از جبر خطی بــا هندسه ارتباطی نزدیك دارد. خــود واژهٔ «فضا» مفهومی هندسی را تداعی می‌کند. همچنین است واژهٔ «بردار» نزد بیشترمردم. ضمن ادامهٔ مطالعهٔ فضاهای برداری، خواننده مشاهده خواهد کرد که بسیاری از اصطلاحات به‌طــور ضمنی معنی هندسی دارند. قبل ازآنکه این بخش مقدماتی درمــورد فضاهای برداری را

پایان دهیم، به‌بررسی رابطهٔ این فضاها با هندسه، تا آنجایی‌که اقلاً منشأ نام «فضای برداری» روشن شود، می‌پردازیم. این بررسی بحثی شهودی وخلاصه است.

فضای برداری $R^۳$ را درنظرمی‌گیریم. درهندسهٔ تحلیلی، ۳تایی‌های $(x_۱, x_۲, x_۳)$ از اعداد حقیقی با نقاط فضای سه‌بعدی اقلیدسی یکی گرفته می‌شوند. با این زمینه، یك بردار معمولاً به‌صورت یك پاره‌خط جهت‌دار $PQ$، ازیك نقطهٔ $P$ واقع در فضا به‌نقطهٔ دیگر $Q$ تعریف می‌شود. این مطلب به فرمولبندی دقیق ایدهٔ «پیکان» از نقطهٔ $P$ به‌نقطهٔ $Q$ می‌انجامد. از نحوهٔ به‌کار رفتن بردارها چنین برمی‌آید که بردار باید با طول و جهتش مشخص شود. بنابراین، دوپاره‌خط جهت‌دار با طول برابر وجهت یکسان را باید یکی گرفت.

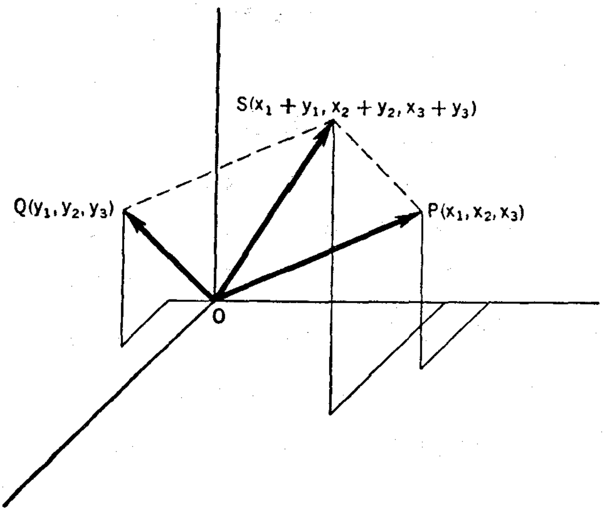
پاره‌خط جهت‌دار $PQ$، از نقطهٔ $P=(x_۱, x_۲, x_۳)$ به‌نقطهٔ $Q=(y_۱, y_۲, y_۳)$، و پاره‌خط جهت‌دار از مبدأ $(۰, ۰, ۰)=۰$ به نقطهٔ $(y_۱-x_۱, y_۲-x_۲, y_۳-x_۳)$ دارای یك طول و یك جهت هستند. بعلاوه، این تنها پاره‌خط جهت‌داری است که ازمبدأ آغاز می‌شود و دارای طول و جهتی مساوی $PQ$ است. بنابراین، اگر توافق شود که تنها بردارهایی را مطرح کنیم که از مبدأ آغاز می‌شوند، به‌هرطول و هرجهت داده شده‌ای دقیقاً یك بردار مربوط می‌شود.

بردار $OP$، از مبدأ به نقطهٔ $P=(x_۱, x_۲, x_۳)$، کاملاً با نقطهٔ $P$ معین می‌شود؛ ازاین‌رو، می‌توان این بردار را با نقطهٔ $P$ یکی دانست. به‌همین دلیل، در تعریف فضای برداری $R^۳$ بردارها را به‌طور ساده با سه‌تایی‌های $(x_۱, x_۲, x_۳)$ تعریف کردیم.

با مفروض بودن دو نقطه $P=(x_۱, x_۲, x_۳)$ و $Q=(y_۱, y_۲, y_۳)$ تعریف‌مجموع بردارهای $OP$ و $OQ$ را می‌توان به‌طور هندسی بیان کرد. اگراین بردارها موازی نباشند، آنگاه پاره‌خطهای $OP$ و $OQ$ یك صفحه را مشخص می‌کنند و این دوپاره‌خط دو ضلع متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که دراین صفحه قرار دارد (ر. ك. شکل ۱). یکی از قطرهای این‌متوازی‌الاضلاع از $O$ به‌یك‌نقطهٔ $S$ امتداد می‌یابد و مجموع دو بردار $OP$ و $OQ$ بنابر تعریف بردار $OS$ گرفته می‌شود. مختصات نقطهٔ $S$ عبارتنداز $(x_۱+y_۱, x_۲+y_۲, x_۳+y_۳)$؛ و ازاین‌رو، تعریف هندسی‌جمع برداری‌باتعریف جبری ارائه‌شده درمثال ۱ هم‌ارز است.

ضرب اسکالری تعبیرهندسی ساده‌تری دارد. اگر $c$ عددی حقیقی باشد، آنگاه‌حاصل ضرب $c$ و بردار $OP$، برداری است ازمبدأ با طولی $|c|$ برابر طول $OP$ و جهتی‌موافق با جهت $OP$ هرگاه $c > ۰$، و مخالف با جهت $OP$ هرگاه $c < ۰$. حاصل این ضرب اسکالری، دقیقاً بردار $OT$ است که درآن $T=(cx_۱, cx_۲, cx_۳)$؛ و بنابراین، با تعریف جبری ارائه شده برای $R^۳$ سازگار است.

ممکن است گاهی خواننده مفید بداندکه دربارهٔ فضاهای برداری «به‌طور هندسی بیندیشد»؛ بدین‌معنی‌که برای خود و به‌جهت تصور بهتر و نیز برانگیختن برخی ازایده‌ها به‌ترسیم شکل بپردازد. درواقع، او باید چنین کند؛ اما، هنگام رسم چنین تصاویری باید به‌خاطر داشته باشدکه چون برخورد ما با فضاهای برداری به‌صورت دستگاههای جبری




شکل ۱

است، تمام اثباتهایی هم‌که ارائه می‌کنیم طبیعتی جبری خواهند داشت.

## تمرین

۱. هرگاه $F$ یك هیأت باشد، تحقیق‌کنیدکـه $F^n$ (به‌صورتی‌کـه در مثال ۱ تعریف شد) فضایی برداری برروی هیأت $F$ است.

۲. هرگاه $V$ یك فضای برداری برروی هیأت $F$ باشد، به ازای همهٔ بردارهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ در $V$ رابطهٔ

$$(\alpha_۱+\alpha_۲)+(\alpha_۳+\alpha_۴)=[\alpha_۲+(\alpha_۳+\alpha_۱)]+\alpha_۴$$

برقرار است.

۳. اگر $C$ هیأت اعداد مختلط باشد، چه بردارهایی از $C^۳$ ترکیبی خطی از بـردارهای (۱ ,۰ ,۱ —)، (۱ ,۱ ,۰)، و (۱ ,۱ ,۱) هستند؟

۴. فرض کنید $V$ مجموعهٔ همهٔ جفتهای $(x, y)$ از اعداد حقیقی و $F$ هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا $V$ با دو عمل تعریف شدهٔ زیر

$$(x, y)+(x_1, y_1)=(x+x_1, y+y_1)$$
$$c(x, y)=(cx, y)$$

فضایی برداری برروی هیأت اعداد حقیقی هست؟

۵. روی $R^n$ دو عمل

$$\alpha\oplus\beta=\alpha-\beta$$
$$c\odot\alpha=-c\alpha$$

را تعریف می‌کنیم. اعمال سمت راست همان اعمال معمولی هستند. چه اصولی از فضاهای برداری توسط $(R^n, \oplus, \odot)$ برآورده می‌شوند؟

۶. فرض‌کنید $V$ مجموعهٔ همهٔ توابع (با مقدار) مختلط $f$ روی خط اعداد حقیقی بافرض

$$f(-t)=\overline{f(t)}$$

به‌ازای هر $t$ در $R$ باشد. دراینجا خط زبر نشانگر مزدوج عددی مختلط است. نشان دهیدکه $V$ با دو عمل

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$$
$$(cf)(t)=cf(t)$$

فضایی برداری برروی هیأت اعداد حقیقی است. تابعی در $V$ مثال بزنیدکه (بامقدار) حقیقی نباشد.

۷. فرض‌کنید $V$ مجموعهٔ جفتهای $(x, y)$ ازاعداد حقیقی و $F$ هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا $V$ با اعمال تعریف شدهٔ زیر

$$(x, y)+(x_1, y_1)=(x+x_1, 0)$$
$$c(x, y)=(cx, 0)$$

یك فضای برداری است؟

## ۲.۲. زیرفضاها

در این بخش به‌معرفی برخی از مفاهیم بنیادی مبحث فضاهای برداری می‌پردازیم.

**تعریف.** گیریم $V$ فضایی برداری بر روی هیأت $F$ باشد. یك **زیرفضای** $V$ عبارت است از یك زیر مجموعهٔ $W$ از $V$ که خود با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی $V$، یك فضای برداری برروی $F$ باشد.

بررسی مستقیم اصول فضاهای برداری نشان می‌دهد که زیرمجموعهٔ $W$ از $V$ یك زیرفضاست هرگاه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $W$ بردار $\alpha+\beta$ نیز در $W$ باشد؛ بردار $0$ در $W$ باشد؛ به‌ازای هر $\alpha$ در $W$ بردار $(-\alpha)$ در $W$ باشد؛ و بالاخره به‌ازای هر $\alpha$ در $W$ و هراسکالر $c$ بردار $c\alpha$ نیز در $W$ باشد. بررسی خواص جابجایی و شرکت‌پذیری جمع برداری و خواص ۴ (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) ضرب اسکالری لزومی ندارد؛ زیرا این خواص همان خواص اعمال روی $V$ هستند. هنوزهم امکان ساده‌تر کردن مطالب هست.

**قضیهٔ ۱.** یك زیرمجموعهٔ غیرتهی $W$ از $V$ زیرفضایی از $V$ است اگر و تنها اگر به‌ازای هردو بردار $\alpha$ و $\beta$ از $W$ و هر اسکالر $c$ از $F$ بردار $c\alpha+\beta$ در $W$ باشد.

اثبات. فرض کنیم $W$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی از $V$ باشدکه به‌ازای همهٔ بردارهای $\alpha$ و $\beta$ از $W$ و همهٔ اسکالرهای $c$ از $F$ بردار $c\alpha+\beta$ متعلق به $W$ باشد. چون $W$ غیرتهی است، برداری مانند $\rho$ در $W$ موجود است، و ازاین‌رو، $0=\rho+(-1)\rho$ به $W$ تعلق‌دارد. دراین صورت، اگر $\alpha$ برداری دلخواه از $W$ و $c$ اسکالری‌دلخواه باشد، بردار $c\alpha=c\alpha+0$ نیز در $W$ قراردارد. بخصوص، $(-1)\alpha=-\alpha$ هم در $W$ است. سرانجام، اگر $\alpha$ و $\beta$ در $W$ باشند، آنگاه $\alpha+\beta=1\alpha+\beta$ نیزدر $W$ است. بنابراین، $W$ یك زیرفضای $V$ است.

بعکس، اگر $W$ زیرفضایی از $V$، $\alpha$ و $\beta$ دو بردار از $W$، و $c$ یك اسکالر باشد، یقیناً $c\alpha+\beta$ در $W$ قرار دارد. □

بعضی ترجیح می‌دهندکه خاصیت $c\alpha+\beta$ از قضیهٔ ۱ را به‌عنوان تعریف یك‌زیر-فضا به‌کار برند، که البته با اصل آن اندکی تفاوت دارد. نکتهٔ مهم دراین است که اگر $W$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی از $V$ باشد و به‌ازای همهٔ $\alpha$ها و $\beta$های در $W$ و همهٔ اسکالرهای $c$ در $F$، بردار $c\alpha+\beta$ در $W$ قراربگیرد، آنگاه $W$ (با اعمالی که از $V$ به‌ارث‌می‌برد) یك فضای برداری تشکیل می‌دهد. این مطلب چندین مثال جدید از فضاهای برداری‌برای ما تدارك می‌بیند.

**مثال ۶.**

(الف) اگر $V$ فضای برداری دلخواهی باشد، آنگاه $V$ زیرفضایی از $V$ است؛ زیر-مجموعهٔ متشکل از بردارصفر تنها، زیرفضایی از $V$ است که **زیرفضای صفر** $V$ نامیده‌می‌شود.

(ب) در $F^n$، به‌ازای $n\geqslant 2$، مجموعهٔ همهٔ $n$ تایی‌های $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ با شرط $x_1=0$ یك زیرفضاست؛ حال آنکه، مجموعهٔ این $n$تایی‌ها با شرط $x_1=1+x_2$ یك زیرفضا نیست.

(پ) فضای توابع چندجمله‌ای برروی هیأت $F$، زیرفضایی از فضای همهٔ توابع از $F$ در $F$ است.

(ت) یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) $A$ برروی هیأت $F$ **متقارن** است هرگاه به‌ازای هر $i$ و $j$، $A_{ij}=A_{ji}$. ماتریسهای متقارن زیرفضایی ازفضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی

$F$ را تشکیل می‌دهند.

(ث) یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) $A$ برروی هیأت اعداد مختلط $C$ **هرمیتی** (یا **خودالحاقی**) است، هرگاه به‌ازای هر $j$ و $k$

$$A_{jk}=\overline{A_{kj}}\ .$$

در اینجا خط زبر نمایشگر مزدوج عددی مختلط است. یك ماتریس ۲ × ۲ هرمیتی‌است اگر و تنها اگر به‌شکل

$$\begin{bmatrix} z & x+iy \\ x-iy & \omega \end{bmatrix}$$

باشدکه درآن $x$، $y$، $z$، و $\omega$ اعدادی حقیقی‌اند. مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای هرمیتی، زیر-فضایی از فضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی $C$ نیست. زیرا، اگر $A$ هرمیتی باشد درایه‌های قطری آن $A_{11}$، $A_{22}$، ...، همگی حقیقی خواهند بود؛ اما، درحالت عمومی، درایه‌های قطری $iA$ حقیقی‌نیستند. ازطرف دیگر، بسادگی می‌توان تحقیق کردکه‌مجموعهٔ ماتریسهای هرمیتی مختلط $n\times n$ فضایی برداری برروی هیأت اعداد حقیقی $R$ (با اعمال معمولی) است.

**مثال ۷. فضای جواب یك دستگاه معادلات خطی همگن.** گیریم $A$ یك ماتریس $m\times n$ برروی هیأت $F$ باشد. در این صورت، مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times 1$ (ستونی) مانند $X$ برروی $F$ به‌طوری‌که $AX=0$، زیرفضایی از فضای همهٔ ماتریسهای $n\times 1$ برروی $F$ است. برای اثبات این موضوع، باید نشان دهیم وقتی‌که $AX=0$، $AY=0$، و $c$ اسکالری دلخواه از $F$ باشد، $A(cX+Y)=0$. این مطلب بیدرنگ از مطلب کلی زیر نتیجه می‌شود.

**لم.** اگر $A$ ماتریسی $m\times n$ برروی $F$ باشد، و $B$ و $C$ دو ماتریس $n\times p$ برروی $F$ باشند، آنگاه به‌ازای هراسکالر $d$ در $F$

$$A(dB+C)=d(AB)+AC. \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

**اثبات.**

$$\begin{aligned}[A(dB+C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(dB+C)_{kj} \\ &= \sum_k (dA_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj}) \\ &= d\sum_k A_{ik}B_{kj}+\sum_k A_{ik}C_{kj} \\ &= d(AB)_{ij}+(AC)_{ij} \\ &= [d(AB)+AC]_{ij}\,. \ \square\end{aligned}$$

به‌طورمشابه، می‌توان نشان داد که به‌شرط تعریف‌شدن حاصل‌جمعها و حاصل‌ضربهای ماتریسی، $(dB+C)A=d(BA)+CA$.

**قضیهٔ ۲.** گیریم $V$ فضایی برداری بر روی هیأت $F$ باشد. اشتراك هر دسته از زیرفضاهای $V$ زیرفضایی از $V$ است.

اثبات. فرض کنیم $\{W_a\}$ دسته‌ای از زیرفضاهای $V$، و $W=\bigcap\limits_a W_a$ اشتراك آنها باشد. توجه دارید که $W$ به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ عناصر متعلق به‌همهٔ $W_a$ها تعریف می‌شود (ر. ك. ضمیمه). چون هر $W_a$ زیرفضاست، شامل بردار صفرهم هست. بنابراین، بردارصفر در $W$ است، و از این‌رو $W$ غیرتهی است. گیریم $\alpha$ و $\beta$ دو بردار در $W$ و $c$ یك اسکالر باشد. بنابرتعریف $W$، هم $\alpha$ وهم $\beta$ به‌همهٔ $W_a$ها تعلق دارند، وچون هر $W_a$ زیرفضاست، بردار $(c\alpha+\beta)$ درهمهٔ $W_a$ها قرار دارد. بنابراین، $(c\alpha+\beta)$ نیز در $W$ است و بنابر قضیهٔ ۱، $W$ یك زیرفضای $V$ است. □

از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که اگر $S$ مجموعه‌ای دلخواه از بردارهای $V$ باشد، آنگاه کوچکترین زیرفضایی از $V$ که شامل $S$ باشد هم وجود دارد؛ یعنی زیرفضایی از $V$ وجود دارد که شامل $S$ است و خود مشمول هرزیرفضای دیگر دربردارندهٔ $S$.

**تعریف.** گیریم $S$ مجموعه‌ای از بردارهای فضای برداری $V$ باشد. **زیرفضای پدیدآمده توسط** $S$، بنابر تعریف، عبارت است ازاشتراك $W$ از همهٔ زیرفضاهای $V$ که شامل $S$ باشند. هنگامی که $S$ مجموعه‌ای متناهی ازبردارها باشد، یعنی $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$، $W$ **را زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ نیز می‌نامیم.

**قضیهٔ ۳.** زیرفضای پدید آمده توسط یك زیرمجموعهٔ غیرتهی $S$ از فضای برداری $V$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی بردارهای $S$.

اثبات. گیریم $W$ زیرفضای پدید آمده توسط $S$ باشد. دراین صورت، هرترکیب خطی

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$$

ازبردارهای $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\cdots$، $\alpha_m$ در $S$، مسلماً در $W$ است. بنابراین، $W$ شامل $L$،مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی بردارهای واقع در $S$، است. از طرف دیگر، مجموعهٔ $L$ شامل $S$ و غیرتهی است. اگر $\alpha$ و $\beta$ متعلق به $L$ باشند، آنگاه $\alpha$ یك ترکیب خطی

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m$$

از بردارهای $\alpha_i$ در $S$،و $\beta$ یك ترکیب خطی

$$\beta=y_1\beta_1+\cdots+y_n\beta_n$$

از بردارهای $\beta_j$ در $S$ است. حال، به‌ازای هراسکالر $c$

$$c\alpha+\beta=\sum_{i=1}^{m}(cx_i)\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}y_j\beta_j \cdot$$

از این‌رو، $c\alpha+\beta$ به $L$ تعلق دارد و $L$ يك زيرفضای $V$ است.

تا اینجا نشان داده‌ایم که $L$ زیرفضایی است از $V$ شامل $S$ و همچنین نشان داده‌ایم هرزیر فضایی که شامل $S$ باشد شامل $L$ نیزهست. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $L$ اشتراك همهٔ زیرفضاهای شامل $S$ است؛ یعنی $L$ زیرفضای پدید آمده توسط مجموعهٔ $S$ است. □

**تعریف.** اگر $S_1$، $S_2$، ...، $S_k$ زیرمجموعه‌هایی ازفضای برداری $V$ باشند، مجموعهٔ همهٔ حاصل‌جمعهای

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$$

از بردارهای $\alpha_i$ در $S_i$، مجموع زیرمجموعه‌های $S_1$، $S_2$، ...، $S_k$ نام دارد و با

$$S_1+S_2+\cdots+S_k$$

یا

$$\sum_{i=1}^{k}S_i$$

نشان داده می‌شود.

اگر $W_1$، $W_2$، ...، $W_k$ زیرفضاهایی از $V$ باشند، بسادگی دیده می‌شود که مجموع

$$W=W_1+W_2+\cdots+W_k$$

يك زيرفضای $V$ است که شامل هريك از زيرفضاهای $W_i$ است. همچنان‌که دراثبات قضیهٔ ۳ آمده است، از این مطلب نتیجه می‌شود که $W$ زیرفضای پدیدآمده توسط اجتماع $W_1$، $W_2$، ...، $W_k$ است.

**مثال ۸.** گیریم $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط باشد و

$$\alpha_1=(1, 2, 0, 3, 0)$$
$$\alpha_2=(0, 0, 1, 4, 0)$$
$$\alpha_3=(0, 0, 0, 0, 1).$$

بنابرقضیهٔ ۳ بردار $\alpha$ در زیرفضای $W$ پدیدآمده توسط $\alpha_1$، $\alpha_2$، و $\alpha_3$ از فضای $F^5$ قرار دارد اگر و تنها اگر اسکالرهایی مانند $c_1$، $c_2$، و $c_3$ در $F$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \cdot$$

از این‌رو، $W$ متشکل است از همهٔ بردارهای به‌صورت

$$\alpha = (c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$$

که در آن $c_1$، $c_2$، و $c_3$ اسکالرهایی دلخواه از $F$ می‌باشند. به‌عبارت دیگر، می‌توان $W$ را به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ ۵تایی‌های

$$\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

که در آن $x_i$ها در $F$ هستند و

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_4 = 3x_1 + 4x_3$$

توصیف کرد. بدین‌نحو $(-3, -6, 1, -5, 2)$ در $W$ قرار دارد، لیکن $(2, 4, 6, 7, 8)$ در $W$ نیست.

**مثال ۹.** گیریم $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط $C$ و $V$ فضای برداری همهٔ ماتریسهای $2 \times 2$ بر روی $F$ باشد. فرض کنیم $W_1$ زیرمجموعه‌ای است از $V$ متشکل از همهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن $x$، $y$ و $z$ اسکالرهای دلخواهی از $F$ هستند. سرانجام، فرض کنیم $W_2$ زیرفضایی از $V$ باشد متشکل از همهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

که در آن $x$ و $y$ اسکالرهای دلخواهی از $F$ هستند. $W_1$ و $W_2$ دو زیرفضا از $V$ هستند. همچنین

$$V = W_1 + W_2 \cdot$$

زیرا،

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

زیرفضای $W_1 \cap W_2$ متشکل از همهٔ ماتریسهای به‌صورت

www.riazisara.ir


$$\begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

است.

**مثال ۱۰.** گیریم $A$ ماتریسی $m\times n$ برروی هیأت $F$ باشد. **بردارهای سطری** ماتریس $A$ بردارهایی در $F^n$ هستند که با $\alpha_i=(A_{i۱}, \cdots, A_{in})$، $i=۱, ۲, \cdots, m$، به‌دست می‌آیند. زیرفضایی از $F^n$ که توسط بردارهای سطری $A$ پدیدمی‌آید **فضای سطری** ماتریس $A$ نامیده می‌شود. زیرفضایی که درمثال ۸ درنظر گرفته شد، فضای سطری ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

است. این زیرفضا، فضای سطری ماتریس

$$B=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۴ & -۸ & ۱ & -۸ & ۰ \end{vmatrix}$$

نیز هست.

**مثال ۱۱.** فرض‌کنیم $V$ فضای همهٔ توابع‌چندجمله‌ای برروی هیأت $F$ باشد. گیریم $S$ زیرمجموعه‌ای از $V$ متشکل از توابع چندجمله‌ای $f_۰$، $f_۱$، $f_۲$، $\cdots$ با تعریف

$$f_n(x)=x^n,\ \ n=۰, ۱, ۲, \cdots$$

باشد. در این صورت، $V$ زیرفضای پدیدآمده توسط مجموعهٔ $S$ است.

## تمرین

۱. کدامیك از مجموعه‌های زیرمتشکل از بردارهای $\alpha=(a_۱, \cdots, a_n)$ در $R^n$ زیرفضایی از $R^n$ $(n\geqslant ۳)$ است؟

(الف) مجموعهٔ همهٔ $\alpha$ها به‌طوری‌که $a_۱\geqslant ۰$؛

(ب) مجموعهٔ همهٔ $\alpha$ها با شرط $a_۱+۳a_۲=a_۳$؛

(پ) مجموعهٔ همهٔ $\alpha$ها به‌طوری‌که $a_۱^۲=a_۲$؛

(ت) مجموعهٔ همهٔ $\alpha$ها باشرط $a_۱a_۲=۰$؛

(ث) مجموعهٔ همهٔ $\alpha$ها به‌طوری‌که $a_۲$ گویا باشد.

۲. گیریم $V$ فضای برداری (حقیقی) همهٔ توابع $f$ از $R$ در $R$ باشد. کدامیك ازمجموعه‌های توابع زیر، زیرفضایی از $V$ است؟

(الف) همهٔ $f$هایی که برای آنها $f(x^2)=f(x)^2$؛
(ب) همهٔ $f$های با شرط $f(0)=f(1)$؛
(پ) همهٔ $f$هایی که برای آنها $f(3)=1+f(-5)$؛
(ت) همهٔ $f$های با شرط $f(-1)=0$؛
(ث) همهٔ $f$هایی که پیوسته هستند.

۳. آیا بردار $(3, -1, 0, -1)$ در زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $(2, -1, 3, 2)$، $(-1, 1, 1, -3)$، و $(1, 1, 9, -5)$ از فضای $R^4$ قرار دارد؟

۴. گیریم $W$ مجموعهٔ همهٔ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ها در $R^5$ باشد که در دستگاه

$$2x_1 - x_2 + \frac{4}{3} x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + \frac{2}{3} x_3 - x_5 = 0$$

$$9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0$$

صدق می‌کنند. مجموعه‌ای متشکل از چندبردار بیابید که $W$ را پدید آورد.

۵. فرض کنید $f$ یك هیأت و $n$ عدد صحیح مثبتی باشد $(n \geqslant 2)$. گیریم $V$ فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی $F$ باشد. کدامیك از مجموعه‌های زیرین از ماتریسهای $A$ در $V$ زیرفضایی از $V$ است؟

(الف) همهٔ ماتریسهای معکوس‌پذیر $A$؛
(ب) همهٔ ماتریسهای معکوس‌ناپذیر $A$؛
(پ) همهٔ $A$ها با شرط $AB=BA$؛ که در اینجا $B$ یك ماتریس ثابت در $V$ است؛
(ت) همهٔ ماتریسهای $A$ به‌طوری که $A^2=A$.

۶. (الف) ثابت کنید که زیرفضاهای $R^1$ فقط $R^1$ و زیرفضای صفرهستند.
(ب) ثابت کنید که هرزیرفضای $R^2$ یا خود $R^2$ است یا زیرفضای صفراست ویا متشکل از همهٔ مضربهای اسکالری یك بردار ثابت در $R^2$ است. (زیرفضای نوع آخر، به‌طور شهودی، خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد.)
(پ) آیا می‌توانید زیرفضاهای $R^3$ را توصیف کنید؟

۷. فرض کنید $W_1$ و $W_2$ دو زیرفضا ازیك فضای برداری $V$، و نیز اجتماع (دومجموعهٔ)

$W_1$ و $W_2$ یك زیرفضای آن باشد. ثابت کنید که یکی از دو زیرفضای $W_i$ شامل دیگری است.

۸. فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ توابع از $R$ در $R$ باشد. فرض کنید $V_e$ زیرمجموعهٔ توابع زوج باشد، یعنی توابعی مانند $f$ به قسمی که $f(-x)=f(x)$؛ و $V_o$ زیر مجموعهٔ توابع فردباشد، یعنی توابعی مانند $f$ به‌قسمی که $f(-x)=-f(x)$.

(الف) ثابت کنید $V_e$ و $V_o$ زیرفضاهای $V$ هستند؛

(ب) ثابت کنید $V_e+V_o=V$؛

(پ) ثابت کنید $V_e\cap V_o=\{0\}$.

۹. فرض کنید $W_1$ و $W_2$ دو زیرفضای یك فضای برداری $V$ با شرایط $W_1+W_2=V$ و $W_1\cap W_2=\{0\}$ باشند. ثابت کنید به‌ازای هر بردار $\alpha$ در $V$، برداریکتای $\alpha_1$ در $W_1$ و بردار یکتای $\alpha_2$ در $W_2$ وجود دارد به طوری که $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

## ۳.۲. پایه و بعد

اکنون، به امرمهم تخصیص بعد به فضاهای برداری معینی می‌پردازیم. هرچند معمولاً «بعد» را مقوله‌ای هندسی تلقی می‌کنیم، با این وجود باید تعریف جبری مناسبی برای بعد یك فضای برداری بیابیم. این مهم از طریق مفهوم پایه برای فضا انجام می‌گیرد.

**تعریف.** گیریم $V$ فضایی برداری برروی $F$ باشد. یك زیرمجموعهٔ $S$ از $V$ **وابسته خطی** (یا به طور ساده **وابسته**) نامیده می‌شود هرگاه بردارهایی متمایز مانند $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\cdots$، $\alpha_n$ در $S$ و اسکالرهایی مانند $c_1$، $c_2$، $\cdots$، $c_n$ که همگی صفرنباشند در $F$ یافت شود، به طوری‌که

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=0.$$

مجموعه‌ای که وابستهٔ خطی نباشد **مستقل خطی** (یا دارای استقلال خطی) نام دارد. اگر مجموعهٔ $S$ تنها شامل تعدادی متناهی بردار $\alpha_1،\alpha_2،\cdots،\alpha_n$ باشد، گاهی به جای اینکه بگوییم $S$ وابسته (یا مستقل) خطی است می‌گوییم $\alpha_1،\alpha_2،\cdots،\alpha_n$ وابسته (یا مستقل) خطی هستند.

نکات زیرپی‌آمدهای سادهٔ این تعریف هستند.

۱. هرمجموعه که شامل یك مجموعهٔ وابسته خطی باشد خود وابستهٔ خطی است.

۲. هرزیر مجموعهٔ یك مجموعهٔ مستقل خطی، مجموعه‌ای است مستقل خطی.

۳. هرمجموعه‌ای که شامل بردار $0$ باشد وابستهٔ خطی است؛ زیرا $1.0=0$.

۴. مجموعهٔ $S$ ازبردارها، مستقل خطی است اگر وتنها اگر هرزیرمجموعهٔ متناهی $S$ مستقل خطی باشد؛ یعنی، اگر وتنها اگر به ازای هرچند بردار متمایز $\alpha_1،\cdots،\alpha_n$ از

$S$ ، تساوی $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0$ ایجاب کند که همهٔ $c_i$ ها صفر هستند.

**تعریف.** گیریم $V$ فضایی برداری باشد. یك پایه برای $V$ مجموعه‌ای مستقل خطی ازبردارهای $V$ است که فضای $V$ را پدیدآورد. فضای $V$ دارای (یا با) بعد متناهی است هرگاه یك پایهٔ متناهی داشته باشد.

**مثال ۱۲.** فرض کنیم $F$ زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد. بردارهای

$$\alpha_1=(3,0,-3)$$
$$\alpha_2=(-1,1,2)$$
$$\alpha_3=(4,2,-2)$$
$$\alpha_4=(2,1,1)$$

از $F^3$ وابستهٔ خطی هستند؛ زیرا

$$2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+0\cdot\alpha_4=0.$$

بردارهای

$$\epsilon_1=(1,0,0)$$
$$\epsilon_2=(0,1,0)$$
$$\epsilon_3=(0,0,1)$$

مستقل خطی هستند.

**مثال ۱۳.** فرض کنیم $F$ یك هیأت و $S$ زیرمجموعه‌ای از $F^n$ متشکل از بردارهای $\epsilon_1،\epsilon_2،\cdots،\epsilon_n$ با تعریف

$$\epsilon_1=(1,0,0,\cdots,0)$$
$$\epsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\epsilon_n=(0,0,0,\cdots,1)$$

باشد. $x_1$ ، $x_2$ ، $\cdots$ ، $x_n$ را اسکالرهایی در $F$ می‌گیریم وقرار می‌دهیم

$$\alpha=x_1\epsilon_1+x_2\epsilon_2+\cdots+x_n\epsilon_n.$$

دراین صورت،

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n). \tag{۱۲-۲}$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\epsilon_1،\cdots،\epsilon_n$ فضای $F^n$ را پدید می‌آورند. چون $\alpha=0$ اگر و تنها اگر $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ ، بردارهای $\epsilon_1$، $\epsilon_2$،$\cdots$، $\epsilon_n$ مستقل خطی هستند.

درنتیجه، مجموعهٔ $S=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n\}$ پایه‌ای برای $F^n$ است. این پایهٔ خاص را پایه استاندهٔ $F^n$ می‌نامیم.

**مثال ۱۴.** گیریم $P$ یک ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیر بر روی هیأت $F$ باشد. دراینصورت، ستونهای $P$ ؛ یعنی، $P_1$، $P_2$، $\dots$، $P_n$ پایه‌ای برای فضاهای ماتریسهای ستونی $F^{n\times 1}$ تشکیل می‌دهند. دلیل این مطلب به شرح زیراست. اگر $X$ ماتریسی ستونی باشد، آنگاه

$$PX=x_1P_1+\dots+x_nP_n.$$

حال چون $PX=0$ تنها دارای جواب بدیهی $X=0$ است، نتیجه می گیریم که مجموعهٔ $\{P_1,\dots,P_n\}$ مستقل خطی است. اما، چرا این مجموعه $F^{n\times 1}$ را پدید می آورد؟ فرض کنیم $Y$ ماتریس ستونی دلخواهی باشد. اگربگیریم $X=P^{-1}Y$ ، آنگاه $Y=PX$ یا

$$Y=x_1P_1+\dots+x_nP_n.$$

ازاین‌رو، $\{P_1,\dots,P_n\}$ پایه‌ای برای $F^{n\times 1}$ است.

**مثال ۱۵.** گیریم $A$ ماتریسی $m\times n$ و $S$ فضای جواب دستگاه همگن $AX=0$ باشد (مثال ۷). فرض کنیم $R$ یک ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز با $A$ باشد. دراین‌صورت، $S$ فضای جواب دستگاه $RX=0$ نیزهست. اگر $R$ دارای $r$ سطر غیرصفر باشد، آنگاه دستگاه معادلات $RX=0$ بوضوح $r$ تا ازمجهولهای $x_1،\dots،x_n$ را برحسب $(n-r)$ مجهول باقیماندهٔ $x_j$ بیان می کند. فرض کنیم درایه‌های غیرصفر مقدم سطرهای غیرصفردر ستونهای $k_1،\dots،k_r$ قرار گیرند. اگر $J$ مجموعهٔ متشکل از $(n-r)$ نمایهٔ غیر از $k_1،\dots،k_r$ باشد:

$$J=\{1,\dots,n\}-\{k_1,\dots,k_r\}$$

آنگاه، دستگاه $RX=0$ به صورت

$$\begin{aligned} x_{k_1}+\sum_J c_{1j}x_j&=0\\ \vdots\qquad\vdots\quad&\quad\vdots\\ x_{k_r}+\sum_J c_{rj}x_j&=0 \end{aligned}$$

است که درآن $c_{ij}$ ها اسکالرهای معینی هستند. همهٔ جوابها با تخصیص مقادیری(دلخواه) به $x_j$ هایی که‌نمایهٔ $j$ آنها در $J$ قراردارد، وسپس محاسبهٔ مقادیر متناظر $x_{k_1}،\dots،x_{k_r}$ بـه دست می‌آیند. بـه ازای هـر $j$ در $J$ ، گیریم $E_j$ جوابی باشد کـه از قرار دادن $x_j=1$ و $x_i=0$ به‌ازای همهٔ $i$های دیگر واقع در $J$ ، به‌دست‌می‌آید. ادعا می کنیم که $(n-r)$ بردار $E_j$ ، $j$ در $J$ ، پایه‌ای برای فضای جواب تشکیل می‌دهند.

چون ماتریس ستونی $E_j$ در سطر $j$م دارای درایهٔ ۱ و در سطرهای نمایه‌گذاری‌شده توسط عناصر دیگر $J$ دارای درایهٔ صفر است، استدلال مثال۱۳ نشان می‌دهدکه مجموعهٔ این بردارها مستقل خطی است. به دلیل زیر، این مجموعه فضای جواب را پدید می‌آورد. اگرماتریس ستونی $T$ با درایه‌های $t_1, \ldots, t_n$ درفضای جواب باشد، ماتریس

$$N = \sum_J t_j E_j$$

نیز درفضای جواب قراردارد وجوابی است که به ازای هر $j$ در $J$، $x_j = t_j$. جوابی با این خاصیت، یکتاست؛ ازاین رو، $N = T$ و $T$ درفضای پدیدآمده توسط بردارهای $E_j$ قراردارد.

**مثال۱۶.** اکنون مثالی از یك پایهٔ نامتناهی می آوریم. گیریم $F$ زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط و $V$ فضای توابع چندجمله‌ای برروی $F$ باشد. یادآوری می کنیم که این توابع، توابعی از $F$ در $F$ هستندکه قاعده‌ای به‌صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

دارند. فرض کنیم $f_k(x) = x^k$ و $k = 0, 1, 2, \ldots$ مجموعهٔ (نامتناهی) $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ پایه‌ای برای $V$ است. این مجموعه بوضوح $V$ را پدید می‌آورد؛ زیرا تابع $f$ (بالا) عبارت است از

$$f = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n.$$

خواننده باید متوجه باشدکه این فرمول در واقع تکراری از تعریف تابع چند جمله‌ای است؛ یعنی، تابع $f$ از $F$ در $F$، یك تابع چند جمله‌ای است اگر و تنها اگر یك عدد صحیح $n$ و اسکالرهایی مانند $c_0, \ldots, c_n$ وجود داشته باشند به طوری که $f = c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n$. چرا این توابع مستقل‌اند؟ نشان دادن اینکه مجموعهٔ $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ مستقل خطی است به‌معنی نشان دادن این است که هر زیرمجموعهٔ متناهی آن مستقل خطی است. پس، کافی است نشان دهیم به‌ازای هر $n$ مجموعهٔ $\{f_0, \ldots, f_n\}$ مستقل خطی است. فرض کنیم

$$c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n = 0.$$

این بدان معنی است که به‌ازای هر $x$ در $F$

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0;$$

به‌بیان دیگر، هر $x$ در $F$ یك ریشهٔ چند جمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ است. فرض می کنیم خواننده بداندکه یك چند جمله‌ای از درجهٔ $n$ با ضرایب مختلط نمی‌تواند بیش از $n$ ریشهٔ متمایز داشته باشد. در این صورت، نتیجه می گیریم که $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

تا اینجا یك پایهٔ نامتناهی برای $V$ ارائه‌کرده‌ایم. آیا این بدان معنی است که $V$ دارای بعد متناهی نیست؟ در واقع این طور است؛ ولی، این نتیجه‌ای فوری از تعریف نیست؛ زیرا، تا جایی‌که ما می‌دانیم ممکن است $V$ دارای پایهٔ متناهی نیز باشد. این امکان بسادگی قابل رفع است. (در قضیهٔ بعد این مطلب را در حالت عمومی مرتفع می‌کنیم.) فرض کنیم تعدادی متناهی تابع چند جمله‌ای $g_1$، $\cdots$، $g_r$ داشته باشیم. مسلماً بین توانهایی از $x$ که در $g_1(x)$،$\cdots$،$g_r(x)$ (با ضریب غیرصفر) ظاهرمی‌شوند، بزرگترینی وجود دارد. اگر این توان $k$ باشد، به‌طور قطع $f_{k+1}(x)=x^{k+1}$ درپدید‌آمدهٔ خطی $g_1$،$\cdots$،$g_r$ قرار ندارد. بنابراین، $V$ با بعد متناهی نیست.

اینك بپردازیم به‌آخرین نکته در مورد این مثال. پایه‌های نامتناهی ربطی به «ترکیبات خطی نامتناهی» ندارند. خواننده‌ای‌که قویاً احساس‌کند بین رشتهٔ توانی

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

و این مثال ربطی وجود دارد، بهتر است مجدداً و با دقت این مثال را مطالعه‌کند. اگر این توصیه‌گشایشی ایجاد نکرد بهتر است از این پس در پی محدودکردن توجه خود به فضاهای با بعد متناهی باشد.

**قضیهٔ ۴.** فرض کنید $V$ فضای برداری پدیدآمده توسط مجموعهٔ متناهی متشکل از بردارهای $\beta_1$، $\beta_2$، $\cdots$، $\beta_m$ باشد. در این صورت، هر مجموعهٔ مستقل از بردارهای $V$ متناهی است و بیش از $m$ عنصر ندارد.

اثبات. برای اثبات قضیه‌کافی است نشان دهیم‌که هر زیر مجموعهٔ $S$ از $V$ که شامل بیش از $m$ بردار باشد، وابستهٔ خطی است. گیریم $S$ چنین مجموعه‌ای باشد. پس، در $S$، $n$ بردار متمایز $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\cdots$، $\alpha_n$ با شرط $n>m$ وجود دارد. چون $\beta_1$،$\cdots$،$\beta_m$ فضای $V$ را پدید می‌آورند، اسکالرهایی مانند $A_{ij}$ در $F$ یافت می‌شوند به‌طوری که

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i.$$

به‌ازای هر $n$ اسکالر دلخواه $x_1$، $x_2$، $\cdots$، $x_n$ داریم:

$$\begin{aligned} x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n &= \sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (A_{ij}x_j)\beta_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\Big)\beta_i. \end{aligned}$$

چون $n>m$، قضیهٔ ۶ از فصل ۱ ایجاب می‌کند که اسکالرهایی مانند $x_1$، $x_2$، ...، $x_n$ که همگی ۰ نیستند، وجود داشته باشند به‌طوری که

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

از این‌رو، $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$. این نشان می‌دهد که مجموعهٔ $S$ وابستهٔ خطی است. □

**نتیجه ۱.** اگر $V$ یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، آنگاه هر دو پایه از $V$ به‌تعداد مساوی (و متناهی) عضو دارند.

اثبات. چون $V$ با بعد متناهی است، دارای یک پایهٔ متناهی

$$\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m\}$$

است. بنابر قضیهٔ ۴، هر پایهٔ $V$، متناهی است و بیش از $m$ عضو ندارد. پس، اگر $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ یک پایه باشد، آنگاه $n \leqslant m$. با برهانی مشابه، $n \geqslant m$ و بنابراین، $m=n$. □

این نتیجه به‌ما اجازه می‌دهد که **بعد** یک فضای برداری با بعد متناهی را به‌عنوان تعداد اعضای هر یک از پایه‌های آن تعریف کنیم. بعد یک فضای برداری با بعد متناهی $V$ را با $\dim V$ یا بعد$(V)$ نشان می‌دهیم. بنابراین مطلب قضیهٔ ۴ را به‌صورت زیر بازگو می‌کنیم.

**نتیجهٔ ۲.** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، و بعد $(V)=n$. در این صورت

(الف) هر زیر مجموعهٔ $V$ که شامل بیش از $n$ بردار باشد وابستهٔ خطی است.

(ب) هیچ زیر مجموعه‌ای از $V$ که کمتر از $n$ بردار داشته باشد نمی‌تواند $V$ را پدید آورد.

**مثال ۱۷.** اگر $F$ یک هیأت باشد، بعد $F^n$ برابر $n$ است؛ زیرا، پایهٔ استاندهٔ $F^n$ شامل $n$ بردار است. بعد فضای ماتریسی $F^{m\times m}$ برابر $mn$ است. این مطلب در مقایسه با حالت $F^n$ باید روشن باشد، چراکه $mn$ ماتریسی که در مکان $i, j$ خود درایهٔ ۱ و در مکانهای دیگر درایهٔ صفر دارند، تشکیل پایه‌ای برای $F^{m\times n}$ می‌دهند. اگر $A$ ماتریسی $m\times n$ باشد، آنگاه بعد فضای جواب $A$ برابر $n-r$ است؛ که در آن $r$ تعداد سطرهای غیر صفر یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است که هم‌ارز سطری $A$ باشد. به‌مثال ۱۵ رجوع شود.

اگر $V$ فضای برداری دلخواهی **برروی** $F$ باشد زیرفضای صفر $V$ توسط بردار ۰

پدید می‌آید، ولی مجموعهٔ $\{0\}$ یك پایه نیست ، زیرا وابستهٔ خطی است. بدین دلیل، توافق می‌کنیم که زیرفضای صفر دارای بعد ۰ باشد. همچنین با اثبات این مطلب که مجموعهٔ تهی یك پایه برای زیرفضای صفراست، می‌توانیم به‌همان نتیجه برسیم. مجموعهٔ تهی،فضای $\{0\}$ را پدید می‌آورد؛ زیرا اشتراك همهٔ زیرفضاهای شامل مجموعهٔ تهی برابر $\{0\}$ است، و بعلاوه مجموعهٔ تهی مستقل خطی است، چرا که شامل هیچ برداری نیست.

**لم.** فرض کنیم $S$ یك زیر مجموعهٔ مستقل خطی از فضای برداری $V$ باشد و بردار $\beta$ از $V$ در زیرفضای پدیدآمده توسط $S$ نباشد. دراین صورت، مجموعهٔ حاصل از الحاق $\beta$ به $S$ مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ بردارهای متمایزی از $S$ باشند و

$$C_1\alpha_1+\cdots C_m\alpha_m+b\beta=0$$

آنگاه $b=0$؛ زیرا در غیر این صورت

$$\beta=\left(-\frac{c_1}{b}\right)\alpha_1+\cdots+\left(-\frac{c_m}{b}\right)\alpha_m.$$

و $\beta$ درزیرفضای پدیدآمده توسط $S$ قرارمی‌گیرد. ازاین‌رو، $c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m=0$ و چون $S$ مستقل خطی است همهٔ $c_i$ها صفرند. □

**قضیهٔ۵.** اگر $W$ زیر فضایی از یك فضای با بعد متناهی $V$ باشد ، هر زیر مجموعهٔ مستقل خطی از $W$ متناهی است و قسمتی از یك پایهٔ (متناهی) $W$ است.

اثبات.فرض کنیم $S_0$ یك زیرمجموعهٔ‌مستقل خطی $W$ باشد. اگرزیرمجموعهٔ مستقل خطی $S$ از $W$ شامل $S_0$ باشد، آنگاه $S$ نیز یك زیر مجموعهٔ مستقل خطی $V$ است؛ حال چون $V$ با بعد متناهی است، $S$ شامل بیش از $\dim V$ عنصر نیست.

به‌طریق زیر، $S_0$ را به‌پایه‌ای برای $W$ گسترش می‌دهیم. اگر $S_0$ فضای $W$ را پدیدآورد، آنگاه $S_0$ یك پایهٔ $W$ است وکار تمام است. هرگاه $S_0$ فضای $W$ را پدید نیاورد، لم قبل را برای یافتن یك بردار $\beta_1$ در $W$ به‌طوری‌که مجموعهٔ $S_1=S_0U\{\beta_1\}$ مستقل خطی باشد به‌کار می‌گیریم. اگر $S_1$ فضای $W$ را پدیدآورد، مراد حاصل است. درغیراین‌صورت،لم‌را برای‌دست‌یافتن به‌یك بردار $\beta_2$ در $W$ به‌طوری‌که $S_2=S_1U\{\beta_2\}$ مستقل خطی باشد به‌کارمی‌بندیم. اگر به‌همین‌طریق ادامه دهیم، آنگاه (طی حداکثر $\dim V$ مرحله) به‌مجموعهٔ

$$S_m=S_0U\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$$

می‌رسیم که پایه‌ای برای $W$ است. □

**نتیجهٔ ۱.** اگر $W$ زیرفضایی سره از فضای برداری $V$ با بعد متناهی باشد، آنگاه

$W$ با بعد متناهی است و $\dim W < \dim V$.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم $W$ شامل بردار $\alpha \neq 0$ باشد. بنابر قضیهٔ ۵ و اثبات آن، پایه‌ای برای $W$ شامل $\alpha$ وجود داردکه حاوی بیش از $\dim V$ عنصر نیست؛ از این‌رو، $W$ با بعد متناهی است و $\dim W \leqslant \dim V$ . چون $W$ زیرفضای سره‌ای از $V$ است، یك بردار $\beta$ در $V$ وجود داردکه در $W$ نیست. با الحاق $\beta$ به‌هر پایهٔ $W$، یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی از $V$ به‌دست می‌آوریم. پس، $\dim W < \dim V$. □

**نتیجهٔ ۲.** در هرفضای برداری بـا بعد متناهی، هرمجموعهٔ غیرتهی مستقل خطی از بردارها بخشی از یك پایه است.

**نتیجهٔ ۳.** فرض کنیم $A$ ماتریسی $n \times n$ برروی هیأت $F$ باشد و بردارهای سطری $A$ یك مجموعه مستقل خطی ازبردارهای $F^n$ را تشکیل دهند. دراین صورت، $A$ معکوس‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\cdots$ ، $\alpha_n$ بردارهای سطری $A$ و $W$ زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\cdots$ ، $\alpha_n$ ازفضای $F^n$ باشد. چون $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\cdots$ ، $\alpha_n$ مستقل‌هستند، بعد $W$ برابر $n$ است. حال، نتیجهٔ ۱ نشان می‌دهد که $W = F^n$، از این‌رو، در $F$ اسکالرهایی چون $B_{ij}$ وجود دارند که

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

در اینجا $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$ پـایـه استاندهٔ $F^n$ است. از این‌رو، بـرای ماتریس $B$ با درایه‌های $B_{ij}$ داریم

$$BA = I. \ \square$$

**قضیهٔ ۶.** اگر $W_1$ و $W_2$ دو زیرفضای با بعد متناهی از فضای برداری $V$ باشند، آنگاه $W_1 + W_2$ با بعد متناهی است و

$$\text{بعد}\,(W_1 + W_2) + \text{بعد}\,(W_1 \cap W_2) = \text{بعد}\,(W_2) + \text{بعد}\,(W_1).$$

اثبات. بنابـرقضیهٔ ۵ و نتیجه‌هـای آن، فضـای $W_1 \cap W_2$ یـك پایـهٔ متناهـی $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ داردکه خود بخشی از یك پایهٔ

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$$

برای $W_1$ و نیز بخشی از یك پایهٔ

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$$

برای $W_2$ است. زیرفضای $W_1 + W_2$ توسط بردارهای

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \quad \beta_1, \cdots, \beta_m, \quad \gamma_1, \cdots, \gamma_n$$

پدید می‌آید و این بردارها یك مجموعهٔ مستقل خطی تشکیل می‌دهند. زیرا، فرض‌کنیم

$$\Sigma x_i\alpha_i+\Sigma y_j\beta_j+\Sigma z_r\gamma_r=0.$$

آنگاه،

$$-\Sigma z_r\gamma_r=\Sigma x_i\alpha_i+\Sigma y_j\beta_j$$

که نشان می‌دهد $\Sigma z_r\gamma_r$ به $W_1$ تعلق دارد. چون $\Sigma z_r\gamma_r$ متعلق به $W_2$ نیز هست، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای اسکالرهای معین $c_1$، $\cdots$، $c_k$،

$$\Sigma z_r\gamma_r=\Sigma c_i\alpha_i .$$

چون مجموعهٔ

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$$

مستقل است، هریك از اسکالرهای $z_r$ برابر صفر است. بنابراین،

$$\Sigma x_i\alpha_i+\Sigma y_j\beta_j=0$$

وچون

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$$

نیز مجموعه‌ای مستقل است، هر $x_i$ و نیز هر $y_j$ برابر صفر است. از این‌رو،

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$$

پایه‌ای برای $W_1+W_2$ است. سرانجام

$$\begin{aligned}\text{بعد}\,(W_1)+\text{بعد}\,(W_2)&=(k+m)+(k+n)\\&=k+(m+k+n)\\&=\text{بعد}\,(W_1\cap W_2)+\text{بعد}\,(W_1+W_2).\ \square\end{aligned}$$

این بخش را با تذکری دربارهٔ استقلال و وابستگی خطی به‌پایان می‌بریم. این مفاهیم را ما برای مجموعه‌ای از بردارها تعریف‌کردیم. لازم است‌که آنها را برای دنباله‌های متناهی ($n$تایی‌های مرتب) نیز تعریف‌کنیم. گوییم بردارهای $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_n$ **وابستهٔ خطی** هستند هرگاه اسکالرهایی مانند $c_1$، $\cdots$، $c_n$، که همگی $0$ نباشند، یافت شوند به‌طوری که $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0$. کلاً این اصطلاح چنان طبیعی به‌نظر می‌رسدکه خواننده ممکن است گمان کندکه تابه‌حال نیز آن را به‌کار برده است. تفاوت بین دنبالهٔ متناهی $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$، و مجموعهٔ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ چیست؟ دو تفاوت هست، یکی همانندی و دیگری ترتیب.

هرگاه مجموعهٔ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ مورد بحث باشد، معمولاً فرض براین است که هیچ‌دوبرداری دربین $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\ldots$، $\alpha_n$ یکی نیستند. درحالی‌که دردنبالهٔ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ممکن‌است همهٔ $\alpha_i$ها یکی باشند. اگربه‌ازای $i \neq j$، $\alpha_i = \alpha_j$، آنگاه دنبالهٔ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ وابستهٔ خطی است:

$$\alpha_i + (-1)\alpha_j = 0 .$$

از این‌رو، اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ مستقل خطی باشند، متمایز نیز هستند و می‌توانیم دربارهٔ مجموعهٔ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ صحبت کنیم و مطمئن باشیم که این مجموعه دارای $n$ بردار است. در این حالت مسلماً هیچ‌گونه ابهامی در بحث پایه و بعد وجود نخواهد داشت. بعد یك فضای $V$ با بعد متناهی بزرگترین $n$ ی است که یك $n$تایی از بردارهای $V$ مستقل خطی باشد ــ وغیره. خواننده‌ای‌که فکر کند مطالب این بند جز هیاهو چیزی نیست، خوب است از خود سؤال کند که آیا دوبردار

$$\alpha_1 = (e^{\pi/2}, 1)$$
$$\alpha_2 = (\sqrt[3]{110}, 1)$$

در $R^2$ مستقل خطی هستند یا نه.

عناصر یك دنباله به‌ترتیب معینی شماره‌گذاری می‌شوند. درحالی‌که یك مجموعه دسته‌ای است از اشیاء بدون هیچ‌گونه آرایش و ترتیب خاص. البته، برای توصیف یك مجموعه باید اعضای آن را فهرست‌کنیم و این امرنیاز به‌اتخاذ یك ترتیب دارد. ولی، ترتیب، جزئی از مجموعه نیست. مجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{4, 3, 2, 1\}$ یکی هستند، درحالی‌که دنبالهٔ متناهی ۱، ۲، ۳، ۴ با دنبالهٔ ۴، ۳، ۲، ۱ کاملاً متفاوت است. جنبهٔ ترتیب دنباله تأثیری برمفاهیم استقلال، وابستگی، وغیره ندارد، زیرا وابستگی (آن‌طورکه تعریف شد) متأثر از ترتیب نیست. دنبالهٔ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ وابسته است اگرو تنها اگر دنبالهٔ $\alpha_n$، $\ldots$، $\alpha_1$ وابسته باشد. دربخش بعدی، ترتیب اهمیت خاصی خواهد داشت.

## تمرین

۱. اگر دوبردار وابستهٔ‌خطی باشند، ثابت‌کنید یکی از آنها مضرب اسکالری دیگری‌است.

۲. آیا بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, 4), \qquad \alpha_2 = (2, -1, -5, 2)$$
$$\alpha_3 = (1, -1, -4, 0), \qquad \alpha_4 = (2, 1, 1, 6)$$

در $R^4$ مستقل خطی هستند؟

۳. پایه‌ای برای زیرفضایی از $R^4$ که توسط چهار بردار تمرین ۲ پدید می‌آید بیابید.

۴. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1=(1,\ 0,\ -1),\quad \alpha_2=(1,\ 2,\ 1),\quad \alpha_3=(0,\ -3,\ 2)$$

پایه‌ای برای $R^3$ تشکیل می‌دهند. هریك از بردارهای پایهٔ استانده را به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\alpha_1$، $\alpha_2$، و $\alpha_3$ بیان کنید.

۵. سه بردار وابستهٔ خطی در $R^3$ بیابید که هرجفت از آنها مستقل خطی باشند.

۶. فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ برروی هیأت $F$ باشد. با یافتن پایه‌ای برای $V$ که ۴ عنصر داشته باشد، ثابت کنید $V$ چهار بعدی است.

۷. فرض کنید $V$ فضای برداری تمرین ۶، $W_1$ مجموعهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}$$

و $W_2$ مجموعهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}$$

باشند.

(الف) ثابت کنید $W_1$ و $W_2$ زیرفضاهای $V$ هستند.

(ب) ابعاد $W_1$، $W_1+W_2$، و $W_1\cap W_2$ را بیابید.

۸. مجدداً فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای ۲ × ۲ برروی هیأت $F$ باشد. پایه‌ای چون $\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$ برای $V$ بیابید به‌طوری که به‌ازای هر $j$، $A_j^2=A_j$.

۹. فرض کنید $V$ فضایی برداری برروی یك زیرهیأت $F$ از اعداد مختلط باشد. فرض کنید بردارهای $\alpha$، $\beta$، و $\gamma$ در $V$ مستقل خطی باشند. ثابت کنید $(\alpha+\beta)$، $(\beta+\gamma)$، و $(\gamma+\alpha)$ دارای استقلال خطی‌اند.

۱۰. فرض کنید $V$ یك فضای برداری برروی هیأت $F$ باشد و تعدادی متناهی بردار چون $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ در $V$ این فضا را پدید آورند. ثابت کنید $V$ با بعد متناهی است.

۱۱. فرض کنید $V$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ مانند $A$ با درایه‌های مختلط باشد که در شرط $A_{11}+A_{22}=0$ صدق می‌کنند.

(الف) نشان دهید $V$ با اعمال معمولی جمع ماتریسی و ضرب ماتریس در اسکالر،

فضایی است برداری برروی هیأت اعداد حقیقی.

(ب) پایه‌ای برای این فضای برداری بیابید.

(پ) فرض کنید $W$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $A$ در $V$ با شرط $A_{21} = -\overline{A_{12}}$ باشد (خط زبر نمایشگرمزدوج عددی مختلط است). ثابت کنید $W$ یك زیرفضای $V$ است و پایه‌ای هم برای $W$ بیابید.

۱۲. با یافتن پایه‌ای برای فضای همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی هیأت $F$، ثابت کنید بعد این فضا $mn$ است.

۱۳. تمرین ۹ را درحالتی که $V$ یك فضای برداری برروی هیأت دوعنصری توصیف‌شدهٔ در تمرین ۵ بخش ۱.۰۱ باشد، مورد بحث قراردهید.

۱۴. فرض کنید $V$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. $V$ با اعمال معمولی را به‌عنوان فضایی برداری برروی هیأت اعدادگویا محسوب وثابت کنید این فضای برداری بعدمتناهی ندارد.

## ۴.۲. مختصات

یکی از جنبه‌های مفید یك پایهٔ $\mathcal{B}$ در فضای $n$بعدی $V$ این است که اساساً به‌ما امکان می‌دهد در $V$، نظیر «مختصات طبیعی» $x_i$ از یك بردار $\alpha=(x_1, \cdots, x_n)$ در فضای $F^n$، به‌معرفی مختصات بپردازیم. در این طرح، مختصات بردار $\alpha$ از $V$ نسبت به‌پایه $\mathcal{B}$ اسکالرهایی خواهند بود که در بیان $\alpha$ به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه به‌کار می‌روند. از این‌رو، علاقه‌مندیم که مختصات طبیعی بردار $\alpha$ در $F^n$ را به‌عنوان مختصاتی که توسط $\alpha$ وپایه استاندهٔ $F^n$ تعریف می‌شوند، محسوب کنیم. اما، در پذیرش این‌دیدگاه باید دقت‌کافی به‌عمل آوریم. اگر

$$\alpha=(x_1, \cdots, x_n)=\sum x_i\epsilon_i$$

و $\mathcal{B}$ پایهٔ استاندهٔ $F^n$ باشد، دقیقاً چگونه مختصات بردار $\alpha$ توسط $\mathcal{B}$ و $\alpha$ تعیین می‌شوند؟ یك راه پاسخ دادن به‌این سؤال چنین است. هربردار مفروض $\alpha$ عبارت یکتایی به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایهٔ استانده دارد، و $i$ مین مختص $x_i$ از $\alpha$ ضریب $\epsilon_i$ دراین عبارت است. ازاین‌جهت می‌توانیم بگوییم $i$مین مختص کدام است. زیرا، ترتیبی«طبیعی» برای بردارهای پایهٔ استانده وجود دارد؛ یعنی قاعده‌ای دردست هست برای تعیین اینکه در پایه، کدام «اولین» بردار است، کدام «دومین»، والی آخر. اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ دلخواهی ازفضای $n$بعدی $V$ باشد، احتمالاً ترتیبی طبیعی برای بردارهای $\mathcal{B}$ نداریم، و از این‌رو، قبل از آنکه بتوانیم «$i$مین مختص $\alpha$ نسبت به $\mathcal{B}$» را تعریف کنیم، ضروری است ترتیبی برایـن بردارها تحمیل کنیم. به‌تعبیر دیگر، مختصات نسبت به‌دنبالهٔ بردارها و نه‌مجموعهٔ **بردارها**

تعریف می‌شوند.

**تعریف.** اگر $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی باشد ، یـك **پایهٔ مرتب** برای $V$ دنباله‌ای متناهی از بردارهای مستقل خطی است‌که $V$ را پدید آورند.

اگردنبالهٔ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ است. در واقع، پایهٔ مرتب مجموعه‌ای است همراه بـا ترتیبی معین. با مختصر سوءاستفاده از علامت‌گذاری، همهٔ این مطالب را با ذکر این‌که

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای $V$ است، خلاصه می‌کنیم.

حال فرض‌کنیم $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی $F$ و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد. به ازای هر $\alpha$ در $V$، $n$تایی یکتایی چون $(x_1, \cdots, x_n)$ از اسکالرها وجود داردکه

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \ .$$

این $n$تایی یکتاست، زیرا اگر همچنین داشته باشیم

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} z_i \alpha_i$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)\alpha_i = 0$$

و استقلال خطی بردارهای $\alpha_i$ ایجاب می‌کندکه به‌ازای هر $i$، $x_i - z_i = 0$. $x_i$ را، **$i$امین مختص $\alpha$ نسبت به‌پایهٔ مرتب**

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

می‌نامیم. اگر

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i$$

آنگاه

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\alpha_i$$

و بنابراین، $i$امین مختص $(\alpha+\beta)$ نسبت به‌این پایهٔ مرتب $(x_i+y_i)$ است. به‌طورمشابه، $i$امین مختص $(c\alpha)$ برابر $cx_i$ است. همچنین، روشن است که هر $n$تایی $(x_1, \cdots, x_n)$ در $F^n$ عبارت است از $n$تایی مختصات برداری در $V$، یعنی بردار

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \cdot$$

به‌طور خلاصه، هرپایهٔ مرتب برای $V$ تناظری یك به‌یك

$$\alpha \rightarrow (x_1, \cdots, x_n)$$

بین مجموعهٔ همهٔ بردارهای $V$ و مجموعهٔ همهٔ $n$ تاییهای $F^n$ برقرار می‌سازد. این تناظر دارای این خاصیت است که متناظر $(\alpha+\beta)$ همان حاصل‌جمع متناظرهای دو بردار $\alpha$ و $\beta$ در $F^n$ است، وهمچنین متناظر $(c\alpha)$ برابراست با حاصل‌ضرب اسکالر $c$ و متناظر بردار $\alpha$ در $F^n$.

دراین مرحله، ممکن است این سؤال مطرح شودکه چرا صرفاً پایهٔ مرتبی برای $V$ انتخاب نمی‌کنیم تا هربردار $V$ را به‌وسیلهٔ $n$تایی مختصات متناظرش توصیف نماییم؛ چراکه دراین صورت از راحتی‌کار با $n$تاییها برخوردار هستیم. این امر به‌دو دلیل نقض غرض خواهد بود. اولاً، همان‌طورکه تعریف اصل موضوعی فضاهای برداری نشان می‌دهد، سعی ما این است که فضاهای برداری را به‌عنوان دستگاههای جبری مجرد بررسی کنیم. ثانیاً، حتی درآن حالاتی که مختصات را به‌کار می‌بریم، نتایج مهم از توانایی ما در تغییر دستگاه مختصات؛ یعنی، در تغییر پایهٔ مرتب، به‌دست می‌آیند.

اغلب، راحت‌تر است که به جای $n$تایی مختصات $(x_1, \cdots, x_n)$ از **ماتریس مختصات** $\alpha$ نسبت به پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

استفاده‌کنیم. برای نمایاندن وابستگی این ماتریس مختصات به‌پایه، علامت

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

را برای ماتریس مختصات بردار $\alpha$ نسبت‌به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ به‌کار خواهیم برد. این نماد، در مواردی نظیراین پرسش که درصورت تغییرپایهٔ مرتبی به‌پایهٔ مرتب دیگر چه تغییری در مختصات برداری چون $\alpha$ روی می‌دهد، خصوصاً مفید است.

پس، فرض‌کنیم $V$ فضایی $n$بعدی باشد، و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$$

دوپایهٔ مرتب برای $V$ باشند، دراین صورت، اسکالرهای یکتایی چون $P_{ij}$ وجوددارندکه

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{۱۳-۲}$$

گیریم $x'_1, \ldots, x'_n$ مختصات بردار مفروض $\alpha$ در (نسبت به) پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}
\alpha &= x'_1\alpha'_1 + \cdots + x'_n\alpha'_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} x'_j\alpha'_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_{ij}x'_j)\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big( \sum_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j \Big)\alpha_i.
\end{aligned}$$

پس، رابطهٔ

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \Big( \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, x'_j \Big)\alpha_i \tag{۱۴-۲}$$

به دست می‌آید. چون $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مختصات بردار $\alpha$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ ، به طوریکتا تعیین می‌شوند، از (۲-۱۴) نتیجه می‌شودکه

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{۱۵-۲}$$

گیریم $P$ ماتریس $n \times n$ ی باشدکه درایهٔ $i, j$ آن اسکالر $P_{ij}$ است وگیریم $X$ و $X'$ ماتریسهای مختصات بردار $\alpha$ درپایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ باشند. در این صورت (۲-۱۵) را می‌توان به صورت فرمول

$$X = PX' \tag{۱۶-۲}$$

نیز نوشت. چون $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دومجموعهٔ مستقل خطی هستند، $X = 0$ اگر وتنها اگر $X' = 0$. لذا از (۲-۱۶) و قضیهٔ ۷ ازفصل ۱، نتیجه می‌گیریم که $P$ معکوس‌پذیر است. ازاین‌رو،

$$X' = P^{-1}X. \tag{۱۷-۲}$$

اگرنماد معرفی شدهٔ فوق را برای ماتریس مختصات یك بردار نسبت به پایه‌ای مرتب به کارگیریم، آنگاه (۲-۱۶) و (۲-۱۷) بیان می‌کنندکه

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$$
$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

پس، این بحث را می‌توان به‌شرح زیر خلاصه کرد.

**قضیهٔ ۷.** فرض کنیم $V$ یک‌فضای برداری $n$ بعدی بر روی هیأت $F$ باشد، و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دو پایهٔ مرتب برای $V$ باشند. آنگاه یك ماتریس $n\times n$ یکتا ولزوماً معکوس‌پذیرمانند $P$ که درایه‌هایش در $F$ هستند وجود دارد به طوری‌که به ازای هربردار $\alpha$ در $V$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (۱)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}. \qquad (۲)$$

ستونهای $P$ با روابط

$$P_j = [\alpha_j']_{\mathcal{B}}, \quad j = ۱, ۲, \cdots, n$$

تعیین می‌شوند.

برای تکمیل تحلیل بالا، نتیجهٔ زیر را نیز اثبات می‌کنیم.

**قضیهٔ ۸.** فرض کنیم $P$ ماتریسی معکوس‌پذیر و $n\times n$ بر روی هیأت $F$ ، $V$ یك فضای برداری $n$ بعدی بر روی $F$ ، و $\mathcal{B}$ پایه‌ای مرتب برای $V$ باشد. دراین صورت، پایهٔ مرتب یکتایی چون $\mathcal{B}'$ برای $V$ وجود داردکه به ازای هربردار $\alpha$ در $V$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (۱)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}} \qquad (۲)$$

اثبات. گیریم $\mathcal{B}$ متشکل از بردارهای $\alpha_۱, \cdots, \alpha_n$ باشد. اگر $\mathcal{B}' = \{\alpha_۱', \cdots, \alpha_n'\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ ودرموردآن (۱) معتبرباشد، واضح است‌که

$$\alpha_j' = \sum_{j=۱}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

پس، کافی است نشان دهیم بردارهای $\alpha_j'$ که با این معادلات تعریف می‌شوند، تشکیل یك پایه می‌دهند. فرض کنیم $Q = P^{-۱}$. دراین‌صورت،

$$\begin{aligned}\sum_j Q_{jk}\alpha_j' &= \sum_j Q_{jk}\sum_i P_{ij}\alpha_i \\ &= \sum_j \sum_i P_{ij}Q_{jk}\alpha_i \\ &= \sum_i \Big(\sum_j P_{ij}Q_{jk}\Big)\alpha_i \\ &= \alpha_k.\end{aligned}$$

بنابراین، زیرفضای پدیدآمدهٔ توسط مجموعهٔ

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_۱, \cdots, \alpha'_n\}$$

شامل $\mathcal{B}$ ونتیجتاً مساوی با $V$ است. پس، $\mathcal{B}'$ یك پایه است، وبنابر تعریف پایه وقضیهٔ ۷ واضح است که (۱) معتبر وازآنجا (۲) نیزمعتبر می‌باشد. □

**مثال۱۸.** گیریم $F$ یك هیأت، و

$$\alpha = (x_۱, x_۲, \cdots x_n)$$

برداری از $F^n$ باشد. اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتب استاندهٔ $F^n$ باشد:

$$\mathcal{B} = \{\epsilon_۱, \cdots, \epsilon_n\}$$

آنگاه ماتریس مختصات بردار $\alpha$ درپایهٔ $\mathcal{B}$ به وسیلهٔ

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تعیین می‌شود.

**مثال۱۹.** فرض‌کنیم $R$ هیأت اعداد حقیقی و $\theta$ عدد حقیقی ثابتی باشد. ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

معکوس‌پذیر است ومعکوس‌آن عبارت است از

$$P^{-۱} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

پس، به ازای هر $\theta$، مجموعهٔ $\mathcal{B}'$ متشکل از بردارهای $(\cos\theta ، \sin\theta)$ و $(-\sin\theta ، \cos\theta)$ پایه‌ای‌برای $R^۲$ است. این پایه را به طور شهودی‌می‌توان به‌عنوان پایه‌ای‌که از دوران پایهٔ استانده به اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ حاصل می‌شود، توصیف کرد. اگر $\alpha$ بردار $(x_۱, x_۲)$ باشد،آنگاه

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

یا

$$x'_۱ = x_۱ \cos\theta + x_۲ \sin\theta$$
$$x'_۲ = -x_۱ \sin\theta + x_۲ \cos\theta.$$

**مثال۲۰.** گیریم $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر است و معکوس آن عبارت است از

$$P^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & \frac{۱۱}{۸} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۱۶} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸} \end{bmatrix}.$$

بنابراین، بردارهای

$$\alpha'_۱ = (-۱, \quad ۰, ۰)$$
$$\alpha'_۲ = (\quad ۴, \quad ۲, ۰)$$
$$\alpha'_۳ = (\quad ۵, \ -۳, ۸)$$

پایه‌ای چون $\mathcal{B}'$ را برای $F^۳$ تشکیل می دهند. مختصات $x'_۱$، $x'_۲$، $x'_۳$ از بردار $\alpha = (x_۱, x_۲, x_۳)$ درپایهٔ $\mathcal{B}'$ به وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \\ x'_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_۱ + ۲x_۲ + \frac{۱۱}{۸}x_۳ \\ \frac{۱}{۲}x_۲ + \frac{۳}{۱۶}x_۳ \\ \frac{۱}{۸}x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & \frac{۱۱}{۸} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۱۶} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

www.riazisara.ir

تعیین می‌شوند. در حالت خاص

$$(3, 2, -8) = -10\alpha'_1 - \frac{1}{2}\alpha'_2 - \alpha'_3.$$

## تمرین

۱. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \qquad \alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$$

$$\alpha_3 = (1, 0, 0, 4), \qquad \alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$$

پایه‌ای برای $R^4$ تشکیل می‌دهند. مختصات هریك از بردارهای پایهٔ استانده را نسبت به‌پایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ بیابید.

۲. ماتریس مختصات بردار $(1, 0, 1)$ در پایه‌ای از $C^3$ را که بترتیب متشکل است از بردارهای $(2i, 1, 0)$، $(2, -1, 1)$، و $(0, 1+i, 1-i)$ بیابید.

۳. فرض کنید $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ پایه‌ای مرتب برای $R^3$ متشکل از

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \qquad \alpha_2 = (1, 1, 1) \qquad \alpha_3 = (1, 0, 0)$$

باشد. مختصات بردار $(a, b, c)$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ چیست؟

۴. فرض کنید $W$ زیر فضایی از $C^3$ باشد که توسط $\alpha_1 = (1, 0, i)$ و $\alpha_2 = (1+i, 1, -1)$ پدید می‌آید.

(الف) نشان دهید که $\alpha_1$ و $\alpha_2$ پایه‌ای برای $W$ تشکیل می‌دهند.

(ب) نشان دهید که‌بردارهای $\beta_1 = (1, 1, 0)$ و $\beta_2 = (1, i, 1+i)$ در $W$ قرار دارند و پایهٔ دیگری برای $W$ تشکیل می‌دهند.

(پ) مختصات $\alpha_1$ و $\alpha_2$ در پایهٔ مرتب $\{\beta_1, \beta_2\}$ از $W$ چه هستند؟

۵. فرض کنید $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ دو بردار در $R^2$ باشند که

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

ثابت کنید که $\mathcal{B} = \{\alpha, \beta\}$ پایه‌ای برای $R^2$ است. مختصات بردار $(a, b)$ را درپایهٔ مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha, \beta\}$ بیابید. (ازنظرهندسی، شرایط روی $\alpha$ و $\beta$ بیان می‌کنند که $\alpha$ و $\beta$ متعامدند و هر یك طول ۱ دارند.)

۶. فرض کنید فضای برداری $V$ بر روی اعداد مختلط، متشکل از همهٔ توابع از $R$ در $C$ باشد؛ یعنی، فضای همهٔ توابع (با مقدار) مختلط روی خط حقیقی باشد. فرض کنید

$f_1(x)=1$، $f_2(x)=e^{ix}$، و $f_3(x)=e^{-ix}$.

(الف) ثابت کنید که $f_1$، $f_2$، و $f_3$ مستقل خطی هستند.

(ب) فرض کنید $g_1(x)=1$، $g_2(x)=\cos x$، و $g_3(x)=\sin x$. ماتریس $3\times 3$ معکوس‌پذیری چون $P$ بیابید به‌طوری که

$$g_j=\sum_{i=1}^{3} P_{ij} f_i$$

۷. فرض کنید $V$ فضای برداری (حقیقی) همهٔ توابع چندجمله‌ای از $R$ در $R$ ازدرجهٔ ۲ یا کمتر باشد؛ یعنی، فضای همهٔ توابع $f$ به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$$

باشد. فرض کنید $t$ عدد حقیقی ثابتی باشد، و توابع زیر را تعریف کنید:

$$g_1(x)=1,\quad g_2(x)=x+t,\quad g_3(x)=(x+t)^2.$$

ثابت کنید $\mathcal{B}=\{g_1, g_2, g_3\}$ پایه‌ای برای $V$ است. اگر

$$f(x)=c_0+C_1x+C_2x^2,$$

مختصات $f$ در پایه مرتب $\mathcal{B}$ چه هستند؟

## ۵.۲. خلاصهٔ هم ارزی سطری

در این بخش برای تکمیل بحث هم ارزی سطری ماتریسها، چند حکم مقدماتی در مورد پایه وبعد فضاهای برداری با بعد متناهی را مورد استفاده قرارمی‌دهیم. یادآوری‌می کنیم که اگر $A$ ماتریس $m\times n$ی بر روی هیأت $F$ باشد، بردارهای سطری $A$ عبارتند از بردارهای $\alpha_1$،...،$\alpha_m$ از $F^n$ که توسط

$$\alpha_i=(A_{i1}, \cdots, A_{in})$$

تعریف می‌شوند؛ و نیز یادآور می‌شویم که فضای سطری $A$ زیر فضایی است از $F^n$ که توسط این بردارها پدید می‌آید. **رتبهٔ سطری** $A$ عبارت است از بعد فضای سطری $A$.

اگر $P$ ماتریسی $k\times m$ بر روی $F$ باشد، آنگاه حاصلضرب $B=PA$ ماتریسی $k\times n$ است که بردارهای سطری آن $\beta_1$،...،$\beta_k$ ترکیبات خطی

$$\beta_i=P_{i1}\alpha_1+\cdots+P_{im}\alpha_m$$

از بردارهای سطری $A$ هستند. بدین نحو، فضای سطری $B$ زیر فضایی از فضای سطری $A$ است. اگر $P$ ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری باشد، آنگاه $B$ هم ارز سطری $A$ است، و نتیجتاً تقارن هم‌ارزی سطری، یا معادلهٔ $A=P^{-1}B$، ایجاب می کند که فضای سطری $A$ نیز زیر فضایی از فضای سطری $B$ باشد.

**قضیهٔ ۹.** فضاهای سطری ماتریسهای هم ارز سطری یکی هستند.

از این‌رو، می بینیم که برای مطالعهٔ فضای سطری $A$ کافی است بـه‌مطالعهٔ فضای

سطری یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی که هم‌ارز سطری $A$ باشد بپردازیم؛ واین، همان چیزی است که قصد انجام آن را داریم.

**قضیهٔ ۱۰.** فرض کنیم $R$ یك ماتـریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی غیر صفر باشد. دراین صورت بردارهای سطری غیرصفر$R$ برای فضای سطری $R$ یك‌پایه تشکیل‌می‌دهند.

اثبات. گیریم $\rho_1, \ldots, \rho_r$ بردارهای سطری غیر صفر ماتریس $R$ باشند:

$$\rho_i = (R_{i1}, \ldots, R_{in}).$$

مطمئناً این بردارها فضای سطری $R$ را پدید می‌آورند؛ پس تنها لازم است ثابت‌کنیم که این‌بردارها مستقل خطی‌اند. چون $R$ یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است، اعداد صحیح و مثبتی چون $k_1, \ldots, k_r$ وجود دارندکه به‌ازای $i \leqslant r$

$$\text{(۱۸-۲)} \quad \begin{aligned} &\text{(الف)}\quad R(i, j) = 0 \text{ هرگاه } j < k_i \\ &\text{(ب)}\quad R(i, k_j) = \delta_{ij} \\ &\text{(پ)}\quad k_1 < \cdots < k_r. \end{aligned}$$

فرض‌کنیم $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ برداری در فضای سطری $R$ باشد:

$$\beta = c_1\rho_1 + \cdots + c_r\rho_r. \qquad \text{(۱۹-۲)}$$

در این صورت، ادعا می‌کنیم که $c_j = b_{k_j}$. زیرا، بنابر (۱۸-۲)

$$\begin{aligned} b_{k_j} &= \sum_{i=1}^{r} c_i R(i, k_j) \qquad \text{(۲۰-۲)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} c_i \delta_{ij} \\ &= c_j. \end{aligned}$$

درحالت خاص، اگر $\beta = 0$، یعنی $c_1\rho_1 + \cdots + c_r\rho_r = 0$، آنگاه $c_j$ باید مختص $k_j$ام بردار صفر باشد، و بنابرایـن، $c_j = 0$، $j = 1, \ldots, r$. پس، $\rho_1, \ldots, \rho_r$ مستقل خطی هستند. □

**قضیهٔ ۱۱.** گیریم $m$ و $n$ دو عدد صحیح مثبت و $F$ یك هیأت باشد. فرض کنیم $W$ زیرفضایی از $F^n$ باشد و $\dim W \leqslant m$. دراین صورت، تنها یك ماتریس $m \times n$ تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی بر روی $F$ وجود دارد که فضای سطری آن $W$ باشد.

اثبات. حداقل یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $m \times n$ که فضای سطری‌آن $W$ باشد وجود دارد. چون $\dim W \leqslant m$، می‌توان $m$ بردار $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ در $W$ انتخاب کرد که $W$ را پدیدآورند. گیریم $A$ ماتریس $m \times n$ با بردارهای سطری $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ و $R$ یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی که هم ارزسطری $A$ است باشد. دراین صورت، فضای سطری $R$ همان $W$ است.

حال فرض می‌کنیم $R$ ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی دلخواهی باشد که فضای سطری آن $W$ است. گیریم $\rho_1, \dots, \rho_r$ بردارهای سطری غیرصفر $R$ باشند، و درایهٔ غیر صفر مقدم $\rho_i$ در ستون $k_i$، $i = 1, \dots, r$، واقع شود. بـردارهای $\rho_1, \dots, \rho_r$ پایه‌ای برای $W$ تشکیل می‌دهند. در اثبات قضیهٔ ۱۰ مشاهده‌کردیم که اگر $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ در $W$ باشد، آنگاه

$$\beta = c_1\rho_1 + \dots + c_r\rho_r,$$

و $c_i = b_{k_i}$؛ بـه‌بیان دیگـر، عبارت یکتای $\beta$ بـه‌صورت ترکیبی خطی از بـردارهـای $\rho_1, \dots, \rho_r$ عبارت است از

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\rho_i. \qquad (۲-۲۱)$$

بنابراین، هر بردار $\beta$ با در دست بودن مختصات $b_{k_i}$ آن، $i = 1, \dots, r$، معین می‌شود. مثلاً، $\rho_s$ تنها بردار واقع در $W$ است کـه مختص $k_s$ام آن ۱ و به‌ازای $i \neq s$ مختص $k_i$ام آن ۰ است.

فرض کنیم $\beta$ در $W$ باشد و $\beta \neq 0$. ادعا می‌کنیم که اولین مختص غیرصفر $\beta$ در یکی از ستونهای $k_s$ واقع می‌شود. چون

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\rho_i,$$

و $\beta \neq 0$، می‌توان نوشت

$$\beta = \sum_{i=s}^{r} b_{k_i}\rho_i, \quad b_{k_s} \neq 0. \qquad (۲-۲۲)$$

اگر $i > s$ و $j \leqslant k_s$، بنابر شرایط (۲-۱۸) داریم $R_{ij} = 0$. بنابراین

$$\beta = (0, \dots, 0, b_{k_s}, \dots b_n), \quad b_{k_s} \neq 0$$

و اولین مختص غیر صفر $\beta$ در ستون $k_s$ قرار می‌گیرد. همچنین توجه باید داشت کـه به ازای هر $k_s$، $S = 1, \dots, r$، برداری در $W$ وجود دارد که مختص $k_s$ام آن غیر صفر است؛ این بردار همان $\rho_s$ است.

اکنون روشن است که $R$ به‌طور یکتا توسط $W$ تعیین می‌شود. توصیف $R$ برحسب $W$ به‌شرح زیراست. همهٔ بردارهای $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ واقع در $W$ را درنظر می‌گیریم. اگر $\beta \neq 0$، اولین مختص غیر صفر $\beta$ باید در ستونی چون $t$ قرار گیرد:

$$\beta = (0, \dots, 0, b_t, \dots, b_n), \quad b_t \neq 0.$$

گیریم $k_1, \dots, k_r$ آن اعداد صحیح مثبت $t$ باشند کـه بـه‌ازای هـر یك برداری چون $\beta \neq 0$ در $W$ وجود داشته باشد به‌طوری کـه اولین مختص غیرصفرش در ستون $t$ واقع

شود. اعداد $k_1, \ldots, k_r$ را با ترتیب $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ مرتب می‌کنیم. به‌ازای هر یك از اعداد صحیح مثبت $k_s$، یك و تنها یك بردار $\rho_s$ در $W$ وجود دارد به‌طوری که مختص $k_s$ام بردار $\rho_s$ برابر ۱، و به‌ازای $i \neq s$ مختص $k_i$ام آن صفر باشد. دراین‌صورت $R$ ماتریسی است $m \times n$ با بردارهای‌سطری $\rho_1, \ldots, \rho_r, 0, \ldots, 0$. □

**نتیجه.** هر ماتریس $m \times n$ مانند $A$ هم ارز سطری یك وتنها یك ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی است.

اثبات. می‌دانیم که $A$ حداقل با یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $R$ هم‌ارز سطری است. اگر $A$ هم‌ارز سطری یکی دیگر از این‌گونه ماتریسها، مثلاً $R'$، باشد؛ آنگاه $R$ هم‌ارز سطری $R'$ است؛ و از این‌رو، $R$ و $R'$ دارای فضاهای سطری‌مساوی‌اند و باید یکی باشند. □

**نتیجه.** فرض‌کنیم $A$ و $B$ دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت $F$ باشند. در این‌صورت $A$ و $B$ هم‌ارز سطری‌اند اگر و تنها اگر دارای فضاهای سطری مساوی باشند.

اثبات. می‌دانیم که اگر $A$ و $B$ هم‌ارز سطری باشند، آنگاه دارای فضاهای سطری مساوی هستند. لذا فرض می‌کنیم که $A$ و $B$ دارای فضاهای سطری مساوی باشند، در این صورت، $A$ هم‌ارز سطری یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $R$، و $B$ هم‌ارز سطری یك‌ماتریس‌تحویل‌شدهٔ سطری‌پلکانی $R'$ است. چون $A$ و $B$ دارای‌فضاهای سطری‌مساویند، $R$ و $R'$ نیز فضای سطری مساوی‌دارند. بنابراین، $R = R'$، و $A$ هم‌ارزسطری $B$ است. □

خلاصه آنکه: اگر $A$ و $B$ دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت $F$ باشند، احکام زیر هم ارزند:

۱. $A$ و $B$ هم ارز سطری‌اند.
۲. $A$ و $B$ دارای فضاهای سطری مساوی‌اند.
۳. $B = PA$، که در آن $P$ یك ماتریس $m \times m$ معکوس‌پذیر است.

یك‌حکم‌هم‌ارزچهارم هم‌این‌است که دودستگاه همگن $AX = 0$ و $BX = 0$ دارای جوابهای مساوی‌اند؛ اما، با اینکه می‌دانیم هم‌ارزی سطری $A$ و $B$ ایجاب می‌کند که این دو دستگاه دارای جوابهای مساوی باشند، به‌نظر می‌رسد بهتر است اثبات عکس آن را به بعد موکول کنیم.

## ۶.۲. محاسبات مربوط به‌زیر فضاها

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه اعمال سطری مقدماتی روشی استاندهٔ شده را برای پاسخگویی به‌پرسشهای واقعی معینی در رابطه با زیرفضاهای $F^n$ به‌دست می‌دهند. قبلاً احکام مورد نیاز را فراهم‌کرده‌ایم و برای راحتی خواننده آنها را در اینجا گرد می‌آوریم. این بحث در مورد هر فضای برداری $n$ بعدی بر روی هیأت $F$ در صورتی

صادق است که یك پایهٔ مرتب ثابت $\mathscr{B}$ انتخاب شود وهر بردار $\alpha$ از $V$ به‌وسیلهٔ یك $n$تایی $(x_1, \cdots, x_n)$ که مختصات $\alpha$ را در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ به‌دست می‌دهد، توصیف شود.

فرض کنیم $m$ بردار $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ از $F^n$ مفروض باشند. پرسشهای زیــر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. چگونه‌معلوم‌می‌شودکه بردارهای $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ مستقل خطی‌اند؟ یا به‌طور کلی، چگونه می‌توان بعد $W$، زیر فضای پدیدآمده توسط این بردارها، را یافت؟

۲. با مفروض بودن $\beta$ در $F^n$، چگونه می‌توان معلوم کرد که‌آیا $\beta$ ترکیبی خطی‌از بردارهای $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ هست یا نه؛ یعنی، $\beta$ در زیرفضای $W$ قرار دارد یا نه؟

۳. چگونه می‌توان توصیفی صریح از زیرفضای $W$ به‌دست داد؟

سومین سؤال قدری مبهم است، زیرا مشخص نیست‌که منظور از «توصیف صریح» چیست؛ به‌هرحال، ابتدا نوع توصیفی را که درذهن داریم ارائه می‌دهیم. بااین توصیف، فوراً می‌توان به‌پرسشهای (۱) و (۲) پاسخ داد.

گیریم $A$ ماتریسی $m \times n$ با بردارهای سطری $\alpha_i$ باشد:

$$\alpha_i = (A_{i1}, \cdots, A_{in}).$$

دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی را به‌کار گیرید که از $A$ آغاز و به‌یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $R$ ختم شود. قبلاً چگونگی انجام این‌کار را توضیح داده‌ایم. در این مرحله، بعد $W$ (فضای سطری $A$) مشخص است، چراکه ایــن بعد چیزی نیست جز تعداد بردارهای سطری غیر صفر $R$. اگــر $\rho_1, \cdots, \rho_r$ بردارهای سطری غیر صفر $R$ باشند، آنگاه $\mathscr{B} = \{\rho_1, \cdots, \rho_r\}$ پایه‌ای برای $W$ است. اگر اولین مختص غیرصفر $\rho_i$، مختص $k_i$ام باشد، آنگاه به‌ازای $i \leqslant r$ داریم

(الف) $R(i, j) = 0$، هرگاه $j < k_i$.

(ب) $R(i, k_j) = \delta_{ij}$

(پ) $k_1 < \cdots < k_r$.

زیرفضای $W$ متشکل است از همهٔ بردارهای

$$\beta = c_1\rho_1 + \cdots + c_r\rho_r$$
$$= \sum_{i=1}^{r} c_i(R_{i1}, \cdots, R_{in}).$$

در این صورت، مختصات $b_1, \cdots, b_n$ یك چنین بردار $\beta$ عبارتند از

$$b_j = \sum_{i=1}^{r} c_i R_{ij}. \qquad (۲-۲۳)$$

بخصوص $b_{k_j} = c_j$، و از این‌رو اگر $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ ترکیبی خطی از $\rho_i$ها باشد، باید به‌صورت ترکیب خطی خاص

$$\beta=\sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\rho_i \qquad (۲۴\text{-}۲)$$

باشد. شرایط روی $\beta$ برای برقراری (۲-۲۴) عبارتند از

$$b_j=\sum_{i=1}^{r} b_{k_i}R_{ij}, \quad j=1, \cdots, n. \qquad (۲۵\text{-}۲)$$

حال (۲-۲۵) توصیف صریح $W$ ، زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_m$ است؛ یعنی این زیرفضا متشکل است ازهمهٔ بردارهای $\beta$ در $F^n$ کــه مختصاتشان در (۲-۲۵) صدق می‌کنند. (۲-۲۵)چه نوع توصیفی است؟ عمدتاً این توصیف $W$ را به‌عنوان همهٔجوابهای $\beta=(b_1, \cdots, b_n)$ از دستگاه معادلات خطی همگن (۲-۲۵) بیان می‌کند. این دستگاه معادلات، از طبیعت بسیار ویژه‌ای برخوردار است؛ زیــرا، $(n-r)$ مختص را به‌صورت ترکیبات خطــی $r$ مختص مشخص $b_{k_1}$، $\cdots$، $b_{k_r}$ به‌دست می‌دهد. در انتخــاب مختصات $b_{k_i}$ آزادی کامل وجود دارد؛ یعنی اگر $c_1$، $\cdots$، $c_r$ اسکالرهایی دلخواه باشند، یك وتنها یك بردار $\beta$ در $W$ وجود داردکه $c_i$ مختص $k_i$ام آن است.

نکتهٔ قابل توجه در اینجا این است: با مفروض بودن بردارهای $\alpha_i$، تحویل سطری روشی است سرراست بــرای تعیین اعداد صحیح $r$، $k_1$، $\cdots$، $k_r$ واسکالرهــای $R_{ij}$ که تــوصیف (۲-۲۵) از زیرفضای پدید آمده توسط $\alpha_1$ ، $\cdots$ ، $\alpha_m$ را به‌دست مــی‌دهند. همان‌طورکه در قضیهٔ ۱۱ نشان دادیم، مشاهده می‌شودکــه هرزیرفضای $W$ از $F^n$ دارای توصیفی از نوع (۲-۲۵) است. دربارهٔ سؤال (۲) نیــز به‌نکاتی اشاره می‌کنیم. قبلا، در بخش ۴.۱، بیان‌کرده‌ایم که چگونه می‌توان یــك ماتریس معکوس‌پذیر $m\times m$ مانند $P$ یافت به‌طوری‌که $R=PA$. با اطلاع از $P$ درصورت امــکان می‌توان اسکالرهایی مانند $x_1$، $\cdots$، $x_n$ را یافت به‌طوری‌که

$$\beta=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m .$$

زیرا، بردارهای سطری $R$ از معادلهٔ

$$\rho_i=\sum_{j=1}^{m} P_{ij}\alpha_j$$

به‌دست می‌آیند وبنابراین، اگر$\beta$ ترکیبی خطی از $\alpha_j$ها باشد، داریم

$$\begin{aligned}\beta&=\sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\rho_i\\&=\sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\sum_{j=1}^{m} P_{ij}\alpha_j\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{r} b_{k_i}P_{ij}\alpha_j\end{aligned}$$

و از این‌رو

$$x_j=\sum_{i=1}^{r} b_{k_i}P_{ij}$$

یکی از انتخابهای ممکن برای $x_j$ است (ممکن است امکانات دیگری هم باشد).
همچنین این سؤال راکه آیا $\beta=(b_۱, \cdots, b_n)$ ترکیبی خطی از $\alpha_i$هـا هست یا نه، و اگر هست، اسکالرهای $x_i$ چه هستند، می‌توان به‌صورت این پرسش که آیادستگاه معادلات

$$\sum_{i=۱}^{m} A_{ij}x_i=b_j, \qquad j=۱, \cdots, n$$

جواب دارد ودرصورت وجود،جوابها چه هستند، مطرح کرد. ماتریس ضرایب این‌دستگاه معادلات،ماتریسی $n\times m$ مانند $B$ با بردارهای ستونی $\alpha_۱$، $\cdots$، $\alpha_m$ است. در فصل ۱ کاربرداعمال سطری مقدماتی درحل دستگاه معادلات $BX=Y$ را مورد بحث قراردادیم. اکنون مثالی را مطرح می‌کنیم که درآن در پاسخگویی به‌سؤالات مربوط به زیرفضاهای $F^n$ هردو نقطه‌نظر اعمال می‌شود.

**مثال ۲۱.** دراین مثال مسئلهٔ زیررا مطرح می‌کنیم. فرض‌کنیم $W$ زیرفضایی از $R^۴$ باشدکه توسط بردارهای

$$\alpha_۱=(۱, ۲, ۲, ۱)$$
$$\alpha_۲=(۰, ۲, ۰, ۱)$$
$$\alpha_۳=(-۲, ۰, -۴, ۳)$$

پدید آید.

(الف) ثابت‌کنیدکه $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ پایه‌ای برای $W$تشکیل می‌دهند؛ یعنی، ثابت‌کنید این بردارها مستقل خطی هستند.

(ب) گیریم $\beta=(b_۱, b_۲, b_۳, b_۴)$ برداری در $W$ باشد. مختصات $\beta$ نسبت‌به‌پایهٔ مرتب $\{\alpha_۱، \alpha_۲، \alpha_۳\}$ چیست؟

(پ) فرض‌کنید

$$\alpha'_۱=(۱, ۰, ۲, ۰)$$
$$\alpha'_۲=(۰, ۲, ۰, ۱)$$
$$\alpha'_۳=(۰, ۰, ۰, ۳)$$

نشان دهید $\alpha'_۱$، $\alpha'_۲$، $\alpha'_۳$ پایه‌ای برای $W$ تشکیل می‌دهند.

(ت) اگر $\beta$ در $W$ باشد، فرض کنید $X$ ماتریس مختصات $\beta$ در $\alpha$ ـ پـایه و $X'$ ماتریس مختصات $\beta$ در $\alpha'$ ـ پـایه را نشان دهد. ماتریسی $۳\times ۳$ مانند $P$ راکه به‌ازای هرچنین $\beta$، $X=PX'$ بیابید.

برای پاسخگویی به‌این سؤالات بـا روش اول، ماتریس $A$ بـا بردارهای سطری

$\alpha_1$، $\alpha_2$، $\alpha_3$ را تشکیل می‌دهیم، ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی $R$ را که هم‌ارزسطری $A$ است، می‌یابیم، و همزمان همان اعمال را روی ماتریس همانی به‌کار می‌بریم تا به‌ماتریس معکوس‌پذیر $Q$ که $R=QA$ دست یابیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Q=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(الف) واضح است که $R$ دارای رتبهٔ ۳ است، و لذا $\alpha_1$، $\alpha_2$، و $\alpha_3$ مستقل خطی هستند.

(ب) از بردارهای $\beta=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ کدام در $W$ قراردارند؟ پایه‌ای برای $W$ داریم که توسط $\rho_1$، $\rho_2$، و $\rho_3$، یعنی بردارهای سطری $R$، معین می‌شود. با یک‌نظر می‌توان دید که زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای $\rho_1$، $\rho_2$، $\rho_3$ متشکل است از بردارهایی چون $\beta$ که به‌ازای آنها $b_3=2b_1$. برای چنین بردار $\beta$ داریم

$$\begin{aligned} \beta &= b_1\rho_1+b_2\rho_2+b_4\rho_3 \\ &= [b_1 b_2 b_4]R \\ &= [b_1 b_2 b_4]QA \\ &= x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 \end{aligned}$$

که در آن $x_i=[b_1\ b_2\ b_4]Q_i$:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{2}{3}b_4 \\ x_2 &= -b_1+\frac{5}{6}b_2-\frac{2}{3}b_4 \qquad (2\text{-}26) \\ x_3 &= -\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_4 . \end{aligned}$$

(پ) بردارهای $\alpha'_1$، $\alpha'_2$، و $\alpha'_3$ همگی به‌شکل $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ باشرط $y_3=2y_1$ هستند، و از این‌رو در $W$ قرار دارند. با یک نظر می‌توان دید که این بردارها مستقل خطی هستند.

(ت) ماتریس $P$ دارای ستونهای

$$P_j=[\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$$

است که درآن $\mathcal{B}=\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$. معادلات (۲-۲۶) به‌ما نشان می‌دهند که ماتریسهای مختصات $\alpha'_۱$، $\alpha'_۲$، $\alpha'_۳$ را چگونه پیدا کنیم. مثلاً، به‌ازای $\beta=\alpha'_۱$ داریم $b_۱=۱$، $b_۲=۰$، $b_۳=۲$، $b_۴=۰$، و

$$x_۱= \quad ۱-\frac{۱}{۳}(۰)+\frac{۲}{۳}(۰)=۱$$

$$x_۲=-۱+\frac{۵}{۶}(۰)-\frac{۲}{۳}(۰)=-۱$$

$$x_۳= \quad -\frac{۱}{۶}(۰)+\frac{۱}{۳}(۰)=۰.$$

پس، $\alpha'_۱=\alpha_۱-\alpha_۲$. به‌طورمشابه به‌دست‌می‌آوریم $\alpha'_۲=\alpha_۲$ و $\alpha'_۳=۲\alpha_۱-۲\alpha_۲+\alpha_۳$. بنابراین

$$P=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

اکنون ببینیم با روش دومی که تشریح کردیم چگونه به‌این پرسشها پاسخ می‌دهیم. ماتریسی ۳ × ۴ مانند $B$ را با بردارهای ستونی $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، و $\alpha_۳$ تشکیل می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & -۴ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}.$$

تحقیق می‌کنیم که به‌ازای‌کدام اسکالرهای $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$، $y_۴$ دستگاه $BX=Y$ دارای جواب است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & y_۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ & y_۲ \\ ۲ & ۰ & -۴ & y_۳ \\ ۱ & ۱ & ۳ & y_۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & y_۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ & y_۲-۲y_۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & y_۳-۲y_۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ & y_۴-y_۱ \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 0 & -6 & y_2-2y_4 \\ 0 & 1 & 5 & y_4-y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-2y_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}(2y_4-y_2) \\ 0 & 1 & 0 & -y_1+\frac{5}{6}y_2-\frac{2}{3}y_4 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-2y_1 \end{bmatrix}.$$

بنا براین، شرط جواب داشتن دستگاه $BX=Y$، این است که $y_3=2y_1$. لذا $\beta=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ در $W$ قرار دارد اگر و تنها اگر $b_3=2b_1$. اگر $\beta$ در $W$ باشد، آنگاه مختصات $(x_1, x_2, x_3)$ درپایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را می‌توان ازآخرین ماتریس بالاخواند ویك‌باردیگر، فرمولهای (۲-۲۶) را برای این مختصات به‌دست‌آورد.

اکنون به‌پرسشهای (پ) و (ت) مثل قبل پاسخ می‌دهیم.

**مثال ۲۲.** ماتریس $5\times5$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و مسائل زیر دربارهٔ آن را درنظر می‌گیریم.

(الف) یك ماتریس معکوس‌پذیر $P$ بیابید به‌طوری که $PA$ یك ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی‌مانند $R$ باشد.

(ب) پایه‌ای برای $W$، فضای سطری $A$، بیابید.

(پ) تعیین‌کنیدکدام یك از بردارهای $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ در $W$ قراردارند.

(ت) ماتریس مختصات هر بردار $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ از $W$ را در پایهٔ مرتب انتخاب شده در (ب) بیابید.

(ث) هر بردار $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ از $W$ را به‌صورت ترکیبی‌خطی ازسطرهای $A$ بنویسید.

(ج) توصیف صریحی از $V$، فضای برداری همهٔ ماتریسهای ستونی ۱ × ۵ مانند $X$ با شرط $AX = 0$ را به‌دست دهید.

(چ) پایه‌ای برای $V$ بیابید.

(ح) به‌ازای کدام یك از ماتریسهای ستونی ۱ × ۵ مانند $Y$، معادله $AX = Y$، دارای جواب $X$ است؟

برای حل ایـن مسائل ماتریس افزودهٔ $A'$ از دستگاه $AX = Y$ را تشکیل می‌دهیم و دنباله‌ای مناسب از اعمال سطری روی $A'$ به‌کار می‌بندیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3y_1 + y_2 + y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ & y_۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & y_۱-y_۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & y_۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -\ y_۱+y_۲+y_۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۳y_۱+y_۲+y_۴-y_۵ \end{bmatrix}$$

(الف) اگر به‌ازای هر $Y$

$$PY=\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۱-y_۲ \\ y_۵ \\ -y_۱+y_۲+y_۳ \\ -۳y_۱+y_۲+y_۴-y_۵ \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$P=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

و از این‌رو، $PA$ ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی

$$R=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

است. باید تأکید کرد که ماتریس $P$ یکتا نیست. در واقع، تعداد زیادی ماتریس معکوس‌پذیر $P$ (که از انتخابهای گوناگون اعمال مورد استفاده جهت تحویل $A'$ ناشی می‌شوند) وجود دارند که $PA=R$.

(ب) به‌عنوان پایه‌ای برای $W$، می‌توان بردارهای سطری غیرصفر

$$\rho_1=(1, 2, 0, 3, 0)$$
$$\rho_2=(0, 0, 1, 4, 0)$$
$$\rho_3=(0, 0, 0, 0, 1)$$

از ماتریس $R$ را انتخاب کرد.

(پ) فضای سطری $W$ متشکل ازهمهٔ بردارهای به‌صورت

$$\beta=c_1\rho_1+c_2\rho_2+c_3\rho_3$$
$$=(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1+4c_2, c_3)$$

است که در آن $c_1$، $c_2$، $c_3$ اسکالرهای دلخواهی هستند. پس، $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ در $W$ است اگر وتنها اگر

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)=b_1\rho_1+b_3\rho_2+b_5\rho_3$$

و این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$b_2=2b_1$$
$$b_4=3b_1+4b_3.$$

این معادلات نمونه‌هایی از دستگاه عمومی (۲-۲۵) هستند که با استفاده ازآنها با یك نگاه می‌توان گفت که آیا برداری مفروض در $W$ هست یا خیر. بنابراین، $(-5, -10, 1, -11, 20)$ ترکیبی‌خطی‌ازسطرهای $A$ هست، اما $(1, 2, 3, 4, 5)$ چنین نیست.

(ت) ماتریس مختصات بردار $(b_1, 2b_1, b_3, 3b_1+4b_3, b_5)$ در پایهٔ $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$، مسلماً عبارت است از

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_5 \end{bmatrix}.$$

(ث) طرق بسیاری برای نوشتن بردارهای $W$ به صورت ترکیبات خطی سطرهای $A$ وجود دارد. شاید آسانترین راه آن باشد که ازنخستین شیوهٔ بیان شدهٔ قبل ازمثال ۲۱ پیروی کنیم:

$$\begin{aligned}\beta &= (b_1,\ 2b_1,\ b_3,\ 3b_1+4b_3,\ b_5)\\ &= [b_1,\ b_3,\ b_5,\ 0,\ 0]\cdot R\\ &= [\sout{b_1},\ b_3,\ b_5,\ 0,\ 0]\cdot PA\end{aligned}$$

$$= [b_1,\ b_3,\ b_5,\ 0,\ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\cdot A$$

$$= [b_1+b_3,\ -b_3,\ 0,\ 0,\ b_5]\cdot A.$$

درحالت خاص، در ازای $\beta=(-5,-10,1,-11,20)$ داریم

$$\beta=[-4,-1,0,0,20]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(ج) معادلات دستگاه $RX=0$ عبارتند از

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_4&=0\\ x_3+4x_4&=0\\ x_5&=0.\end{aligned}$$

از این‌رو، $V$ متشکل از همهٔ ستونهای به‌شکل

$$X=\begin{bmatrix} -2x_2-3x_4\\ x_2\\ -4x_4\\ x_4\\ 0\end{bmatrix}$$

است که در آن $x_۲$ و $x_۴$ دلخواه هستند.

(چ) دوستون

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \\ -۴ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای $V$ تشکیل می‌دهند. این پایه مثالی است از پایهٔ توصیف شده در مثال ۱۵.

(ح) معادلهٔ $AX = Y$ دارای جوابهای $X$ است اگر وتنها اگر

$$\begin{aligned} -\ y_۱ + y_۲ + y_۳ \qquad &= ۰ \\ -۳y_۱ + y_۲ + y_۴ - y_۵ &= ۰. \end{aligned}$$

## تمرین

۱. فرض کنید $n > s$ و $A$ ماتریسی $s \times n$ باشد که درایه‌هایش متعلق به‌هیأت $F$ هستند. ازقضیهٔ ۴ (و نه‌اثبات آن) استفاده کنید تا نشان‌دهید که یك $X$ غیرصفر در $F^{n\times۱}$وجود داردکه $AX = ۰$.

۲. فرض کنید

$$\alpha_۱ = (۱, ۱, -۲, ۱), \quad \alpha_۲ = (۳, ۰, ۴, -۱), \quad \alpha_۳ = (-۱, ۲, ۵, ۲)$$

و

$$\alpha = (۴, -۵, ۹, -۷), \quad \beta = (۳, ۱, -۴, ۴), \quad \gamma = (-۱, ۱, ۰, ۱).$$

(الف) کدام یك از بردارهای $\alpha$، $\beta$، $\gamma$ در زیرفضایی از $R^۴$ که توسط $\alpha_i$ها پدید می‌آید قرار دارد؟

(ب) کدام یك از بردارهای $\alpha$، $\beta$، $\gamma$ در زیرفضایی از $C^۴$ پدید آمده توسط $\alpha_i$ها قرار دارد؟

(پ) آیا این مطلب قضیه‌ای را به‌یاد نمی‌آورد؟

۳. بردارهای

$$\alpha_۱ = (-۱, ۰, ۱, ۲), \quad \alpha_۲ = (۳, ۴, -۲, ۵), \quad \alpha_۳ = (۱, ۴, ۰, ۹)$$

از $R^۴$ را درنظربگیرید. دستگاهی از معادلات خطی همگن بیابیدکه فضای جواب آن

دقیقاً زیرفضای پدیدآمده توسط این سه‌بردار از $R^4$ باشد.

۴. فرض کنید

$$\alpha_1=(1, 0, -i),\quad \alpha_2=(1+i, 1-i, 1)\quad \alpha_3=(i, i, i)$$

از $C^3$ باشند. ثابت کنید که این بردارها پایه‌ای برای $C^3$ تشکیل می‌دهند. مختصات بردار $(a, b, c)$ دراین پایه کدامند؟

۵. توصیفی صریح از نوع (۲-۲۵) برای بردارهای

$$\beta=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$

در $R^5$، که ترکیبهای خطی بردارهای

$$\alpha_1=(1, 0, 2, 1, -1),\qquad \alpha_2=(-1, 2, -4, 2, 0)$$

$$\alpha_3=(2, -1, 5, 2, 1),\qquad \alpha_4=(2, 1, 3, 5, 2)$$

هستند ارائه کنید.

۶. فرض کنید $V$ فضای برداری حقیقی پدیدآمده توسط سطرهای ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد.

(الف) پایه‌ای برای $V$ بیابید.

(ب) کدام‌یك از بردارهای $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ عناصری از $V$ هستند؟

(پ) اگر $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ در $V$ باشد، مختصات آن در پایـهٔ مطلوب بند (الف) چیست؟

۷. $A$ را ماتریسی $m\times n$ برروی هیأت $F$ فرض کنید و دستگاه معادلات $AX=Y$ رادر نظربگیرید. ثابت کنید این دستگاه معادلات دارای جواب است. اگر و تنها اگر رتبهٔ سطری ماتریس $A$ با رتبهٔ سطری ماتریس افزودهٔ دستگاه برابرباشد.

# ۳

# تبدیلهای خطی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

## ۱.۳. تبدیلهای خطی

اکنون به معرفی تبدیل خطی، یعنی مفهومی‌که دراکثر مطالب باقیماندهٔ این کتاب مورد مطالعه است، می‌پردازیم. چون ازاین پس اصطلاحات مبحث توابع مندرج درضمیمه را آزادانه به‌کار می‌بریم، مطالعه (یا مطالعهٔ مجدد) این مبحث را به‌خواننده توصیه می‌کنیم.

**تعریف.** فرض کنیم $V$ و $W$ دوفضای برداری برروی هیأت $F$ باشند. **یك تبدیل خطی از $V$ در $W$** تابعی از $V$ در $W$ است‌که به ازای همهٔ $\alpha$ ها و $\beta$ ها از $V$ و همهٔ اسکالرهای $c$ از $F$

$$T(c\alpha+\beta)=c(T\alpha)+T\beta.$$

**مثال۱.** اگر $V$ فضای برداری دلخواهی باشد، **تبدیل همانی** $I$ که با $I\alpha=\alpha$ تعریف می شود تبدیلی خطی از $V$ در $V$ است. **تبدیل صفر** $0$ که با $0\alpha=0$ تعریف می‌شود نیز تبدیلی خطی از $V$ در $V$ است.

**مثال۲.** فرض‌کنیم $F$ یك هیأت و $V$ فضای توابع چندجمله‌ای $f$ از $F$ در $F$ باشدکه به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k$$

www.riazisara.ir


هستند. بنابر تعریف قرارمی‌دهیم

$$(Df)(x)=c_1+2c_2x+\cdots+kc_kx^{k-1}.$$

دراین صورت، $D$ تبدیلی خطی از $V$ در $V$ ــ به‌نام تبدیل مشتق‌گیری ــ است.

**مثال۳.** فرض کنیم $A$ یك ماتریس $m\times n$ ثابت با درایه‌های متعلق به هیأت $F$ باشد. تابع $T$ که با $T(X)=AX$ تعریف می‌شود تبدیلی خطی از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$، و تابع $U$ که با $U(\alpha)=\alpha A$ تعریف می‌شود تبدیلی خطی از $F^m$ در $F^n$ است.

**مثال۴.** فرض کنیم ماتریس $m\times m$ ثابت $P$ با درایه‌های متعلق به هیأت $F$ و ماتریس $n\times n$ ثابت $Q$ بر روی $F$ داده شده باشند. تابع $T$ از فضای $F^{m\times n}$ درخودش را با $T(A)=PAQ$ تعریف می کنیم. دراین صورت، $T$ تبدیلی خطی از $F^{m\times n}$ در $F^{m\times n}$ است، زیرا

$$\begin{aligned}T(cA+B)&=P(cA+B)Q\\&=(cPA+PB)Q\\&=cPAQ+PBQ\\&=cT(A)+T(B).\end{aligned}$$

**مثال۵.** فرض کنیم $R$ هیأت اعداد حقیقی، و $V$ فضای همهٔ توابع پیوسته از $R$ در $R$ باشد. اگر $T$ را با

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)dt$$

تعریف کنیم، آنگاه $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $V$ است. تابع $Tf$ نه تنها پیوسته است بلکه دارای مشتق اول پیوسته نیزهست. خطی بودن انتگرال یکی ازخواص اساسی آن به شمار می‌آید.

خواننده درنشان دادن این حکم که تبدیلهای تعریف شده درمثالهای ۱، ۲، ۳، و ۵ تبدیلهایی خطی هستند، به مشکلی برنخواهد خورد. همچنان که مطالب بیشتری دربارهٔ تبدیلهای خطی می‌آموزیم. فهرست مثالها را نیز به طورقابل ملاحظه‌ای گسترش می‌دهیم.

تذکر این نکته مهم است که اگر $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد، آنگاه $T(0)=0$؛ این مطلب را می‌توان ازتعریف فهمید، زیرا

$$T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0).$$

این نکته برای کسی که برای اولین بار جبرخطی را مطالعه می کند، غالباً گیج کننده‌است، زیرا، احتمالا وی قبلا اصطلاح «تابع‌خطی» را به طورمتفاوتی به‌کار برده است. توضیحی

کوتاه سبب رفع این گیجی می‌شود. فرض کنیم $V$ فضای برداری $R^{1}$ باشد. دراین‌صورت، یك تبدیل خطی از $V$ در $V$ نوع خاصی تابع (با مقدار) حقیقی روی خط حقیقی $R$ است. در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، چنین تابعی احتمالاً خطی نامیده می‌شود هرگاه نمودارآن یك خط راست باشد. حال آنکه بنا بر تعریف ما، یك تبدیل خطی از $R^{1}$ در $R^{1}$، تابعی است از $R$ در $R$ که نمودارآن یك خط راست مار بر مبدأ باشد.

تبدیل خطی عمومی $T$ علاوه بر خاصیت $T(0)=0$ خاصیت دیگری هم دارد. چنین تبدیلی، ترکیبات خطی را «حفظ» می‌کند؛ یعنی، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهایی از $V$ و $c_1, \dots, c_n$ اسکالرهای داده شده‌ای باشند، آنگاه

$$T(c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n)=c_1(T\alpha_1)+\cdots+c_n(T\alpha_n).$$

این رابطه فوراً از تعریف نتیجه می‌شود. مثلاً،

$$\begin{aligned}T(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)&=c_1(T\alpha_1)+T(c_2\alpha_2)\\&=c_1(T\alpha_1)+c_2(T\alpha_2).\end{aligned}$$

**قضیهٔ ۱.** فرض کنیم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت $F$، و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای $V$ باشد. همچنین فرض کنیم $W$ فضایی برداری بر روی همان هیأت $F$ و $\beta_1, \dots, \beta_n$ بردارهای دلخواهی از $W$ باشند. دراین صورت، تنها یك تبدیل خطی $T$ از $V$ در $W$ وجود دارد که

$$T\alpha_j=\beta_j, \quad j=1, \dots, n.$$

**اثبات.** برای اثبات وجود تبدیلی خطی مانند $T$ با شرط $T\alpha_j=\beta_j$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، یك $n$ تایی $(x_1, \dots, x_n)$ وجود دارد به طوری که

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n.$$

به‌ازای این بردار $\alpha$، چنین تعریف می‌کنیم

$$T\alpha=x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n.$$

دراین صورت، $T$ قاعده‌ای است خوش تعریف برای مربوط ساختن هر بردار $\alpha$ از $V$ با بردار $T\alpha$ از $W$. بنا به‌تعریف، روشن است که به‌ازای هر $j$، $T\alpha_j=\beta_j$. برای اینکه ببینیم $T$ خطی است، فرض می‌کنیم

$$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$$

برداری در $V$ و $c$ اسکالر دلخواهی باشد. حال

$$c\alpha+\beta=(cx_1+y_1)\alpha_1+\cdots+(cx_n+y_n)\alpha_n$$

و لذا بنا بر تعریف

$$T(c\alpha+\beta)=(cx_۱-y_۱)\beta_۱+\cdots+(cx_n+y_n)\beta_n.$$

از سوی دیگر

$$c(T\alpha)+T\beta=c\sum_{i=۱}^{n}x_i\beta_i+\sum_{i=۱}^{n}y_i\beta_i$$
$$=\sum_{i=۱}^{n}(cx_i+y_i)\beta_i$$

و از این‌رو

$$T(c\alpha+\beta)=c(T\alpha)+T\beta.$$

اگر $U$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ بـا خاصیت $U\alpha_j=\beta_j$، $j=۱,\cdots,n$، باشد آنگاه به‌ازای بردار $\alpha=\sum_{i=۱}^{n}x_i\alpha_i$ داریم

$$U\alpha=U\Big(\sum_{i=۱}^{n}x_i\alpha_i\Big)$$
$$=\sum_{i=۱}^{n}x_i(U\alpha_i)$$
$$=\sum_{i=۱}^{n}x_i\beta_i$$

وبنابراین $U$ دقیقاً همان قاعدهٔ $T$ است که در بالا تعریف کردیم. این‌مطلب نشان می‌دهد که تبدیل خطی $T$، با خاصیت $T\alpha_j=\beta_j$، یکتاست. □

گرچه قضیهٔ ۱ بسیار ابتدایی است، اما چنان اساسی است که لازم دیدیم آن را به طور رسمی بیان کنیم. مفهوم تابع بسیار عمومی است. اگـر $V$ و $W$ دو فضای برداری (غیر صفر) باشند، تعداد زیادی تابع از $V$ در $W$ وجود دارد. قضیهٔ ۱ در تأکید براین واقعیت که توابع خطی بیش از حد، خاص هستند به‌ما کمك می‌کند.

**مثال ۶.** بردارهای

$$\alpha_۱=(۱,\ ۲)$$
$$\alpha_۲=(۳,\ ۴)$$

مستقل‌خطی‌اند وبنابراین پایه‌ای‌برای $R^۲$ تشکیل می‌دهند. بنابرقضیهٔ ۱ تبدیل‌خطی یکتایی از $R^۲$ در $R^۳$ وجود داردکه

$$T\alpha_۱=(۳,\ ۲,\ ۱)$$
$$T\alpha_۲=(۶,\ ۵,\ ۴).$$

درچنین حالتی باید بتوانیم $T(\epsilon_1)$ را بیابیم. اسکالرهای $c_1$ و $c_2$ را که $\epsilon_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ می‌یابیم و سپس از این مطلب استفاده می‌کنیم که $T\epsilon_1 = c_1T\alpha_1 + c_2T\alpha_2$. اگر $(1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 4)$، آنگاه $c_1 = -2$ و $c_2 = 1$. از این‌رو

$$T(1, 0) = -2(3, 2, 1) + (6, 5, 4)$$
$$= (0, 1, 2).$$

**مثال ۷.** فرض کنیم $T$ تبدیل خطی از فضای $m$ تاییهای $F^m$ درفضای $n$ تاییهای $F^n$ باشد. قضیهٔ ۱ می‌گوید که $T$ به‌طور یکتا توسط دنبالهٔ بردارهای $\beta_1, \dots, \beta_m$ با خاصیت

$$\beta_i = T\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

تعیین می‌شود. به‌طور خلاصه، $T$ توسط نگاره‌های بردارهای پایهٔ استانده به‌طور یکتا تعیین می‌شود. روش کار چنین است:

$$\alpha = (x_1, \dots, x_m)$$
$$T\alpha = x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m.$$

اگر $B$ ماتریس $m \times n$ی باشد که بردارهای سطری آن $\beta_1, \dots, \beta_m$ هستند، این رابطه بیان می‌کند که

$$T\alpha = \alpha B.$$

به‌بیان دیگر، اگر $\beta_i = (B_{i1}, \dots, B_{in})$، آنگاه

$$T(x_1, \dots, x_n) = [x_1 \cdots x_m]\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

این توصیفی بسیار صریح ازتبدیل خطی است. در بخش ۴.۳ به‌مطالعه‌ای عمیق در مورد رابطهٔ بین تبدیلهای خطی و ماتریسها می‌پردازیم و از این توصیف خاص $T\alpha = \alpha B$ هم استفاده نمی‌کنیم، زیرا در این رابطه ماتریس $B$ در سمت راست بردار $\alpha$ واقع است و این مطلب ممکن است به‌اشتباه‌کاریهایی بینجامد. نکتهٔ اصلی در این مثال این است که می‌توانیم توصیفی صریح و نسبتاً ساده ازهمهٔ تبدیلهای خطی از $F^m$ در $F^n$ به‌دست‌دهیم.

اگر $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد، آنگاه برد $T$ نه تنها زیر مجموعه‌ای از $W$ بلکه زیرفضایی از آن است. گیریم $R_T$ برد $T$، یعنی مجموعهٔ همهٔ بردارهای $\beta$ در $W$ باشد که به‌ازای آن عنصری مانند $\alpha$ در $V$ هست که $\beta = T\alpha$. فرض کنیم $\beta_1$ و $\beta_2$ در $R_T$ باشند و $c$ یك اسکالر. بردارهایی مانند $\alpha_1$ و $\alpha_2$ در $V$ وجود دارند به‌طوری که $T\alpha_1 = \beta_1$ و $T\alpha_2 = \beta_2$. به علت خطی بودن $T$

$$T(c\alpha_1+\alpha_2)=cT\alpha_1+T\alpha_2$$
$$=c\beta_1+\beta_2$$

که نشان می‌دهد $c\beta_1+\beta_2$ نیز در $R_T$ است.

زیرفضای جالب دیگر وابسته به‌تبدیل خطی $T$، مجموعهٔ $N$ متشکل از بردارهای $\alpha$ در $V$ با شرط $T\alpha=0$ است. این مجموعه زیرفضایی از $V$ است، زیرا

(الف) $T(0)=0$، بنابراین $N$ غیرتهی است؛

(ب) اگر $T\alpha_1=T\alpha_2=0$، آنگاه

$$T(c\alpha_1+\alpha_2)=cT\alpha_1+T\alpha_2$$
$$=c0+0$$
$$=0$$

و بنابراین $c\alpha_1+\alpha_2$ در $N$ قرار دارد.

**تعریف.** فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری بر روی هیأت $F$، و $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد. **فضای پوچ**[1] $T$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ بردارهای $\alpha$ از $V$ با شرط $T\alpha=0$.

هرگاه بعد $V$ متناهی باشد، **رتبهٔ** $T$ بعدبرد $T$ است و **پوچی**[2] $T$ بعد فضای پوچ $T$.

قضیهٔ زیر یکی از مهمترین قضایای جبر خطی است.

**قضیهٔ ۲.** فرض‌کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری بر‌روی هیأت $F$، و $T$ تبدیلی‌خطی از $V$ در $W$ باشد. اگر بعد $V$ متناهی باشد، آنگاه

$$\text{بعد}\ (V) = \text{پوچی}\ (T) + \text{رتبهٔ}\ (T).$$

**اثبات.** گیریم $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ پایه‌ای برای $N$، فضای پوچ $T$، باشد. بردارهایی چون $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n$ در $V$ وجود دارند بـه‌طوری‌کـه $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. اکنون ثابت می‌کنیم $\{T\alpha_{k+1},\dots,T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای برد $T$ است. بردارهای $T\alpha_1,\dots,T\alpha_n$ یقیناً برد $T$ را پدید می‌آورند؛ و چـون به‌ازای هر $j\leqslant k$، $T\alpha_j=0$، می‌بینیم که پدیدآورنده برد $T\alpha_{k+1},\dots,$ و $T\alpha_n$ هستند. برای اثبات استقلال خطی این بردارها، فرض‌کنیم اسکالرهایی چون $c_i$ وجود دارند که

$$\sum_{i=k+1}^{n} c_i(T\alpha_i)=0.$$

این رابطه بیان می‌کند که

---

۱. این فضا را هسته‌ی $T$ هم می‌نامند.ــم.

۲. پوچی را بعد هسته هم می‌نامند.ــم.

$$T\Big(\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i\Big)=0,$$

ودرنتیجه بردار $\alpha=\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i$ درفضای پوچ $T$ است. چون $\alpha_1$، ...، $\alpha_k$ پایه‌ای برای $N$ تشکیل می‌دهند، باید اسکالرهایی مانند $b_1$، ...، $b_k$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\alpha=\sum_{i=1}^{k} b_i\alpha_i .$$

پس

$$\sum_{i=1}^{k} b_i\alpha_i-\sum_{j=k+1}^{n} c_j\alpha_j=0$$

وچون $\alpha_1$، ...، $\alpha_n$ مستقل خطی هستند، باید داشته باشیم

$$b_1=\cdots=b_k=c_{k+1}=\cdots=c_n=0 .$$

اگر $r$ رتبهٔ $T$ باشد، این واقعیت که $T\alpha_{k+1}$، ...، $T\alpha_n$ پایه‌ای برای برد $T$ تشکیل می‌دهند، تصریح می‌کند که $r=n-k$. حال چون $k$ پوچی $T$، و $n$ بعد $V$ است، اثبات تمام است. □

**قضیهٔ ۳.** اگر $A$ ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت $F$ باشد، آنگاه

$$\text{رتبهٔ سطری }(A)=\text{رتبهٔ ستونی }(A) .$$

**اثبات.** فرض‌کنیم $T$ تبدیل‌خطی از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$ تعریف‌شده با $T(X)=AX$ باشد. فضای پوچ $T$ عبارت است از فضای جواب دستگاه $AX=0$؛ یعنی مجموعه همهٔ ماتریسهای ستونی $X$ به‌طوری‌که $AX=0$. برد $T$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ستونی $m\times 1$، مانند $Y$، است که $AX=Y$ جوابی برای مجهول $X$ داشته باشد. اگر $A_1$، ...، $A_n$ ستونهای ماتریس $A$ باشند، آنگاه

$$AX=x_1A_1+\cdots+x_nA_n .$$

بنابراین، برد $T$ عبارت است از زیرفضای پدید آمده توسط ستونهای $A$. به‌بیان‌دیگر، برد $T$ فضای ستونی $A$ است. بنابراین،

$$\text{رتبهٔ }(T)=\text{رتبهٔ ستونی }(A).$$

قضیهٔ ۲ بیان می‌کند‌که اگر $S$ فضای جواب دستگاه $AX=0$، باشد آنگاه

$$n=\text{رتبهٔ ستونی }(A)+\text{بعد }(S) .$$

اکنون به‌مثال ۱۵ از فصل ۲ رجوع می‌کنیم. درآنجا بررسی‌مان نشان داد که اگر $r$ بعد فضای سطری $A$ باشد، آنگاه فضای جواب $S$ پایه‌ای متشکل از $n-r$ بردار دارد:

$$\text{. رتبهٔ سطری } (A) - n = \text{بعد } (S)$$

اکنون واضح است که

$$\square \ \text{. رتبهٔ ستونی } (A) = \text{رتبهٔ سطری } (A)$$

اثبات قضیهٔ ۳ که هم‌اکنون ارائه شد، بستگی به‌محاسباتی صریح دربارهٔ دستگاههای معادلات خطی دارد. اثباتی بیشتر ادراکی هم وجود دارد که براین‌گونه محاسبات متکی نیست. چنین اثباتی را در بخش ۷.۳ عرضه می‌کنیم.

## تمرین

۱. کدام‌یك از توابع $T$ از $R^2$ در $R^2$ که درزیرآمده‌اند تبدیلی خطی است؟

(الف) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$؛

(ب) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$؛

(پ) $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$؛

(ت) $T(x_1, x_2) = (\sin x_1, x_2)$؛

(ث) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$.

۲. برد، رتبه، فضای پوچ، وپوچی تبدیل صفر وهمچنین تبدیل همانی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ را بیابید.

۳. برد وفضای پوچ تبدیل مشتق‌گیری در مثال ۲ را توصیف کنید. همین‌کار را برای تبدیل انتگرال‌گیری درمثال ۵ انجام دهید.

۴. آیا تبدیلی خطی‌مانند $T$ از $R^3$ در $R^2$ وجود داردکه $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ و $T(1, 1, 1) = (0, 1)$؟

۵. اگر

$$\alpha_1 = (1, -1), \qquad \beta_1 = (1, 0)$$
$$\alpha_2 = (2, -1), \qquad \beta_2 = (0, 1)$$
$$\alpha_3 = (-3, 2), \qquad \beta_3 = (1, 1)$$

آیا تبدیلی خطی مانند $T$ از $R^2$ در $R^2$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای $i = 1, 2, 3$، $T\alpha_i = \beta_i$؟

۶. تبدیل خطی $T$ از $F^2$ در $F^2$ را که توسط $T\epsilon_1 = (a, b)$ و $T\epsilon_2 = (c, d)$ تعریف

می‌شود به‌طور صریح (نظیر تمرینهای ۱ و ۲) توصیف کنید.

۰۷ فرض کنیم $F$ زیرهیأتی ازاعداد مختلط و $T$ تابعی از $F^3$ در $F^3$ باشدکه توسط

$$T(x_1, x_2, x_3)=(x_1-x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2,\ -x_1-2x_2+2x_3)$$

تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهیدکه $T$ تبدیلی خطی است.

(ب) اگر $(a, b, c)$ برداری در $F^3$ باشد، تحت چه شرایطی روی $a$، $b$، و $c$ این بردار در برد $T$ قرار دارد؟ رتبهٔ $T$ چیست؟

(پ) $a$، $b$، و $c$ چه شرایطی داشته باشند تا بردار $(a, b, c)$ در فضای پـوچ $T$ قرار گیرد؟ پوچی $T$ چیست؟

۰۸ تبدیلی خطی از $R^3$ در $R^3$ را کـه زیرفضـای پدید آمـده توسط $(1, 0, -1)$ و $(1, 2, 2)$ بردش باشد، به‌طور صریح توصیف کنید.

۰۹ فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت $F$، و $B$ ماتریس $n\times n$ ثابتی باشد. اگر

$$T(A)=AB-BA,$$

نشان دهید $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $V$ است.

۱۰. فرض کنید $V$ مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط باشد و به‌عنوان یك فضای برداری برروی هیأت اعداد حقیقی (با اعمال معمولی) درنظر گرفته شود. تابعی از $V$ در $V$ بیابید که یك تبدیل خطی روی این فضای برداری باشد، اما تبدیلی خطی روی $C^1$ نباشد، یعنی خطی مختلط نباشد.

۱۱. فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای $n\times 1$ برروی هیـأت $F$، و $W$ فضای ماتریسهای $m\times 1$ برروی همین هیأت باشد. فرض کنید $A$ ماتریس $m\times n$ ثابتی برروی $F$، و $T$ تبدیل خطی از $V$ در $W$ تعریف شده توسط $T(X)=AX$ باشد. ثابت کنید $T$ تبدیل صفراست اگر و تنها اگر $A$ ماتریس صفر باشد.

۱۲. فرض کنید $V$ یك فضای برداری $n$بعـدی برروی هیأت $F$ باشد و $T$ یـك تبدیل خطی از $V$ در $V$ با برد وفضای پوچ مساوی. ثابت کنید $n$ زوج است. (آیا می‌توانید مثالی ازچنین تبدیل خطی بیاورید؟)

۱۳. فرض کنید $V$ فضایی برداری و $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $V$ باشد. ثابت کنید دوحکم زیر دربارهٔ $T$ هم‌ارزند.

(الف) اشتراك برد $T$ وفضای پوچ $T$ زیرفضای صفر $V$ است.
(ب) اگر $T(T\alpha)=0$، آنگاه $T\alpha=0$.

## ۲.۳. جبر تبدیلهای خطی

درمطالعهٔ تبدیلهای خطی از $V$ در $W$، این مطلب اهمیت اساسی داردکه مجموعهٔ این تبدیلها ساختارعادی یك فضای برداری را به‌ارث می‌برد. ساختار جبری مجموعهٔ تبدیلهای خطی از فضای $V$ درخودش، از این هم غنی‌تر است؛ زیرا ترکیب عادی توابع، عمل «ضربی» هم برای این‌گونه تبدیلها فراهم می‌آورد. در این بخش، به‌تجسس این مفاهیم می‌پردازیم.

**قضیهٔ ۴.** فرض‌کنیم $V$ و $W$ دوفضای برداری بر روی هیأت $F$، و $T$ و $U$ دو تبدیل خطی از $V$ در $W$ باشند. تابع $(T+U)$ که با

$$(T+U)(\alpha)=T\alpha+U\alpha$$

تعریف می‌شود تبدیلی خطی از $V$ در $W$ است. اگر $c$ عنصری دلخواه از $F$ باشد، تابع $(cT)$ که با

$$(cT)(\alpha)=c(T\alpha)$$

تعریف می‌شود نیز تبدیلی خطی از $V$ در $W$ است. مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی از $V$ در $W$ همراه با اعمال جمع وضرب اسکالری که در بالا تعریف شد، فضایی برداری‌برروی هیأت $F$ تشکیل می‌دهند.

اثبات. فرض می کنیم $T$ و $U$ دو تبدیل خطی از $V$ در $W$ باشند، و $(T+U)$ مانند بالا تعریف شده باشد. دراین صورت

$$\begin{aligned}(T+U)(c\alpha+\beta)&=T(c\alpha+\beta)+U(c\alpha+\beta)\\&=c(T\alpha)+T\beta+c(U\alpha)+U\beta\\&=c(T\alpha+U\alpha)+(T\beta+U\beta)\\&=c(T+U)(\alpha)+(T+U)(\beta)\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $(T+U)$ تبدیلی خطی است. به‌طور مشابه

$$\begin{aligned}(cT)(d\alpha+\beta)&=c[T(d\alpha+\beta)]\\&=c[d(T\alpha)+T\beta]\\&=cd(T\alpha)+c(T\beta)\\&=d[c(T\alpha)]+c(T\beta)\\&=d[(cT)\alpha]+(cT)\beta\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $(cT)$ نیز تبدیلی خطی است.

برای این‌که نشان دهیم مجموعهٔ تبدیلهای خطی از $V$ در $W$ (همراه با دوعمل مذکور) فضایی برداری است، باید هریك از شرایط جمع برداری وضرب اسکالری را مستقیماً بررسی کنیم. این‌کار را به‌خواننده واگذار می‌کنیم، وخود به‌این توضیح بسنده می‌کنیم که: بردار صفردراین فضا تبدیل صفراست که هر بردار $V$ را به‌بردارصفر $W$ می‌فرستد؛ بعلاوه، هریك ازخواص این دوعمل از خاصیت متناظرمربوط به‌اعمال فضای $W$ نتیجه می‌شود. □

شاید بهتر باشد راه دیگرنگرش به‌این قضیه را هم ذکرکنیم. اگر جمع وضرب اسکالری را مانند بالا تعریف کنیم، آنگاه مجموعهٔ همهٔ توابع از $V$ در $W$ فضایی است برداری برروی هیأت $F$. این مطلب ربطی به‌این‌که $V$ فضای برداری است ندارد؛ کافی است $V$ مجموعه‌ای غیرتهی باشد. هرگاه $V$ فضایی برداری باشد، می‌توانیم تبدیلهایی خطی از $V$ در $W$ را هم تعریف کنیم، و در این صورت قضیهٔ ۴ حکم می‌کند که تبدیلهای خطی زیرفضایی از فضای همهٔ توابع از $V$ در $W$ هستند.

فضای تبدیلهای خطی از $V$ در $W$ را با $L(V, W)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که $L(V, W)$ تنها زمانی تعریف می‌شود که $V$ و $W$ فضاهایی برداری برروی هیأتی واحد باشند.

**قضیهٔ ۵.** فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری برروی هیأت $F$، بترتیب، با ابعاد $n$ و $m$ باشند. در این صورت بعد فضای $L(V,W)$ متناهی و برابر $mn$ است.

**اثبات.** فرض کنیم

$$\mathcal{B}'=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

بترتیب، پایه‌های مرتبی برای $V$ و $W$ باشند. به‌ازای هرجفت از اعداد صحیح $(p\ ,\ q)$ با شرایط $1 \leqslant p \leqslant m$ و $1 \leqslant q \leqslant n$، تبدیل خطی $E^{p,q}$ از $V$ در $W$ را با

$$E^{p,q}(\alpha_i)=\begin{cases}0 & \text{هرگاه } i\neq q\\ \beta_p & \text{هرگاه } i=q\end{cases}$$

$$=\delta_{iq}\beta_p$$

تعریف می‌کنیم. بنابرقضیهٔ ۱، تبدیل خطی یکتایی از $V$ در $W$ هست که دراین‌شرایط‌صدق می‌کند. ادعا این است‌که $mn$ تبدیل $E^{pq}$ پایه‌ای را برای $L(V, W)$ تشکیل می‌دهند.

فرض کنیم $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد. به‌ازای هر $j$ که $1 \leqslant j \leqslant n$، گیریم $A_{1j}$، $\cdots$، $A_{mj}$ مختصات بردار $T\alpha_j$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ باشند؛ یعنی

$$T\alpha_j=\sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p\ . \qquad (۳-۱)$$

می‌خواهیم نشان دهیم

$$T=\sum_{p=1}^{m}\ \sum_{q=1}^{n} A_{pq}E^{p,q}\ . \qquad (۲-۳)$$

فرض‌کنیم $U$ تبدیل خطی موجود درسمت راست تساوی (۳-۲) باشد. آنگاه، به‌ازای هر $j$

$$\begin{aligned}U\alpha_j &= \sum_p\sum_q A_{pq}E^{p,q}(\alpha_j)\\ &= \sum_p\sum_q A_{pq}\delta_{jq}\beta_p\\ &= \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p\\ &= T\alpha_j\end{aligned}$$

و از اینجا $U=T$. حال (۳-۲) نشان می‌دهد که $E^{p,q}$ها $L(V,W)$ را پدید می‌آورند. باید ثابت کنیم که اینها مستقل خطی نیزهستند. اما، این مطلب ازآنچه در بالا انجام شد روشن است؛ زیرا، اگر تبدیل

$$U=\sum_p\sum_q A_{pq}E^{p,q}$$

تبدیل صفر باشد، آنگاه به‌ازای همهٔ $j$ها، $U\alpha_j=0$، پس

$$\sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p=0\ .$$

حال استقلال $\beta_p$ها ایجاب می‌کندکه به‌ازای هر $p$ و $j$، $A_{pj}=0$. □

**قضیهٔ ۶.** فرض کنیم $V$، $W$، و $Z$ سه‌فضای برداری بر روی هیأت $F$ باشند. اگر $T$ تبدیلی‌خطی از $V$ در $W$ و $U$ تبدیلی خطی از $W$ در $Z$ باشد،آنگاه تابع مرکب $UT$ که با $(UT)(\alpha)=U(T(\alpha))$ تعریف می‌شود، تبدیلی خطی از $V$ در $Z$ است.

اثبات.

$$\begin{aligned}(UT)(c\alpha+\beta) &= U[T(c\alpha+\beta)]\\ &= U(cT\alpha+T\beta)\\ &= c[U(T\alpha)]+U(T\beta)\\ &= c(UT)(\alpha)+(UT)(\beta)\ . \ \square\end{aligned}$$

درآنچه‌که به‌دنبال می‌آید عمدتاً سروکار ما با تبدیلهای خطی از فضایی برداری

درخودش است. چون مکرراً ناگزیر از نوشتن «$T$ تبدیلی خطی از $V$ در $V$ است» هستیم، به‌جای آن عبارت «$T$ عملگری خطی روی $V$ است» را می‌نویسیم.

**تعریف.** اگر $V$ فضایی برداری بر روی هیأتی چون $F$ باشد، **یك عملگرخطی روی** $V$ عبارت است از تبدیلی خطی از $V$ در $V$.

درمورد قضیهٔ ۶، درحالتی که $V=W=Z$ ودر نتیجه $U$ و $T$ دوعملگر خطی‌روی فضای $V$ هستند، دیده می‌شود که ترکیب $UT$ هم عملگری خطی روی $V$ است. بنابراین فضای $L(V, V)$ یك «عمل ضرب» هم دارد که توسط عمل ترکیب روی‌آن تعریف‌می‌شود. دراین حالت، عملگر $TU$ نیز تعریف می‌شود، ولی باید توجه داشت‌که عموماً $UT \neq TU$؛ یعنی، $UT-TU \neq 0$. این نکته هم باید مورد توجه خاص قرار بگیرد که اگر $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد، آنگاه می‌توان $T$ را با $T$ ترکیب کرد. لذا نماد $T^2=TT$، و در حالت‌کلی به‌ازای $n=1, 2, 3, \cdots$، نماد: $T^n=T\cdots T$ ($n$بار) رابه‌کارخواهیم برد و اگر $T\neq 0$، بنابرتعریف قرارمی‌دهیم $T^0=I$.

**لم.** فرض‌کنیم $V$ فضایی برداری بر روی هیأت $F$ باشد. اگر $U$، $T_1$، و $T_2$ عملگرهایی خطی روی $V$ و $c$ عضوی از $F$ باشد، آنگاه

(الف) $IU=UI=U$؛

(ب) $U(T_1+T_2)=UT_1+UT_2$؛ $(T_1+T_2)U=T_1U+T_2U$؛

(پ) $c(UT_1)=(cU)T_1=U(cT_1)$.

اثبات. (الف) این خاصیت تابع همانی، بدیهی است و بیان آن در اینجا صرفاً برای تأکید است.

(ب)
$$\begin{aligned}[U(T_1+T_2)](\alpha) &= U[(T_1+T_2)(\alpha)] \\ &= U(T_1\alpha+T_2\alpha) \\ &= U(T_1\alpha)+U(T_2\alpha) \\ &= (UT_1)(\alpha)+(UT_2)(\alpha)\end{aligned}$$

و بنابراین $U(T_1+T_2)=UT_1+UT_2$. همچنین

$$\begin{aligned}[(T_1+T_2)U](\alpha) &= (T_1+T_2)(U\alpha) \\ &= T_1(U\alpha)+T_2(U\alpha) \\ &= (T_1U)(\alpha)+(T_2U)(\alpha).\end{aligned}$$

پس، $(T_1+T_2)U=T_1U+T_2U$. (خواننده ممکن است توجه‌کرده باشدکه در اثبات این دو قانون پخش‌پذیری، از خطی بودن $T_1$ و $T_2$ استفاده نشد؛ دراثبات (پ) هم‌خطی

بودن $U$ به‌کار نمی‌رود.)

(پ) اثبات این قسمت به‌خواننده واگذار می‌شود. □

مضمون این لم‌ومضمون قسمتی ازقضیهٔ ۵نشان می‌دهندکه فضای‌برداری $L(V, V)$ همراه با عمل ترکیب همان چیزی است‌که به‌جبرخطی بـا عنصرهمانی مشهور است. این مطلب را درفصل ۴ مورد بحث قرارخواهیم داد.

**مثال ۸.** اگر $A$ ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به $F$ باشد، تبدیلی خطـی $T$ از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$ را داریم‌که بـا $T(X)=AX$ تعریف می‌شود؛ و اگـر $B$ ماتریسی $p\times m$ باشد، تبدیل خطی $U$ از $F^{m\times 1}$ در $F^{p\times 1}$ را هم داریم که توسط $U(Y)=BY$ تعریف می‌شود. ترکیب $UT$ بسادگی قابل توصیف است:

$$\begin{aligned}(UT)(X)&=U(T(X))\\&=U(AX)\\&=B(AX)\\&=(BA)X.\end{aligned}$$

پس، $UT$ عبارت است از «عمل ضرب چپ درماتریس حاصل‌ضرب $BA$».

**مثال ۹.** فرض‌کنیم $F$ یك هیأت و $V$ فضای برداری همهٔ توابع چندجمله‌ای از $F$ در $F$ باشد. گیریـم $D$ عملگـر مشتق‌گیـری تعریف شده در مثال ۲ و $T$ عملگـر خطی «ضرب در $x$»:

$$(Tf)(x)=xf(x)$$

باشد. دراین‌صورت، $DT\neq TD$. درواقع، اگر $I$ عملگرهمانی باشد، خواننده بایدبتواند $DT-TD=I$ را بآسانی اثبات‌کند.

هرچند «ضرب» تعریف شده روی $L(V, V)$ جابجایی نیست، اما با اعمال فضای برداری $L(V, V)$ رابطهٔ زیبایی دارد.

**مثال ۱۰.** فرض‌کنیم $\mathscr{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای فضـای برداری $V$ باشد. عملگرهای خطی $E^{p,q}$ راکه دراثبات قضیهٔ ۵ پدید آمدند، درنظرمی‌گیریم:

$$E^{p,q}(\alpha_i)=\delta_{iq}\alpha_p\,.$$

این $n^2$ عملگـرخطـی پایه‌ای بـرای فضای عملگرهای خطـی روی $V$ تشکیل می‌دهند. $E^{p,q}E^{r,s}$ چیست؟ داریم

$$\begin{aligned}(E^{p,q}E^{r,s})(\alpha_i) &= E^{p,q}(\delta_{is}\alpha_r)\\ &= \delta_{is}E^{p,q}(\alpha_r)\\ &= \delta_{is}\delta_{rq}\alpha_p .\end{aligned}$$

بنا براین،

$$E^{p,q}E^{r,s} = \begin{cases} 0 & \text{هرگاه } r \neq q \\ E^{p,s} & \text{هرگاه } r = q \end{cases}$$

گیریم $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. دراثبات قضیهٔ ۵ نشان دادیم‌که اگر

$$A_j = [T\alpha_j]_{\mathcal{B}}$$
$$A = [A_1, \cdots, A_n]$$

آنگاه

$$T = \sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q} \quad .$$

اگر

$$U = \sum_r \sum_s B_{rs}E^{r,s}$$

عملگرخطی دیگری روی $V$ باشد، آنگاه آخرین لم ایجاب می‌کندکه

$$\begin{aligned}TU &= (\sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q})\ (\sum_r \sum_s B_{rs}E^{r,s})\\ &= \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s A_{pq}B_{rs}E^{p,q}E^{r,s} .\end{aligned}$$

همچنان‌که مشاهده‌کرده‌ایم، تنها جملاتی‌که در این مجموع بسیار بزرگ باقی می‌مانند جملاتی هستند که برای آنها $q=r$، که در این صورت چون $E^{p,r}E^{r,s}=E^{p,s}$ داریم

$$\begin{aligned}TU &= \sum_p \sum_s (\sum_r A_{pr}B_{rs})E^{p,s}\\ &= \sum_p \sum_s (AB)_{ps}E^{p,s} .\end{aligned}$$

پس، نتیجهٔ عمل ترکیب $T$ و $U$ ضرب ماتریسهای $A$ و $B$ است.

در بحث راجع به‌اعمال جبری روی تبدیلهای خطی، تاکنون چیزی درمورد معکوس‌پذیری نگفته‌ایم. دراین مورد یك پرسش مشخص وجالب این است: برای کدام عملگر خطی $T$ روی فضای $V$، عملگری خطی چون $T^{-1}$ وجود دارد که $TT^{-1}=T^{-1}T=I$؟

تابع $T$ از $V$ در $W$ **معکوس‌پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه یک تابع $U$ از $W$ در $V$ یافت شود به طوری که $UT$ تابع همانی روی $V$، و $TU$ تابع همانی روی $W$ باشد. اگر $T$ معکوس‌پذیر باشد، تابع $U$ یکتا است و با $T^{-1}$ نشان داده می‌شود. (ر. ك. ضمیمه.) بعلاوه، $T$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر

۱. $T$ یك به‌یك باشد؛ یعنی از $T\alpha = T\beta$ نتیجه بشود که $\alpha = \beta$؛
۲. $T$ پوشا باشد؛ یعنی برد $T$ (تمام) $W$ باشد.

**قضیهٔ ۷.** فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری بر روی هیأت $F$ و $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد. اگر $T$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه تابع معکوس آن، $T^{-1}$، تبدیلی خطی از $W$ بروی $V$ است.

اثبات. حرفهایمان را برای تأکید بریك نکته تکرار می‌کنیم. وقتی $T$ یك به‌یك و پوشا باشد، یك تابع معکوس $T^{-1}$ وجود دارد که به‌طور یکتا تعیین می‌شود و $W$ را بروی $V$ چنان می‌نگارد که $T^{-1}T$ تابع همانی روی $V$، و $TT^{-1}$ تابع همانی روی $W$ باشد. مطلبی که در اینجا باید ثابت کنیم این است که اگر تابع خطی $T$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه معکوسش $T^{-1}$ نیز خطی است.

گیریم $\beta_1$ و $\beta_2$ بردارهایی از $W$، و $c$ یك اسکالر باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$T^{-1}(c\beta_1+\beta_2)=cT^{-1}\beta_1+T^{-1}\beta_2.$$

فرض کنیم به‌ازای $i=1, 2$، $\alpha_i = T^{-1}\beta_i$؛ یعنی، $\alpha_i$ یکتا بردار در $V$ باشد که $T\alpha_i=\beta_i$. چون $T$ خطی است

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1+\alpha_2) &= cT\alpha_1+T\alpha_2 \\ &= c\beta_1+\beta_2 . \end{aligned}$$

پس، $c\alpha_1+\alpha_2$ یکتا بردار در $V$ است که توسط $T$ به $c\beta_1+\beta_2$ فرستاده می‌شود، لذا

$$\begin{aligned} T^{-1}(c\beta_1+\beta_2) &= c\alpha_1+\alpha_2 \\ &= c(T^{-1}\beta_1)+T^{-1}\beta_2 \end{aligned}$$

و $T^{-1}$ خطی است. □

فرض کنیم تبدیل خطی معکوس‌پذیر $T$ از $V$ بروی $W$ و تبدیل خطی معکوس‌پذیر $U$ از $W$ بروی $Z$ داده شده‌اند. آنگاه، $UT$ معکوس‌پذیر است و $(UT)^{-1}=T^{-1}U^{-1}$. این حکم، نه‌نیازی به‌خطی بودن $UT$ دارد ونه مستلزم بررسی جداگانهٔ یك به‌یك وپوشا بودن آن است. فقط لازم است نشان دهیم که $T^{-1}U^{-1}$ هم معکوس چپ و هم معکوس راست $UT$ است.

اگر $T$ خطی باشد، آنگاه $T(\alpha-\beta)=T\alpha-T\beta$؛ از این‌رو، $T\alpha=T\beta$ اگر و

تنها اگر $T(\alpha-\beta)=0$. ایـن مطلب، تحقیق یك به‌یك بودن $T$ را بسیار ساده می‌کند. تبدیل‌خطی $T$ را **نامنفرد** نامیم، هرگاه $T\gamma=0$ ایجاب کند که $\gamma=0$؛ یعنی هرگاه‌فضای پوچ $T$ برابر با $\{0\}$ باشد. بدیهی است که $T$، یك به‌یك است اگـر و تنها اگر $T$ نامنفرد باشد. تعمیم ایـن تذکر این است کـه تبدیلهای خطی نامنفرد، آنهایی هستند که استقلال خطی را حفظ می‌کنند.

**قضیهٔ ۸.** فرض کنیم $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد. آنگاه، $T$ نامنفرد است اگر و تنها اگر $T$ هرزیر مجموعهٔ مستقل خطی از $V$ را بروی یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی از $W$ ببرد.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم $T$ نامنفرد باشد و $S$ را یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی‌از $V$ می‌گیریم. اگر $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_k$ بردارهایی از $S$ باشند، آنگاه $T\alpha_1$، $\cdots$، $T\alpha_k$ مستقل خطی هستند؛ زیرا اگر

$$c_1(T\alpha_1)+\cdots+c_k(T\alpha_k)=0$$

آنگاه

$$T(c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k)=0$$

وچون $T$ نامنفرد است،

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k=0$$

که ازآن به‌علت مستقل بودن مجموعهٔ $S$ نتیجه می‌شود هر $c_i$ برابرصفراست. این استدلال نشان می‌دهد که نگارهٔ $S$ تحت $T$ مجموعه‌ای است مستقل خطی.

فرض کنیم $T$ هرزیرمجموعهٔ مستقل خطـی را بروی یك زیـرمجموعهٔ مستقل خطی ببرد. گیریم $\alpha$ برداری غیرصفر از $V$ باشد. آنگاه، مجمـوعهٔ $S$ متشکل از بـردار $\alpha$ مستقل است. نگارهٔ $S$ مجموعـه‌ای است متشکل ازبردار $T\alpha$ و ایـن مجموعه نیـزمستقل است. بنابراین، $T\alpha\neq 0$، زیرا مجموعهٔ تك‌عنصری بردار صفر وابسته است. ایـن مطلب نشان می‌دهد که فضای پوچ $T$ همان زیرفضای صفراست؛ یعنی، $T$ نامنفرد است. □

**مثال ۱۱.** فرض‌کنیم $F$ زیرهیأتی ازاعداد مختلط (یا هیأتی با سرشت‌نمای‌صفر)، و $V$ فضای توابع چندجمله‌ای برروی $F$ باشد. دوعملگرمشتق‌گیری، $D$، و «ضرب در $x$»، $T$، درمثال ۹ را درنظرمی‌گیریم. چون $D$ همهٔ ثابتها را به ۰ می‌فرستد، منفرد است. گرچه بعد $V$ متناهی نیست، اما برد $D$ تمام $V$ است، واین امکان هست که معکوسی راست‌برای $D$ تعریف شود. مثلاً، اگر $E$ عملگرانتگرال‌گیری نامعین باشد:

$$E(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)=c_0x+\frac{1}{2}c_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}$$

آنگاه $E$ عملگری خطی روی $V$ است و $DE=I$. از طرف دیگر $ED\neq I$، زیرا $ED$ همهٔ ثابتها را به ۰ می‌فرستد. عملگر $T$ حالتی شبیه به عکس این حالت را دارد. اگر به‌ازای همهٔ $x$ها $xf(x)=0$، آنگاه $f=0$. ازاین‌رو، $T$نامنفرد است، و یافتن‌معکوسی چپ برای $T$ ممکن. مثلاً، اگر $U$ عملگر «حذف جملهٔ ثابت و تقسیم آن بر $x$» باشد:

$$U(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)=c_1+c_2x+\cdots c_nx^{n-1}$$

آنگاه، $U$ عملگری خطی روی $V$ است و $UT=I$. ولی $TU\neq I$، زیرا هرتابع واقع دربرد $TU$، دربرد $T$ یعنی درفضای توابع چندجمله‌ای $f$ با شرط $f(0)=0$ نیزهست.

**مثال ۱۲.** فرض‌کنیم $F$ یك هیأت و $T$ عملگرخطی روی $F^2$ تعریف شده با

$$T(x_1, x_2)=(x_1+x_2, x_1)$$

باشد. دراین صورت، $T$ نامنفرد است، زیرا اگر $T(x_1, x_2)=0$ داریم

$$x_1+x_2=0$$
$$x_1=0$$

وبنابراین $x_1=x_2=0$. همچنین مشاهده می‌شودکه $T$ پوشاست؛ زیرا، فرض‌کنیم $(z_1, z_2)$ بردار دلخواهی از $F^2$ باشد. برای اینکه نشان دهیم $(z_1, z_2)$ در برد $T$ است، باید اسکالرهایی چون $x_1$ و $x_2$ بیابیم که

$$x_1+x_2=z_1$$
$$x_1=z_2\,.$$

واضح است که جواب عبارت است از $x_1=z_2$ و $x_2=z_1-z_2$. محاسبهٔ اخیرفرمول صریحی برای $T^{-1}$ به‌دست می‌دهد،که چنین است:

$$T^{-1}(z_1, z_2)=(z_2, z_1-z_2).$$

درمثال ۱۱ دیدیم که یك تبدیل خطی ممکن است بدون پوشا بودن نامنفرد، و نیز بدون نامنفرد بودن پوشا باشد. مثال اخیرحالت مهمی را نشان می‌دهدکه درآن این‌واقعه نمی‌تواند روی دهد.

**قضیهٔ ۹.** فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری بـا بعد متناهی برروی هیأت $F$ باشند و $\dim V=\dim W$. اگر $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد، احکام زیرهم‌ارزند:

(۱) $T$ معکوس‌پذیر است.

(۲) $T$ نامنفرد است.

(۳) $T$ پوشا است؛ یعنی برد $T$ برابر با $W$ است.

اثبات. گیریم بعد $(W)=$ بعد$(V)=n$. بنابرقضیهٔ ۲

$$\text{رتبهٔ}\,(T) + \text{پوچی}\,(T) = n.$$

اکنون $T$ نامنفرد است اگر وتنها اگر ۰ = پوچی $(T)$، و (چون $n = \dim W$) برد $T$ برابر با $W$ است اگروتنها اگر $n$ = رتبهٔ $(T)$. چون مجموع رتبه وپوچی برابر $n$ است، پوچی دقیقاً وقتی ۰ است که رتبه برابر $n$ باشد. بنابراین، $T$ نامنفرد است اگر و تنها اگر $T(V) = W$. لذا، اگریکی ازشرایط (۲) یا (۳) برقرار باشد، دیگری هم برقرار و $T$ معکوس‌پذیراست. □

به‌خواننده هشدار می‌دهیم که قضیهٔ ۹ را جزدرحالت متناهی بودن بعد و جز با شرط $\dim V = \dim W$ به‌کار نبندد. تحت فرضهای قضیهٔ ۹، شرایط (۱)، (۲) و(۳) با احکام زیرنیز هم‌ارزند:

(۴) اگر $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای بـرای $V$ باشد، آنگاه $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $W$ است.

(۵) پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای $V$ وجود دارد کـه $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $W$ است.

ذیلاً اثباتی برای هم‌ارز بودن این پنج شرط ارائه می‌کنیم. ایـن اثبات شامل اثبات تازه‌ای از هم‌ارز بودن (۱) و (۲) و (۳) هم هست.

(۲) ← (۱). اگر $T$ معکوس‌پذیر باشد، $T$ نامنفرد است. (۳) ← (۲). فـرض کنیم $T$ نامنفرد و $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. بنا برقضیهٔ ۸، $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$ یك مجموعهٔ مستقل خطی از بردارهای $W$ است؛ وچون بعد $W$ نیز $n$ است، این‌مجموعه از بردارها پایه‌ای برای $W$است. حال گیریم $\beta$ برداری دلخواه از $W$ باشد. اسکالرهایی چون $c_1$، ...، $c_n$ وجود دارند که

$$\beta = c_1(T\alpha_1) + \cdots + c_n(T\alpha_n)$$
$$= T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n)$$

واین خود نشان می‌دهد که $\beta$ در برد $T$ است. (۴) ← (۳). اکنون فـرض می‌کنیم $T$ پوشا باشد. اگر $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای بـرای $V$ باشد، بردارهای $T\alpha_1$، ...، $T\alpha_n$ برد $T$ را، که بنا به‌فرض تمام $W$ است، پدید می‌آورند. چون بعد $W$ برابر $n$ است، این $n$ بـردار باید مستقـل خطـی باشند؛ یعنی، بایـد پایـه‌ای را بـرای $W$ تشکیل بدهند. (۵) ← (۴)، این حکم نیازی به‌توضیح ندارد. (۱) ← (۵). فـرض‌کنیم پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای $V$ وجود داشته باشد که $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$، هـم پایه‌ای برای $W$ باشد. چون $T\alpha_i$ها $W$ را پدید می‌آورند، واضح است که برد $T$ تمام $W$ است. اگر $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ درفضای پوچ $T$ باشد، آنگاه

$$T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = 0$$

یا

$$c_1(T\alpha_1)+\cdots+c_n(T\alpha_n)=0$$

وچون $T\alpha_i$ها مستقل هستند، هر $c_i$ برابرصفراست، ولذا $\alpha=0$. تا اینجا نشان داده‌ایم که برد $T$ برابر با $W$ است و $T$ نامنفرد؛ بنابراین، $T$ معکوس‌پذیراست.

مجموعهٔ عملگرهای خطی معکوس‌پذیرروی یك فضای $V$ همراه با عمل ترکیب، مثال‌خوبی برای چیزی که درجبر به «گروه» معروف است، به‌دست می‌دهد. گرچه‌فرصت آن را نداریم که بتفصیل درمورد گروهها به‌بحث بپردازیم، مع‌هذا تعریف آن را ذیلاً ارائه می‌کنیم.

**تعریف.** یك **گروه** متشکل است از

۱. یك مجموعهٔ $G$؛

۲. یك قاعده (یا عمل) که به‌هر جفت $x$ و $y$ از عناصر $G$، عنصر $xy$ از $G$ را با شرایط زیر وابسته می‌سازد:

(الف) به‌ازای هر $x$، $y$، و $z$ از $G$، $x(yz)=(xy)z$ (شرکت‌پذیری)؛

(ب) یك عنصر $e$ در $G$ وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x$ از $G$، $ex=xe=x$؛

(پ) به هر عنصر $x$ از $G$، عنصری چون $x^{-1}$ از $G$ متناظراست به‌طوری که $xx^{-1}=x^{-1}x=e$.

قبلاً دیده‌ایم که ترکیب $(U, T)\rightarrow UT$ به‌هرجفت عملگرخطی معکوس‌پذیرروی فضای $V$، عملگرمعکوس‌پذیردیگری روی $V$ را متناظر می‌سازد. ترکیب، یك عمل شرکت‌پذیراست. به‌ازای هر $T$، عملگرهمانی $I$ در $IT=TI$ صدق می‌کند، و به‌ازای هرعملگرمعکوس‌پذیر $T$ (بنابر قضیهٔ ۷) عملگرخطی معکوس‌پذیر $T^{-1}$ وجود دارد که $TT^{-1}=T^{-1}T=I$. ازاین‌رو، مجموعهٔ عملگرهای خطی معکوس‌پذیرروی $V$ همراه با این‌عمل یك گروه است. مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ معکوس‌پذیر، همراه با ضرب‌ماتریسی به‌عنوان عمل، مثال دیگری ازیك گروه است. یك گروه **جابجایی** نامیده می‌شود، هرگاه شرط $xy=yx$ به‌ازای هر $x$ و $y$ برقرار باشد. هیچ‌یك از دومثالی راکه دربالا ذکر کردیم درحالت‌کلی گروه جابجایی نیست. عمل یك‌گروه جابجایی غالباً به‌صورت $(x, y)\rightarrow x+y$ نوشته می‌شود ونه به‌صورت $(x, y)\rightarrow xy$، ودراین‌حالت به‌جای عنصر«همانی» $e$ ازنماد ۰ استفاده می‌شود. مجموعهٔ بردارهای یك فضای برداری همراه با عمل‌جمع برداری، یك‌گروه‌جابجایی است. یك هیأت رامی‌توان به‌صورت مجموعه‌ای با دوعمل به‌نامهای جمع وضرب توصیف کردکه تحت عمل جمع، گروهی جابجایی است، عناصرغیرصفرش تحت عمل ضرب، گروهی جابجایی تشکیل می‌دهند، و قانون پخش‌پذیری $x(y+z)=xy+xz$ نیز درآن برقرار است.

## تمرین

۱. فرض کنید $T$ و $U$ دوعملگرخطی روی $R^2$ باشند که با

$$T(x_1, x_2)=(x_2, x_1) \quad \text{و} \quad U(x_1, x_2)=(x_1, 0)$$

تعریف می‌شوند.

(الف) $T$ و $U$ به‌طور هندسی چگونه توصیف می‌شوند؟

(ب) برای هریک از تبدیلهای $(U+T)$، $UT$، $TU$، $T^2$ و $U^2$ قواعدی شبیه به‌تعریف $T$ و $U$ به‌دست آورید.

۲. فرض کنید $T$ (یکتا) عملگرخطی روی $C^3$ باشد که برای آن

$$T\epsilon_1=(1, 0, i), \qquad T\epsilon_2=(0, 1, 1), \qquad T\epsilon_3=(i, 1, 0).$$

آیا $T$ معکوس‌پذیراست؟

۳. عملگرخطی $T$ روی $R^3$ با

$$T(x_1, x_2, x_3)=(3x_1, x_1-x_2, 2x_1+x_2+x_3)$$

تعریف می‌شود. آیا $T$ معکوس‌پذیراست؟ اگرچنین باشد، قاعده‌ای برای $T^{-1}$، شبیه به آنکه $T$ را تعریف می‌کند، بیابید.

۴. برای عملگرخطی $T$ تمرین ۳ ثابت کنید

$$(T^2-I)(T-3I)=0.$$

۵. فرض کنید $C^{2\times 2}$ فضای برداری مختلط ماتریسهای $2\times 2$ با درایه‌های مختلط باشد. با فرض

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$T$ را عملگر خطی روی $C^{2\times 2}$ بگیرید که با $T(A)=BA$ تعریف می‌شود. رتبهٔ $T$ چیست؟ آیا می‌توانید $T^2$ را توصیف کنید؟

۶. فرض کنید $T$ تبدیلی خطی از $R^3$ در $R^2$ و $U$ تبدیلی خطی از $R^2$ در $R^3$ باشد. ثابت کنید تبدیل $UT$ معکوس‌پذیر نیست. این قضیه را تعمیم بدهید.

۷. دوعملگر خطی $T$ و $U$ روی $R^2$ بیابید که $TU=0$ ولی $UT\neq 0$.

۸. فرض کنید $V$ فضایی برداری برروی هیأت $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. اگر $T^2=0$ دربارهٔ رابطهٔ برد $T$ وفضای پوچ $T$ چه می‌توانید بگویید؟ یک عملگر

خطی $T$ روی $R^2$ مثال بزنید که $T^2=0$ ولی $T\neq 0$.

۹. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضای $V$ با بعد متناهی باشد وفرض کنید عملگری خطی چون $U$ روی $V$ وجود داشته باشد که $TU=I$. ثابت کنید $T$ معکوس‌پذیر است و $U=T^{-1}$. مثالی بیاورید که نشان دهد وقتی $V$ با بعد متناهی نباشد این‌مطلب صحیح نیست. (راهنمایی: فرض کنید $T=D$. $D$ عملگرمشتق‌گیری روی فضای‌توابع چندجمله‌ای است.)

۱۰. فرض کنید $A$ ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت $F$ و $T$ تبدیلی خطی از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$ باشد که با $T(X)=AX$ تعریف می‌شود. هرگاه $m<n$ نشان دهید ممکن است $T$ پوشا باشد ودرعین‌حال نامنفرد نباشد. به‌طور مشابه، نشان دهید که اگر $m>n$، ممکن است $T$ نامنفرد باشد ولی پوشا نباشد.

۱۱. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. اگر رتبهٔ $(T^2)=$ رتبهٔ $(T)$، ثابت کنید برد وفضای‌پوچ $T$ مجزا هستند؛ یعنی، تنها در بردار صفرمشترکند.

۱۲. فرض کنید $p$، $m$، و $n$ اعدادی صحیح ومثبت باشند و $F$ یك‌هیأت باشد. فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای $m\times n$ برروی $F$ و $W$ فضای ماتریسهای $p\times n$ برروی $F$ باشد. اگر $B$ ماتریسی $p\times m$ و ثابت و $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ تعریف شده توسط $T(A)=BA$ باشد، ثابت کنید $T$ معکوس‌پذیراست اگروتنها اگر $m=p$ و $B$ ماتریسی $m\times m$ ومعکوس‌پذیر باشد.

## ۳.۳. یکریختی[1]

اگر $V$ و $W$ دوفضای برداری برروی هیأت $F$ باشند، هرتبدیل خطی یك به‌یك $T$، از $V$ بروی $W$، یك **یکریختی** از $V$ **بروی** $W$ نامیده می‌شود. هرگاه یك یکریختی از $V$ بروی $W$ موجود باشد، گوییم $V$ با $W$ **یکریخت** است.

واضح است که $V$ با $V$ یکریخت است، زیرا عملگر همانی یك یکریختی از $V$ بروی $V$ است. همچنین، اگر $V$ تحت یکریختی $T$ با $W$ یکریخت باشد، آنگاه $W$ نیز با $V$ یکریخت است، زیرا $T^{-1}$ یك یکریختی از $W$ بروی $V$ است. خواننده باید بآسانی بتواند نشان دهد که اگر $V$ با $W$ و $W$ با $Z$ یکریخت باشد، آنگاه $V$ با $Z$ هم یکریخت‌است. به‌طور خلاصه، یکریختی یك‌رابطهٔ هم‌ارزی روی ردهٔ فضاهای‌برداری است. اگریك یکریختی از $V$ بروی $W$ موجود باشد، گاهی به‌جای اینکه بگوییم $V$ با $W$

---

۱ این اصطلاح را ایزومورفیسم هم می‌نامند.ـم.

یکریخت است، می‌گوییم، $V$ و $W$ یکریخت‌اند. این موضوع اشکالی ایجاد نمی‌کند،زیرا $V$ با $W$ یکریخت است اگر وتنها اگر $W$ با $V$ یکریخت باشد.

**قضیهٔ ۱۰.** هرفضای برداری $n$ بعدی برروی هیأت $F$ با فضای $F^n$ یکریخت است.

اثبات. فرض‌کنیم $V$ یك فضای برداری $n$بعدی برروی هیأت $F$، و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای آن باشد. تابع $T$ از $V$ در $F^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\alpha$ در $V$ باشد، $T\alpha$ را $n$ تایی مختصات $(x_1, \cdots, x_n)$ بردار $\alpha$ نسبت به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ می‌گیریم؛ یعنی، $n$تایی‌ای که

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n.$$

درمبحث مختصات ازفصل ۲ نشان دادیم که این $T$ خطی ویك‌به‌یك است و $V$ را بروی $F^n$ می‌نگارد. □

با وجودی‌که بردارها و اعمال درفضاهای برداری یکریخت ممکن است کاملاً متفاوت باشند، به‌منظورهای گوناگون، غالباً آنها را «یکی» تلقی می‌کنیم؛ یعنی، فضاهای یکریخت راغالباً یکی می‌گیریم. درحال‌حاضر در بارهٔ این‌ایده به‌بحثی طولانی نمی‌پردازیم، زیرا مایلیم درك مفهوم یکریختی واحساس «یکی» بودن فضاهای یکریخت پا به‌پای تداوم مطالعهٔ فضاهای برداری تقویت شوند.

اکنون به‌چند توضیح کوتاه می‌پردازیم. فرض‌کنیم $T$ یك یکریختی از $V$ بروی $W$ باشد. اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از $V$ باشد، آنگاه بنابرقضیهٔ ۸، $S$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ $T(S)$ از $W$ مستقل باشد. ازاین‌رو، در تصمیم‌گیری راجع به‌مستقل بودن $S$ می‌توان به‌جای $S$ به‌بررسی $T(S)$ پرداخت. ازاین مطلب مشهود است که یکریختی، «حافظ بعد» است؛ بدین معنی‌که بعدهرزیرفضای با بعد متناهی ازفضای $V$ با بعدنگاره‌اش تحت $T$ مساوی است. به‌تشریحی ساده ازاین ایده توجه‌کنید. فرض‌کنیم $A$ ماتریسی $m\times n$ برروی هیأت $F$ باشد. درواقع ما تاکنون دوتعریف برای فضای جواب ماتریس $A$ ارائه‌کرده‌ایم. اولی عبارت است ازمجموعهٔ همهٔ $n$تاییهای $(x_1, \cdots, x_n)$ از $F^n$ که درهریك ازمعادلات دستگاه $AX=0$ صدق‌کنند. دومی مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ستونی $n\times 1$ مانند $X$ است‌که $AX=0$. بدین لحاظ، اولین فضای جواب زیرفضایی از $F^n$ است، درحالی‌که دومی زیرفضایی از فضای همهٔ ماتریسهای $n\times 1$ برروی هیأت $F$. اما یك یکریختی کاملاً واضح بین $F^n$ و $F^{n\times 1}$ دیده می‌شود و آن

$$(x_1, \cdots, x_n)\to\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

است. تحت این‌یکریختی، اولین فضای جواب $A$ بروی دومین فضای‌جواب برده می‌شود.

بعد این فضاها مساوی است، وازاین‌رو اگر بخواهیم قضیه‌ای در بارهٔ بعد فضای جواب اثبات کنیم، اهمیتی ندارد که کدام فضا را برای بحث انتخاب کنیم. درواقع، اگر تصمیم می گرفتیم $F^n$ وفضای ماتریسهای $n \times 1$ را یکی بگیریم، محتملاً خواننده مانع نمی‌شد. این‌کاررا جزدرمواردی که مناسب باشد انجام نخواهیم داد.

## تمرین

۱. فرض کنید $V$ مجموعهٔ اعداد مختلط و$F$ هیأت اعدادحقیقی باشد. مجموعهٔ $V$ بااعمال معمولی فضایی برداری برروی $F$ است. یك یکریختی ازاین فضا بروی $R^2$را به‌طور صریح توصیف کنید.

۲. $V$ را فضایی برداری برروی هیأت اعداد مختلط بگیرید، وفرض کنید یك یکریختی $T$ از $V$ بروی $C^3$ وجود داشته باشد. فرض کنید $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\alpha_3$، و $\alpha_4$ بردارهایی از $V$ باشندکه

$$T\alpha_1 = (1, 0, i), \qquad T\alpha_2 = (-2, 1+i, 0),$$

$$T\alpha_3 = (-1, 1, 1), \qquad T\alpha_4 = (\sqrt{2}, i, 3).$$

(الف) آیا $\alpha_1$ درزیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_2$ و $\alpha_3$ قراردارد؟

(ب ) اگر $W_1$ زیرفضای پدید آمده توسط $\alpha_1$ و $\alpha_2$، و $W_2$ زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_3$ و $\alpha_4$ باشد، اشتراك $W_1$ و $W_2$ را به‌دست آورید.

(پ ) پایه‌ای برای زیرفضایی از$V$که توسط چهار بردار $\alpha_j$ پدید می‌آید، بیابید.

۳. فرض کنید $W$ مجموعهٔ همهٔماتریسهای هرمیتی مختلط $2 \times 2$. یعنی مجموعهٔماتریسهای مختلط $2 \times 2$ چون $A$، باشرط $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ باشد (خط زبرنمایشگر مزدوج عددی مختلط است). همان‌طورکه درمثال ۶ از فصل ۲ اشاره شد، $W$ با اعمال معمولی، فضایی است برداری برروی هیأت اعداد حقیقی. نشان دهید

$$(x, y, z, t) \rightarrow \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یك یکریختی از $R^4$ بروی $W$ است.

۴. نشان دهید $F^{m \times n}$ با $F^{mn}$ یکریخت است.

۵. فرض کنید مجموعهٔ اعداد مختلط $V$ به‌عنوان یك فضای برداری برروی هیأت اعداد حقیقی درنظرگرفته شده باشد (تمرین ۱). تابع $T$ از$V$ در فضای ماتریسهای حقیقی $2 \times 2$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $z = x+iy$ و $x$ و $y$ حقیقی باشند،

آنگاه

$$T(z)=\begin{bmatrix} x+۷y & ۵y \\ -۱۰y & x-۷y \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان دهید $T$ یك تبدیل خطـی (حقیقی) یك به‌یك از $V$ در فضای ماتریسهای حقیقی ۲ × ۲ است.
(ب) نشان دهید $T(z_۱z_۲)=T(z_۱)T(z_۲)$.
(پ) برد $T$ را چگونه توصیف می‌کنید؟

۶. دوفضای برداری $V$ و $W$ با بعد متناهی برروی هیأت $F$ را درنظر بگیرید وثابت‌کنید $V$ و $W$ یکریخت‌اند اگروتنها اگر $dim\, V = dim\, W$.

۷. فرض‌کنید $V$ و $W$ دوفضای برداری برروی هیأت $F$ باشند، و $U$ یك یکریختی از $V$ برروی $W$ باشد. ثابت کنید $T \rightarrow UTU^{-۱}$ یك یکریختی از $L(V, V)$ برروی $L(W, W)$ است.

## ۴.۳. نمایش ماتریسی تبدیلها

فرض‌کنیم $V$ یك فضای بردار $n$بعدی و $W$ یك فضای برداری $m$ بعدی برروی هیأت $F$ باشند. همچنین فرض کنیم $\mathscr{B}=\{\alpha_۱, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ و $\mathscr{B}'=\{\beta_۱, \dots, \beta_m\}$ پایهٔ مرتبی برای $W$ باشد. اگر $T$ تبدیل خطی دلخواهی از $V$ در $W$ باشد، آنگاه $T$ با عملکردش روی بردارهای $\alpha_j$ تعیین می‌شود. هریك از $n$ بردار $T\alpha_j$ به‌طوریکتا به‌صورت یك ترکیب خطی

$$T\alpha_j=\sum_{i=۱}^{m} A_{ij}\beta_i \tag{۳-۳}$$

از $\beta_i$ها، که در آن اسکالرهای $A_{۱j}$، ... ، $A_{mj}$ مختصات $T\alpha_j$ در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}'$ می‌باشند، قابل بیان است. از این‌رو، تبدیل $T$ ازطریق فرمولهای (۳-۳) با $mn$ اسکالر $A_{ij}$ تعیین می‌شود. ماتریس $m \times n$ $A$ که با $A(i, j)=A_{ij}$ تعریف‌می‌شود، **ماتریس $T$ نسبت به‌دو پایهٔ مرتب** $\mathscr{B}$ **و** $\mathscr{B}'$ نامیده می‌شود. کاربعدی ما این است که به‌طور واضح بفهمیم چگونه ماتریس $A$ تبدیل خطی $T$ را تعیین می‌کند.

اگر $\alpha=x_۱\alpha_۱+\dots+x_n\alpha_n$ برداری از $V$ باشد، آنگاه

$$T\alpha=T\Big(\sum_{j=۱}^{n} x_j\alpha_j\Big)$$
$$=\sum_{j=۱}^{n} x_j(T\alpha_j)$$

www.riazisara.ir



$$=\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\Big)\beta_i$$

و اگر $X$ ماتریس مختصات $\alpha$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشد، محاسبهٔ بالا نشان می‌دهد که $AX$ ماتریس مختصات بردار $T\alpha$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ است، زیرا اسکالر

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j$$

درایهٔ $i$امین سطر ماتریس ستونی $AX$ است. همچنین مشاهده می‌شود که اگر $A$ ماتریس $m\times n$ دلخواهی برروی هیأت $F$ باشد، آنگاه

$$T\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\Big)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\Big)\beta_i \qquad (۴\text{-}۳)$$

تبدیل خطی $T$ از $V$ در $W$ را تعریف می‌کند که ماتریس آن نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ عبارت است از $A$. این مطلب را به‌طور رسمی خلاصه می‌کنیم:

**قضیهٔ ۱۱.** فرض کنیم $V$ یك فضای برداری $n$بعدی برروی هیأت $F$ و $W$ یك‌فضای برداری $m$بعدی برروی $F$ باشد. و نیز فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای $V$، و $\mathcal{B}'$ پایهٔ مرتبی برای $W$ باشد. برای هر تبدیل خطی $T$ از $V$ در $W$ یك ماتریس $m\times n$، مانند $A$، که درایه‌هایش در $F$ هستند، یافت می‌شود به‌طوری که به‌ازای هربردار $\alpha$ از $V$،

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'}=A[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

بعلاوه، $T\to A$ یك تناظر یك به‌یك بین مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی از $V$ در $W$ و مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی هیأت $F$ است.

ماتریس $A$، که بنابر قضیهٔ ۱۱ با $T$ در تناظر است، **ماتریس $T$ نسبت به‌پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$** نام دارد. به‌خاطرداشته باشیم تساوی (۳-۳) بیان می‌کند $A$ ماتریسی است که ستونهایش $A_1$، $\cdots$، $A_n$ توسط

$$A_j=[T\alpha_j]_{\mathcal{B}'},\qquad j=1,\cdots,n$$

تعیین می‌شوند. اگر $U$ تبدیل خطی دیگری از $V$ در $W$، و $B=[B_1,\cdots,B_n]$ ماتریس $U$ نسبت به‌پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ باشد، آنگاه $cA+B$ ماتریس $cT+U$ نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ است. این مطلب واضح است، زیرا

$$cA_j+B_j=c[T\alpha_j]_{\mathcal{B}'}+[U\alpha_j]_{\mathcal{B}'}$$
$$=[cT\alpha_j+U\alpha_j]_{\mathcal{B}'}$$
$$=[(cT+U)\alpha_j]_{\mathcal{B}'}.$$

**قضیهٔ ۱۲.** فرض کنیم $V$ یك فضای برداری $n$بعدی و $W$ یك فضای برداری $m$بعدی بر روی هیأت $F$ باشند. به‌ازای هرجفت پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، بترتیب برای $V$ و $W$، تابعی که به‌هر تبدیل خطی $T$، ماتریسش نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ را تخصیص می‌دهد، یك یکریختی بین فضای $L(V, W)$ و فضای همهٔ ماتریسهای $m \times n$ بر روی هیأت $F$ است.

اثبات. قبلاً ملاحظه کردیم که تابع موردنظر خطی است؛ همچنان که در قضیهٔ ۱۱ بیان شد، این تابع یك به‌یك نیزهست و $L(V, W)$ را بروی مجموعهٔ ماتریسهای $m \times n$ می‌نگارد. □

دراین بررسی، بخصوص به‌نمایش ماتریسی تبدیلهای خطی ازیك فضا در خودش، یعنی به‌عملگرهای خطی روی یك فضای $V$، علاقه‌مند هستیم. دراین حالت بسیار مناسب است که در هرمورد از پایه‌های یکسان استفاده کنیم؛ یعنی، فرض کنیم که $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. دراین صورت، ماتریس نمایش را به‌طورساده **ماتریس $T$ نسبت به‌پایه مرتب** $\mathcal{B}$ می‌نامیم. چون این مفهوم برایمان بسیارمهم است، تعریف آن را دوباره بیان می‌کنیم. اگر $T$ تبدیلی خطی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد، ماتریس $T$ نسبت به $\mathcal{B}$ (یا، ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$) عبارت است ازماتریس $n \times n$ ی مانند $A$ که درایه‌هایش، $A_{ij}$، با معادلات

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{۵-۳}$$

تعریف می‌شوند. همواره باید به‌خاطرداشت که این ماتریس که $T$ را نمایش می‌دهد به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ وابسته است، وبعلاوه درهرپایهٔ مرتب $V$ نمایشی ماتریسی برای $T$ موجوداست. (برای تبدیلهای ازیك فضا درفضای دیگر، این ماتریس به‌دو پایهٔ مرتب، یکی برای $V$ و دیگری ازآن $W$، وابسته است.) برای‌آنکه این وابستگی را ازیاد نبریم، برای ماتریس عملگرخطی $T$ درپایهٔ مرتب $\beta$ ازنماد

$$[T]_{\mathcal{B}}$$

استفاده می‌کنیم. طریقه‌ای که باآن این ماتریس واین پایهٔ مرتب $T$ را توصیف می‌کنند، این است که به‌ازای هر $\alpha$ در $V$

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

**مثال ۱۳.** فرض کنیم $V$ فضای ماتریسهای ستونی $n \times 1$ برروی هیأت $F$، $W$ فضای ماتریسهای $m \times 1$ برروی همین هیأت، و $A$ ماتریس $m \times n$ ثابتی برروی $F$ باشد. همچنین فرض کنیم $T$ تبدیل خطی از $V$ در $W$ تعریف شده با $T(X) = AX$ باشد. $\mathcal{B}$ را پایهٔ مرتبی برای $V$ می‌گیریم که نظیرپایهٔ استانده $F^n$ باشد، یعنی $i$مین بردار در $\mathcal{B}$ همان ماتریس $n \times 1$، $X_i$ باشد با درایهٔ ۱ درسطر $i$م و درایهٔ ۰ در سطرهای دیگر. فرض کنیم

$\mathcal{B}'$ پایهٔ مرتب متناظر آن برای $W$ باشد، یعنی $j$ زمین بردار $\mathcal{B}'$ ماتریس $m\times 1$، $Y_j$ با درایهٔ ۱ در سطر $j$م و درایهٔ ۰ در سایر سطرها باشد. دراین صورت، ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، خود ماتریس $A$ است. این مطلب واضح است، زیرا ماتریس $AX_j$، $j$ زمین ستون ماتریس $A$ است.

**مثال ۱۴.** گیریم $F$ یك هیأت، و $T$ عملگری روی $F^2$ باشد که با

$$T(x_1, x_2)=(x_1, 0)$$

تعریف می‌شود. بسهولت دیده می‌شود که $T$ عملگری خطی روی $F^2$ است. فرض کنیم $\mathcal{B}=\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ پایهٔ مرتب استانده $F^2$ باشد. حال

$$T\epsilon_1=T(1, 0)=(1, 0)=1\epsilon_1+0\epsilon_2$$

$$T\epsilon_2=T(0, 1)=(0, 0)=0\epsilon_1+0\epsilon_2$$

ولذا ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت است از

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**مثال ۱۵.** فرض کنیم $V$ فضای همهٔ توابع چندجمله‌ای از $R$ در $R$ به‌شکل

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$$

یعنی، فضای توابع چندجمله‌ای ازدرجهٔ سه یا کمتر باشد. عملگر مشتق گیری $D$ در مثال ۲، $V$ را در $V$ می‌نگارد، زیرا $D$ «کاهش‌دهندهٔ درجه» است. فرض کنیم پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ برای $V$ متشکل از چهارتابع $f_1$، $f_2$، $f_3$، و $f_4$ باشد که با $f_j(x)=x^{j-1}$ تعریف می‌شوند. دراین صورت،

$$(Df_1)(x)=0, \qquad Df_1=0f_1+0f_2+0f_3+0f_4$$

$$(Df_2)(x)=1, \qquad Df_2=1f_1+0f_2+0f_3+0f_4$$

$$(Df_3)(x)=2x, \qquad Df_3=0f_1+2f_2+0f_3+0f_4$$

$$(Df_4)(x)=3x^2, \qquad Df_4=0f_1+0f_2+3f_3+0f_4$$

وبنابراین ماتریس $D$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قبلاً دیدیم که هنگام جمع تبدیلها، چیزی که برای ماتریسهای نمایش اتفاق می‌افتد این است که آنها هم جمع می‌شوند. اکنون می‌خواهیم بدانیم هنگام ترکیب تبدیلها چه اتفاق می‌افتد. به‌صورت دقیقتر، فرض کنید $V$، $W$، و $Z$ فضاهایی برداری بر روی هیأت $F$، و بترتیب، با ابعاد $n$، $m$، و $p$ باشند. $T$ را تبدیلی خطی از $V$ در $W$، و $U$ را تبدیلی خطی از $W$ در $Z$ می گیریم. فرض کنیم پایه‌های مرتب

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}'=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}, \quad \mathcal{B}''=\{\gamma_1, \cdots, \gamma_p\}$$

بترتیب، برای فضاهای $V$، $W$، و $Z$ داده شده‌اند و $A$ ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، و $B$ ماتریس $U$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}''$ است. در این صورت، بسادگی دیده می‌شود که $C$، ماتریس تبدیل $UT$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}''$ عبارت است ازحاصلضرب $A$ و $B$. زیرا، اگر $\alpha$ برداری دلخواه از $V$ باشد، آنگاه

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'}=A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

$$[U(T\alpha)]_{\mathcal{B}''}=B[T\alpha]_{\mathcal{B}'}.$$

پس

$$[(UT)(\alpha)]_{\mathcal{B}''}=BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

و از این‌رو، بنابرتعریف ویکتا بودن ماتریس نمایش، بایدداشته باشیم $C=BA$. باانجام محاسبهٔ ذیل نیزمی‌توان به‌این نتیجه دست یافت

$$\begin{aligned}(UT)(\alpha_j)&=U(T\alpha_j)\\ &=U\Big(\sum_{k=1}^{m} A_{kj}\beta_k\Big)\\ &=\sum_{k=1}^{m} A_{kj}(U\beta_k)\\ &=\sum_{k=1}^{m} A_{kj}\sum_{i=1}^{p} B_{ik}\gamma_i\\ &=\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}\Big)\gamma_i\end{aligned}$$

وبنابراین باید داشته باشیم

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}\,. \qquad (۳-۶)$$

اعمال روی سطرهای ماتریسها موجب ایجاد انگیزه برای تعریف (۳-۶) ضرب ماتریسی شدند. دراینجا دیده می‌شود که ترکیب تبدیلهای خطی هم انگیزه‌ای بسیار قوی برای این تعریف است. خلاصهٔ این مطالب به‌طور رسمی چنین است.

**قضیهٔ ۱۳.** فرض‌کنیم $V$، $W$، و $Z$ سه فضای برداری با بعدمتناهی بر روی هیأت $F$، $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ و $U$ تبدیلی‌خطـی از $W$ در $Z$ باشند. اگـر $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$، و $\mathcal{B}''$ پایه‌هایی مرتب، بترتیب، برای $V$، $W$، و $Z$ باشند و اگـر $A$ ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، و $B$ ماتریس $U$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}''$ باشد، آنگاه ماتریس ترکیب $UT$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}''$ عبارت است از ماتریس حاصل‌ضرب $C=BA$.

ملاحظه‌می کنیم که قضیهٔ ۱۳، اثباتی‌ازشرکت‌پذیری ضرب‌ماتریسی به‌دست‌می‌دهد- اثباتی که نیازی به‌محاسبه ندارد، ومستقل از اثباتی است‌که درفصل ۱ ارائه شد. بعلاوه، خاطرنشان می‌کنیم که حالت خاصی ازقضیهٔ ۱۳ را درمثال ۱۲ هم اثبات‌کردیم.

تذکراین مطلب مهم است‌کـه اگر $T$ و $U$ عملگرهایی خطی روی فضای $V$ باشند و نمایش ماتریسی را نسبت به‌پایهٔ واحدی چون $\mathcal{B}$ انجام دهیم، آنگاه قضیهٔ ۱۳ شکل سادهٔ $[UT]_{\mathcal{B}}=[U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$ را به‌خود می گیرد. پس، دراین حالت، تناظری‌که $\mathcal{B}$ بین‌عملگرها وماتریسها برقرار می‌کند، نه‌تنها یك یکریختی فضای برداری است، بلکه ضربها را نیز حفظ‌می‌کند. نتیجه‌ای ساده ازاین مطلب این است‌که عملگرخطی $T$ معکوس‌پذیراست‌اگر وتنها اگر $[T]_{\mathcal{B}}$ ماتریسی معکوس‌پذیرباشد. زیرا، عملگرهمانی $I$ درهرپایهٔ مرتب‌دلخواه توسط ماتریس همانی نمایش داده می‌شود، وازاین‌رو

$$UT=TU=I$$

هم‌ارز است با

$$[U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}=I.$$

البته، وقتی $T$ معکوس‌پذیر باشد

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم هنگامی‌که پایه تغییرکند، چه تغییری درماتریسهای‌نمایش رخ می‌دهد. به‌منظور سادگی، این پرسش را تنها برای عملگرهای خطی روی یك‌فضای $V$ مطرح می‌کنیم تـا بتوانیم از پایهٔ مرتب واحـدی استفاده کنیم. سؤال به‌طور مشخص چنین است: فرض‌کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای $V$ با بعد متناهی و

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \qquad \mathcal{B}'=\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$$

دوپایهٔ مرتب برای $V$ باشند. ارتباط ماتریسهای $[T]_{\mathcal{B}}$ و $[T]_{\mathcal{B}'}$ چیست؟ همان گونه‌که در فصل ۲ مشاهده‌کردیم، یك ماتریس $n\times n$ (معکوس‌پذیر) یکتای $P$ وجود دارد، به‌طوری که به‌ازای هربردار $\alpha$ از $V$،

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}=P[\alpha]_{\mathcal{B}'}. \tag{۳-۷}$$

این ماتریس عبارت است از $P=[P_1, \cdots, P_n]$ که درآن $P_j=[\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$. بنا به‌تعریف

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}. \qquad (۸-۳)$$

اگر(۳-۷) را بر بردار $T\alpha$ به‌کار بندیم، داریم

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}}=P[T\alpha]_{\mathcal{B}'}. \qquad (۹-۳)$$

از ترکیب (۳-۷)، (۳-۸)، و (۳-۹) به‌دست می آوریم

$$[T]\ P[\alpha]_{\mathcal{B}'}=P[T\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

یا

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P[\alpha]_{\mathcal{B}'}=[T\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

واز این‌رو باید داشته باشیم

$$[T]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P. \qquad (۱۰-۳)$$

این رابطه به‌پرسش ما پاسخ می گوید.

قبل ازآنکه این نتیجه را رسماً بیان کنیم، به‌مشاهدهٔ مطلب زیر می‌پردازیم. عملگر خطی یکتایی چون $U$ وجود دارد که با

$$U\alpha_j=\alpha'_j, \qquad j=1, \cdots, n$$

تعریف می‌شود و $\mathcal{B}$ را بروی $\mathcal{B}'$ انتقال می‌دهد. عملگر $U$ معکوس‌پذیراست، زیرا پایه‌ای از $V$ را بـروی پایه‌ای از $V$ می‌برد. ماتریس $P$ (بالا) دقیقاً ماتریس عملگـر $U$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ است. زیرا $P$ با

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i$$

تعریف می‌شود وچون $U\alpha_j=\alpha'_j$، این تساوی می‌تواند به‌صورت

$$U\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i$$

نیز نوشته شود. پس، طبق تعریف $P=[U]_{\mathcal{B}}$.

**قضیه ۱۴.** فرض‌کنیم $V$ یک فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$،

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}'=\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$$

دو پایهٔ مرتب برای $V$ و $T$ عملگـری خطی روی $V$ باشد. اگـر $P=[P_1, \cdots, P_n]$ ماتریس $n\times n$ با ستونهای $P_j=[\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

درنتیجه، اگر $U$ عملگر معکوس‌پذیر تعریف شده با $U\alpha_j=\alpha'_j$، $j=1, \cdots, n$، روی $V$

باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'}=[U]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}\,.$$

**مثال ۱۶.** فرض کنیم عملگر خطی $T$ روی $R^2$ با $T(x_1, x_2)=(x_1, 0)$ تعریف بشود. در مثال ۱۴ نشان دادیم که ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب استاندهٔ $\mathcal{B}=\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ برابر

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. اگر پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ برای $R^2$ متشکل از بردارهای $\epsilon_1'=(1, 1)$ و $\epsilon_2'=(2, 1)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\epsilon_1'&=\epsilon_1+\epsilon_2\\ \epsilon_2'&=2\epsilon_1+\epsilon_2\end{aligned}$$

ولذا $P$ عبارت است از ماتریس

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

با محاسبهٔ کوتاهی نتیجه می‌شود

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

از این‌رو

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}'}&=P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P\\ &=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

بسادگی می‌توانیم صحت این نتیجه را بررسی کنیم، زیرا

$$T\epsilon'_1=(1, 0)=-\epsilon'_1+\epsilon'_2$$
$$T\epsilon'_2=(2, 0)=-2\epsilon'_1+2\epsilon'_2$$

**مثال.** فرض‌کنیم $V$ فضای توابع چندجمله‌ای از $R$ در $R$ با «درجهٔ» کمتر از ۳ یا مساوی با آن باشد. نظیر مثال ۱۵، $D$ را عملگر مشتق‌گیری روی $V$ می‌گیریم، و فرض می‌کنیم

$$\mathcal{B}=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

پایهٔ مرتب‌تعریف شده با $f_i(x)=x^{i-1}$ برای $V$ باشد. عدد حقیقی $t$ را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $g_i(x)=(x+t)^{i-1}$، به‌عبارت دیگر

$$g_1=f_1$$
$$g_2=tf_1+f_2$$
$$g_3=t^2f_1+2tf_2+f_3$$
$$g_4=t^3f_1+3t^2f_2+3tf_3+f_4.$$

همان‌گونه‌که بسادگی دیده می‌شود چون ماتریس

$$P=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\\ 0 & 1 & 2t & 3t^2\\ 0 & 0 & 1 & 3t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر، ومعکوسش

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -t & t^2 & -t^3\\ 0 & 1 & -2t & 3t^2\\ 0 & 0 & 1 & -3t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

است، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{B}'=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ است. در مثال ۱۵، معلوم شدکه ماتریس $D$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس، ماتریس $D$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ عبارت است از

$$P^{-1}[D]_{\mathcal{B}}P=\begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، $D$ در پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ با یك ماتریس نمایش داده می‌شود. البته این نتیجه را می‌توان به‌نحو مستقیم‌تری هم مشاهده کرد، زیرا

$$Dg_1 = 0$$
$$Dg_2 = g_1$$
$$Dg_3 = 2g_2$$
$$Dg_4 = 3g_3.$$

این مثال نکتهٔ خوبی را نشان می‌دهد. اگرماتریس عملگری‌خطی را دریك پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ بشناسیم وبخواهیم ماتریس‌آن را درپایهٔ مرتب دیگر $\mathcal{B}'$ بیابیم، هرچند ممکن است‌یافتن ماتریس نمایش با توسل مستقیم به‌تعریف‌کار بسیار ساده‌ای باشد، اما غالباً تغییر مختصات با استفاده ازماتریس معکوس‌پذیر $P$ خیلی مناسب‌تراست.

**تعریف.** فرض کنیم $A$ و $B$ دوماتریس $n\times n$ (مربعی) برروی هیأت $F$ باشند.گوییم **$B$ متشابه با $A$ برروی** $F$ است، هرگاه یك ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیر $P$ یافت شود به‌طوری که $B = P^{-1}AP$.

بنابرقضیهٔ ۱۴، نتیجهٔ زیررا داریم: اگر $V$ یك فضای برداری $n$بعدی برروی $F$ و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دوپایهٔ مرتب برای $V$ باشند، آنگاه به‌ازای هرعملگر خطی $T$ روی $V$، ماتریس $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ متشابه با ماتریس $A = [T]_{\mathcal{B}}$ است. عکس این حکم نیزصادق است. فرض کنیم $A$ و $B$ دو ماتریس $n\times n$، و $B$ متشابه با $A$ باشد. همچنین فرض‌کنیم $V$ فضای $n$بعدی دلخواهی برروی $F$، و $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد. $T$ را آن عملگرخطی روی $V$ می‌گیریم‌که درپایهٔ $\mathcal{B}$ با $A$ نمایش داده می‌شود. اگر $B = P^{-1}AP$، $\mathcal{B}'$ را پایهٔ‌مرتبی برای $V$ می‌گیریم‌که از $\mathcal{B}$ توسط $P$ حاصل می‌شود، یعنی

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

دراین صورت، ماتریس $T$ درپایهٔ $\mathcal{B}'$ همان $B$ خواهد بود.

پس، این گفته‌که $B$ متشابه با $A$ است، بدین معنی است‌که روی هرفضای $n$بعدی برروی $F$، ماتریسهای $A$ و $B$ یك تبدیل خطی در دوپایهٔ مرتب (احیاناً) مختلف رانمایش می‌دهند.

توجه‌کنید‌که با به‌کارگرفتن $P = I$، هرماتریس $n\times n$ مانند $A$ متشابه با خودش است. اگر $B$ متشابه با $A$ باشد،آنگاه $A$ نیزمتشابه با $B$ است، زیرا $B = P^{-1}AP$ ایجاب می‌کند‌که $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$. اگر $B$ متشابه با $A$ و $C$ متشابه با $B$ باشد، آنگاه $C$ متشابه با $A$ است، چراکه $B = P^{-1}AP$ و $C = Q^{-1}BQ$ ایجاب می‌کنند‌که $C = (PQ)^{-1}A(PQ)$. پس، تشابه رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت $F$ است. همچنین توجه‌کنید‌که تنها ماتریس متشابه با ماتریس همانی $I$ خود $I$ است، وتنها ماتریس متشابه با ماتریس صفر، خود ماتریس صفراست.

## تمرین

۰۱ فرض کنید $T$ عملگرخطـی روی $C^{۲}$ تعریف شده بـا $T(x_۱, x_۲)=(x_۱, ۰)$ باشد. فرض کنید $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتب استاندهٔ $C^{۲}$، و $\mathcal{B}'=\{\alpha_۱, \alpha_۲\}$ پایـهٔ مرتب تعریف شده بـا $\alpha_۱=(۱, i)$ و $\alpha_۲=(-i, ۲)$ باشد.

(الف) ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ چیست؟

(ب) ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}$ کدام است؟

(پ) ماتریس $T$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ چیست؟

(ت) ماتریس $T$ درپایهٔ مرتب $\{\alpha_۲, \alpha_۱\}$ کدام است؟

۰۲ فرض‌کنید $T$ تبدیل خطی از $R^{۳}$ در $R^{۲}$ تعریف شده با

$$T(x_۱, x_۲, x_۳)=(x_۱+x_۲, ۲x_۳-x_۱)$$

باشد.

(الف) اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ‌مرتب‌استاندهٔ $R^{۳}$ و $\mathcal{B}'$ پایهٔ‌مرتب‌استاندهٔ $R^{۲}$ باشد، ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ کدام است؟

(ب) اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ و $\mathcal{B}'=\{\beta_۱, \beta_۲\}$ ودرآنها

$$\alpha_۱=(۱, ۰, -۱),\ \alpha_۲=(۱, ۱, ۱),\ \alpha_۳=(۱, ۰, ۰),$$
$$\beta_۱=(۰, ۱),\ \beta_۲=(۱, ۰)$$

ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ کدام است؟

۰۳ فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $F^{n}$ و $A$ ماتریس $T$ درپایهٔ مرتب استاندهٔ $F^{n}$ باشد. فرض کنید $W$ زیرفضای $F^{n}$ پدیدآمده با بردارهای ستونی $A$ باشد. رابطهٔ $W$ با $T$ چیست؟

۰۴ فرض‌کنید $V$ یك فضای برداری ۲ بعدی برروی هیأت $F$ و $\mathcal{B}$ پایـهٔ مرتبی برای $V$ باشد. اگر $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد و

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ثابت‌کنید $T^{۲}-(a+d)T+(ad-bc)I=۰$.

۰۵ فرض‌کنید $T$ عملگری‌خطی روی $R^{۳}$ باشدکه ماتریسش درپایهٔ مرتب استانده برابر با

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

است. پایه‌ای برای برد $T$ و پایه‌ای برای فضای پوچ $T$ بیابید.

۶. فرض کنید $T$ عملگرخطی روی $R^2$ تعریف شده با

$$T(x_1, x_2)=(-x_2, x_1)$$

باشد.

(الف) ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب استاندهٔ $R^2$ چیست؟

(ب) ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \alpha_2\}$، که در آن $\alpha_1=(1, 2)$ و $\alpha_2=(1, -1)$ چیست؟

(پ) ثابت کنید به‌ازای هرعدد حقیقی $c$ عملگر $(T-cI)$ معکوس‌پذیر است.

(ت) اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتب دلخواهی برای $R^2$ باشد و $[T]_{\mathcal{B}}=A$، ثابت کنید که $A_{12}A_{21}\neq 0$.

۷. فرض کنید $T$ عملگرخطی روی $R^3$ تعریف شده با

$$T(x_1, x_2, x_3)=(3x_1+x_3,\ -2x_1+x_2,\ -x_1+2x_2+4x_3)$$

باشد.

(الف) ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب استاندهٔ $R^3$ چیست؟

(ب) ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

که در آن $\alpha_1=(1, 0, 1)$، $\alpha_2=(-1, 2, 1)$، و $\alpha_3=(2, 1, 1)$ چیست؟

(پ) ثابت کنید $T$ معکوس‌پذیر است وقاعده‌ای شبیه آنکه $T$ را تعریف می کند، برای $T^{-1}$ به‌دست آورید.

۸. اگر $\theta$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید دوماتریس

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}$$

بر روی هیأت اعداد مختلط متشابه‌اند. (راهنمایی: فرض کنید $T$ عملگر خطی روی $C^2$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس اول نمایش داده می‌شود. آنگاه دو بردار $\alpha_1$ و $\alpha_2$ بیابید که $T\alpha_1=e^{i\theta}\alpha_1$ و $T\alpha_2=e^{-i\theta}\alpha_2$ و $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ یك پایه باشد.)

۹. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ و $T$ و $S$ عملگرهایی خطی روی $V$ باشند. سؤال: چه‌وقت پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ برای $V$ یافت می‌شوند که

$[S]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$؟ ثابت کنید چنین پایه‌هایی وجود دارند اگروتنها اگریك عملگرخطی معکوس‌پذیر $U$روی $V$یافت‌شود که $T=USU^{-1}$. (طرح‌اثبات: اگر، $[S]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$، آنگاه $U$را عملگری بگیرید که $\mathcal{B}$را بروی $\mathcal{B}'$ ببرد ونشان‌دهید که $S=UTU^{-1}$. بعکس، اگر به‌ازای عملگـــر معکوس‌پذیری چون $U$ داشته باشیم $T=USU^{-1}$، آنگاه $\mathcal{B}$را پایهٔ مرتب دلخواهی بـــرای $V$ و $\mathcal{B}'$ را نگارهٔ آن تحت $U$ فــرض کنید. سپس نشان دهید $[S]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$.)

۱۰. قبلاً دیده‌ایم که عملگرخطی $T$ روی $R^2$ تعریف شده با $T(x_1, x_2)=(x_1, 0)$ در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. این عملگر دررابطهٔ $T^2=T$ صدق می‌کند. ثابت‌کنید اگر $S$ عملگری خطی روی $R^2$ باشد به‌طوری‌که $S^2=S$، آنگاه یا $S=0$ یا $S=I$، و یا پایه‌ای مرتب چون $\mathcal{B}$ برای $R^2$ وجود داردکه $[S]_{\mathcal{B}}=A$ (منظـور از $A$ همـان ماتریس فوق است).

۱۱. فرض‌کنید $W$ فضای همهٔ ماتریسهای ستونی $n\times 1$ برروی هیأت $F$ باشد. اگـر $A$ ماتریسی $n\times n$ برروی $F$ باشد، آنگاه $A$ باضرب ازچپ، عملگرخطی $L_A$ را روی $W$ تعریف می‌کند: $L_A(X)=AX$. ثابت‌کنید هرعملگـرخطی روی $W$، یك ضرب ازچپ‌درماتریسی $n\times n$ است؛ یعنی به‌ازای ماتریسی چون $A$ یك $L_A$ است.

حال فرض‌کنید $V$ یك فضای برداری $n$بعدی برروی هیأت $F$ و $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد. به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، تعریف می‌کنیم $U\alpha=[\alpha]_{\mathcal{B}}$. ثابت کنید $U$ یك یکریختی از $V$ بروی $W$ است. اگر $T$ عملگری خطی روی $V$باشد، آنگاه $UTU^{-1}$ عملگری خطی روی $W$ است. در نتیجه، $UTU^{-1}$ ضرب ازچپ درماتریسی $n\times n$ مانند $A$ است. $A$ کدام ماتریس است؟

۱۲. فرض‌کنید $V$ یك فضای برداری $n$بعدی برروی هیأت $F$ و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد.

(الف) بنا بر قضیهٔ ۱ عملگرخطی یکتایی چون $T$ روی $V$ وجود دارد به طوری که

$$T\alpha_j=\alpha_{j+1}, \quad j=1, \cdots, n-1, \ T\alpha_n=0.$$

ماتریس $A$ مربوط به‌عملگر $T$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ چیست؟

(ب) ثابت‌کنید $T^n=0$ ولی $T^{n-1}\neq 0$.

(پ) فرض کنید $S$ عملگری خطـی روی $V$ باشد کـه $S^n=0$ ولـی $S^{n-1}\neq 0$.

ثابت‌کنید پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}'$ برای $V$ وجود دارد که ماتریس $S$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ همان ماتریس $A$ درقسمت (الف) باشد.
(ت) ثابت کنید اگر $M$ و $N$ ماتریسهایی $n\times n$ برروی $F$ باشندکه $M^n = N^n = 0$ ولی $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$، آنگاه $M$ و $N$ متشابه‌اند.

۱۳. فرض کنید $V$ و $W$ دوفضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ و $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد.
اگر

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B}'=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}،$$

بترتیب، دوپایهٔ مرتب برای $V$ و $W$ باشند، تبدیلهای $E^{p,q}$ را به‌صورتی که دراثبات قضیهٔ ۵ تعریف شدند در نظر بگیرید: $E^{p,q}(\alpha_i)=\delta_{iq}\beta_p$. آنگاه $E^{p,q}$ها، $1\leqslant p\leqslant m$، $1\leqslant q\leqslant n$، پایه‌ای برای $L(V, W)$ تشکیل می‌دهند و لذا به‌ازای اسکالرهای معین $A_{pq}$ (مختصات $T$ دراین پایه از $L(V; W)$)

$$T=\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} E^{p,q}.$$

نشان دهید ماتریس $A$ با درایه‌های $A(p, q)=A_{pq}$ دقیقاً همان ماتریس $T$ نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ است.

## ۵.۳. تابعکهای خطی

اگر $V$ فضایی برداری برروی هیأت $F$ باشد، یك‌تبدیل خطی $f$ از $V$ درهیأت‌اسکالرهای $F$ یك **تابعك خطی** روی $V$ نامیده می‌شود. با توجه به‌مفهوم تبدیل خطی، این بدان معنی است که $f$ تابعی است از $V$ در $F$ که به‌ازای همهٔ بردارهای $\alpha$ و $\beta$ از $V$ وهمهٔ اسکالرهای $c$ از $F$

$$f(c\alpha+\beta)=cf(\alpha)+f(\beta).$$

مفهوم تابعك خطی در مطالعهٔ فضاهای با بعد متناهی مهم است، زیرا درسازمان دادن و روشن‌کردن مبحث زیرفضاها، معادلات خطی، ومختصات یاری‌دهنده است.

**مثال ۱۸.** گیریم $F$ یك هیأت باشد و $a_1$، $\cdots$، $a_n$ اسکالرهایی از $F$ باشند. تابع $f$ روی $F^n$ را با

$$f(x_1, \cdots, x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، $f$ تابعکی خطی روی $F^n$ است. این همان تابعك خطی است که توسط ماتریس $[a_1 \cdots a_n]$ نسبت به‌پایهٔ مرتب استانده $F^n$ وپایهٔ $\{1\}$ برای $F$

نمایش داده می‌شود:

$$a_j = f(\epsilon_j), \quad j = 1, \cdots, n.$$

هر تابعك خطی دلخواه روی $F^n$ نیز به‌ازای اسکالرهایی چون $a_1$، $a_2$، $\cdots$، $a_n$ به‌همین شکل است. این مطلب بلافاصله از تعریف تابعك خطی نتیجه می‌شود، زیرا با تعریف $a_j = f(\epsilon_j)$ واستفاده ازخطی بودن، داریم

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &= f(\sum_j x_j \epsilon_j) \\ &= \sum_j x_j f(\epsilon_j) \\ &= \sum_j a_j x_j . \end{aligned}$$

**مثال ۱۹.** اینك به‌مثالی مهم از تابعکهای خطی می‌پردازیم. فرض کنیم $n$ عددی صحیح مثبت و $F$ یك هیأت باشد. اگر $A$ ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به $F$ باشد، رد $A$ عبارت است ازاسکالر

$$trA = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}.$$

تابع رد تابعکی خطی روی فضای ماتریسی $F^{n \times n}$ است، زیرا

$$\begin{aligned} tr(cA+B) &= \sum_{i=1}^{n} (cA_{ii} + B_{ii}) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} \\ &= c\, tr(A) + trB. \end{aligned}$$

**مثال ۲۰.** فرض کنیم $V$ فضای همهٔ توابع چندجمله‌ای ازهیأت $F$ در خودش و $t$ عنصری از $F$ باشد. اگر تعریف کنیم

$$L_t(p) = p(t)$$

آنگاه، $L_t$ تابعکی خطی روی $V$ است. معمولاً این مطلب به‌این صورت توصیف می‌شود که به‌ازای هر $t$ «تعیین مقدار در $t$» تابعکی خطی روی فضای توابع چندجمله‌ای است. لازم است این نکته را متذکرشویم که چندجمله‌ای بودن توابع، نقشی دراین مثال ندارد. تعیین مقدار در $t$، تابعکی خطی روی فضای همهٔ توابع از $F$ در $F$ است.

**مثال ۲۱.** تابعك زیر ممکن است مهمترین تابعك خطی در ریاضیات باشد. گیریم $[a, b]$ فاصله‌ای بسته روی خط حقیقی و $C([a, b])$ فضای توابع (با مقدار) حقیقی

پیوسته روی $[a,b]$ باشد. در این صورت،

$$L(g)=\int_a^b g(t)dt$$

تابعك خطی $L$ روی $C[a,b]$ را تعریف می کند.

اگر $V$ فضایی برداری باشد، دستهٔ همهٔ تابعکهای خطی روی $V$، بـه‌طریقی طبیعی فضایی برداری تشکیل می‌دهد. این فضا همان $L(V،F)$ است. ما این فضا را با $V^*$ نشان می‌دهیم و آن را **فضای دوگان** $V$ می‌نامیم:

$$V^*=L(V,F).$$

اگر بعد $V$ متناهی باشد، مـی‌توانیم توصیفی نسبتاً صریح از $V^*$ فضای دوگان $V$ به‌دست‌آوریم. در مورد فضای $V^*$ طبق قضیهٔ ۵ مطلبی می‌دانیم، و آن این است که

$$\text{بعد}(V^*)=\text{بعد}(V).$$

فرض کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. بنابر قضیهٔ ۱ (به‌ازای هر $i$) یك تابعك خطی یکتای $f_i$ روی $V$ وجود دارد که

$$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}. \tag{۳-۱۱}$$

بدین طریق، از $\mathcal{B}$ مجموعه‌ای از $n$ تابعك خطی متمایـز $f_1،\dots،f_n$ روی $V$ بـه‌دست می‌آوریم. این تابعکها دارای استقلال خطی نیز هستند. زیرا، فرض کنیم

$$f=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i \tag{۳-۱۲}$$

در این صورت

$$f(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(\alpha_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\delta_{ij}$$
$$=c_j.$$

بخصوص، اگر $f$ تابعك صفر باشد، بـه‌ازای هر $j$ داریم $f(\alpha_j)=0$، و لذا اسکالرهای $c_j$ همگی ۰ هستند. حال $n$ تابعك $f_1،\dots،f_n$ مستقل خطی هستند وچون می‌دانیم که بعد $V^*$ برابر $n$ است، مجموعهٔ $\mathcal{B}^*=\{f_1,\dots,f_n\}$ لزوماً بایدپایه‌ای برای $V^*$ باشد. این پایه، **پایهٔ دوگان** $\mathcal{B}$ نامیده می‌شود.

**قضیهٔ ۱۵.** فرض کنیم $V$ فضای بـرداری بـا بعد متناهـی بر روی هیأت $F$، و $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. در ایـن صورت، یك پـایـهٔ دوگان یکتای

$\mathcal{B}^*=\{f_1,\dots,f_n\}$ برای $V^*$ وجود دارد به‌طوری که $f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$. به‌ازای هرتابعك خطی $f$ روی $V$ داریم

$$f=\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)f_i \tag{۳-۱۳}$$

و به ازای هر بردار $\alpha$ از $V$ داریم

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i. \tag{۳-۱۴}$$

اثبات. قبلاً نشان دادیم که پایه‌ای یکتا که «دوگان» $\mathcal{B}$ است وجود دارد. اگر $f$ تابعکی خطی روی $V$ باشد، آنگاه $f$ ترکیبی خطی همچون (۳-۱۲) از $f_i$هاست، و همان طور که بعد از تساوی (۳-۱۲) ملاحظه کردیم اسکالرهای $c_j$ باید از $c_j=f(\alpha_j)$ به‌دست آیند. به‌طور مشابه، اگر

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$$

برداری از $V$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f_j(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_j(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\delta_{ij} \\ &= x_j\,. \end{aligned}$$

بدین‌نحو، عبارت یکتای $\alpha$ به‌عنوان ترکیبی خطی از $\alpha_i$ها

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i$$

است. □

معادلهٔ (۳-۱۴) روش خوبی جهت‌توصیف ماهیت پایهٔ‌دوگان برایمان فراهم‌می‌کند. این‌معادله می‌گوید که اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایهٔ‌مرتبی برای $V$ و $\mathcal{B}^*=\{f_1,\dots,f_n\}$ پایهٔ دوگان آن باشد، آنگاه $f_i$ دقیقاً تابعی است که به‌هر بردار $\alpha$ از $V$، $i$امین مختص $\alpha$ نسبت به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ را تخصیص می‌دهد. از این‌رو، می‌توانیم $f_i$ها را توابع مختصی برای $\mathcal{B}$ نیز بنامیم. فرمول (۳-۱۳) وقتی با (۳-۱۴) ترکیب شود می‌گوید که: اگر $f$ در $V^*$ با فرض $f(\alpha_i)=a_i$ باشد، آنگاه وقتی

$$\alpha=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$$

داریم

$$f(\alpha)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n. \tag{۳-۱۵}$$

به بیان دیگر، هرگاه پایهٔ مرتبی برای $V$ انتخاب کنیم، و هر بردار $V$ را توسط $n$تایی مختصاتش نسبت به $\mathcal{B}$، یعنی $(x_1,\cdots,x_n)$، توصیف کنیم، آنگاه هر تابعك خطی روی $V$ به‌صورت (۳-۱۵) است. این مطلب تعمیم طبیعی مثال ۱۸ است که حالت خاص $\mathcal{B}=\{\epsilon_1\cdots,\epsilon_n\}, V=F^n$ است.

**مثال ۲۲.** فرض کنیم $V$ فضای برداری همهٔ توابع چند جمله‌ای از $R$ در $R$ با درجهٔ ۲ یا کمتر باشد. گیریم $t_1$، $t_2$، و $t_3$ سه عدد حقیقی متمایز دلخواه باشند و

$$L_i(p)=p(t_i).$$

در این صورت، $L_1$، $L_2$، و $L_3$ تابعکهایی خطی روی $V$ هستند. این تابعکها مستقل خطی هستند؛ زیرا، فرض کنیم

$$L=c_1L_1+c_2L_2+c_3L_3.$$

اگر $L=0$؛ یعنی، به ازای هر $p$ از $V$، $L(p)=0$، آنگاه با به‌کار بستن $L$ بر «توابع» چند جمله‌ای خاص ۱، $x$، و $x^2$ به‌دست می‌آوریم

$$c_1+c_2+c_3=0$$
$$t_1c_1+t_2c_2+t_3c_3=0$$
$$t_1^2c_1+t_2^2c_2+t_3^2c_3=0.$$

از این معادلات نتیجه می‌شود که $c_1=c_2=c_3=0$، زیرا (همان‌طور که محاسبهٔ کوتاهی نشان می‌دهد) ماتریس

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ t_1 & t_2 & t_3\\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2\end{bmatrix}$$

وقتی $t_1$، $t_2$، و $t_3$ متمایز باشند، معکوس‌پذیر است. پس $L_i$ها مستقل‌اند و چون بعد $V$ برابر ۳ است، این تابعکها پایه‌ای برای $V^*$ تشکیل می‌دهند. این، پایهٔ دوگان کدام پایه از $V$ است؟ یك چنین پایهٔ $\{p_1, p_2, p_3\}$ از $V$ باید در شرط

$$L_i(p_j)=\delta_{ij}$$

یا

$$p_j(t_i)=\delta_{ij}$$

صدق کند. نسبتاً بسهولت دیده می‌شود که این توابع چندجمله‌ای عبارتند از

$$p_1(x)=\frac{(x-t_2)(x-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}$$

$$p_2(x)=\frac{(x-t_1)(x-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$$

$$p_3(x)=\frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}.$$

پایهٔ $\{p_1, p_2, p_3\}$ از $V$ جالب است، زیرا بنابر (۳-۱۴) به‌ازای هر $p$ در $V$ داریم

$$p=P(t_1)p_1+p(t_2)P_2+P(t_3)p_3.$$

از این‌رو، اگر $c_1$، $c_2$، و $c_3$ سه عدد حقیقی دلخواه باشند، دقیقاً یك تابع چندجمله‌ای $p$ بر روی $R$ وجود دارد که درجه‌اش حداکثر ۲ باشد ودرشرایط $p(t_j)=c_j$، $J=1,2,3$، صدق کند. این تابع چندجمله‌ای عبارت است از $p=c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3$.

اکنون دربارهٔ رابطهٔ بین تابعکهای خطی و زیرفضاها به بحث می‌پردازیم. اگر $f$ تابعك خطی غیر صفری باشد، آنگاه رتبهٔ $f$ یك است، زیرا برد $f$ زیرفضایی غیر صفر از هیأت اسکالرهاست و(بنابراین) بایدهمان‌هیأت‌اسکالرها باشد. اگر بعدفضای‌زمینه، $V$، متناهی باشد، قضیهٔ‌رتبه باضافهٔ پوچی (قضیهٔ۲) به‌ما می‌گوید که بعد فضای پوچ $N_f$ عبارت‌است‌از

$$(N_f)\ \text{بعد} = (V)\ \text{بعد} - 1\,.$$

درهر فضای برداری با بعد $n$، زیرفضایی با بعد $n-1$ یك **ابر فضا** نامیده می‌شود. چنین زیر فضایی گاهی ابر صفحه یا زیرفضای با همبعد ۱ نیز نامیده می‌شود. آیا هر ابر فضا، فضای پوچ تابعکی خطی است؟ بسادگی دیده می‌شود که جواب مثبت است. نشان دادن این مطلب چندان مشکل نیست که هر زیرفضای $d$ بعدی از فضایی $n$ بعدی اشتراك فضاهای پوچ $(n-d)$ تابعك خطی است (قضیهٔ ۱۶ زیر).

**تعریف.** اگر $V$ فضایی برداری بر روی هیأت $F$ و $S$ زیرمجموعه‌ای از $V$، باشد، **پوچساز** $S$ عبارت است از مجموعهٔ $S^\circ$ متشکل از تابعکهای خطی $f$ روی $V$ که به‌ازای هر $\alpha$ در $S$، $f(\alpha)=0$.

این مطلب باید روشن باشد که خواه $S$ زیر فضایی از $V$ باشد خواه نباشد، $S^\circ$ همواره زیرفضایی از $V^*$ است. اگر مجموعهٔ $S$ تنها متشکل از بردار صفر باشد، آنگاه $S^\circ=V^*$، و اگر $S=V$ آنگاه $S^\circ$ زیرفضای صفر $V^*$ است. (وقتی بعد $V$ متناهی باشد، مشاهدهٔ این مطلب ساده است.)

**قضیهٔ ۱۶.** فرض کنیم $V$ فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت $F$، و $W$ زیر-فضایی از $V$ باشد. در این صورت،

$$(V)\ \text{بعد} = (W^\circ)\ \text{بعد} + (W)\ \text{بعد}.$$

اثبات. گیریم $k$ بعد $W$ و $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ پایه‌ای برای آن باشد. بردارهای $\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n$ از $V$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ گردد. فرض‌کنیم دوگان این پایه از $V$ پایهٔ $\{f_1,\ldots,f_n\}$ برای $V^*$ باشد. ادعا این است که $\{f_{k+1},\ldots,f_n\}$ پایه‌ای برای پوچساز $W^\circ$ است. مسلماً به‌ازای هر $i\geqslant k+1$، $f_i$ به $W^\circ$ تعلق دارد، زیرا

$$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$$

و هرگاه $i\geqslant k+1$ و $j\leqslant k$، $\delta_{ij}=0$. از این مطلب نتیجه می‌شود که به‌ازای $i\geqslant k+1$، $f_i(\alpha)=0$ البته با این شرط که $\alpha$ ترکیبی خطی از $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ باشد. تابعکهای $f_{k+1},\ldots,f_n$ مستقل خطی هستند، از این‌رو تنها چیزی که باید نشان دهیم این است که آنها $W^\circ$ را پدید می‌آورند. فرض‌کنیم $f$ در $V^*$ باشد. حال

$$f=\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)f_i$$

و اگر $f$ در $W^\circ$ باشد، به‌ازای $i\leqslant k$ داریم $f(\alpha_i)=0$ و

$$f=\sum_{i=k+1}^{n} f(\alpha_i)f_i.$$

پس نشان داده‌ایم که اگر $\dim W=k$ و $\dim V=n$، آنگاه $\dim W^\circ=n-k$. □

**نتیجه.** اگر $W$ زیرفضایی $k$ بعدی از یک فضای برداری $n$ بعدی $V$ باشد، آنگاه $W$ اشتراک $(n-k)$ ابر فضا از $V$ است.

اثبات. این مطلب بیشتر نتیجه‌ای از اثبات قضیهٔ ۱۶ است تا از صورت آن. در نمادگذاری اثبات، $W$ دقیقاً مجموعهٔ بردارهای $\alpha$ است که $f_i(\alpha)=0$، $i=k+1,\ldots,n$. در حالت $k=n-1$، $W$ فضای پوچ $f_n$ است. □

**نتیجه.** اگر $W_1$ و $W_2$ زیرفضاهای یک فضای برداری با بعد متناهی باشند، آنگاه $W_1=W_2$ اگر و تنها اگر $W_1^\circ=W_2^\circ$.

اثبات. اگر $W_1=W_2$، آنگاه مسلماً $W_1^\circ=W_2^\circ$. اما اگر $W_1\neq W_2$، آنگاه یکی از این دو زیر فضا شامل برداری است که در زیرفضای دیگر نیست. فرض کنیم برداری چون $\alpha$ در $W_2$ هست که در $W_1$ نیست. بنا بر نتیجهٔ قبل (یا اثبات قضیهٔ ۱۶) تابعکی خطی چون $f$ موجود است که به‌ازای هر بردار $\beta$ از $W_1$، $f(\beta)=0$، اما $f(\alpha)\neq 0$. در این صورت $f$ در $W_1^\circ$ هست ولی در $W_2^\circ$ نیست و لذا $W_2^\circ\neq W_1^\circ$. □

در بخش بعد اثباتهای مختلفی برای این‌دو نتیجه خواهیم‌آورد. نتیجهٔ اول می‌گوید که: اگر پایهٔ مرتبی برای فضا انتخاب‌کنیم، هر زیرفضای $k$ بعدی می‌تواند با وضع $(n-k)$ شرط خطی همگن روی مختصات نسبت به‌آن پایه توصیف شود.

اکنون به‌طور اجمال، ازدیدگاه تابعکهای خطی، نظری به‌دستگاههای معادلات خطی

همگن می‌افکنیم. فرض کنیم دستگاه معادلات خطی

$$A_{11}x_1+\cdots+A_{1n}x_n=0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$A_{m1}x_1+\cdots+A_{mn}x_n=0$$

داده شده و بخواهیم جوابهای آن را بیابیم. اگر فرض کنیم $f_i$ها، $i=1,\ldots,m$، تابعکهایی خطی روی $F^n$ باشند که با

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)=A_{i1}x_1+\cdots+A_{in}x_n$$

تعریف می‌شوند، آنگاه زیرفضایی از $F^n$ متشکل از همهٔ $\alpha$هایی را می‌جوییم که

$$f_i(\alpha)=0, \quad i=1, \ldots, m.$$

به‌بیان دیگر، زیرفضایی را جستجو می‌کنیم که توسط $f_1$، $\ldots$، $f_m$ پوچ می‌شود. عمل تحویل سطری ماتریس ضرایب، روشی با نظام جهت یافتن این زیرفضا دراختیار ما می‌گذارد. $n$تایی $(A_{i1}, \ldots, A_{in})$، مختصات تابعک خطی $f_i$ نسبت به‌پایه‌ای که‌دوگان پایهٔ استانده $F^n$ است‌را به‌دست می‌دهد. لذا، فضای سطری ماتریس ضرایب را می‌توان به‌عنوان فضای تابعکهای خطی پدید آمده توسط $f_1$، $\ldots$، $fm$ به‌حساب آورد. فضای جواب، زیرفضای پوچ شده توسط این فضا از تابعکها است.

اکنون می‌توان ازدیدگاه «دوگان» به‌دستگاه معادلات نظر کرد. به‌این‌معنی‌که فرض کنیم $m$ بردار

$$\alpha_i=(A_{i1}, \ldots, A_{in})$$

از $F^n$ به‌ما داده شده باشند وبخواهیم پوچساز زیرفضای پدیدآمده توسط این بردارهارا بیابیم. چون هرتابعک خطی روی $F^n$ نوعاً به‌صورت

$$f(x_1, \ldots, x_n)=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

است، شرط بودن $f$ دراین پوچساز این است که

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}c_j=0, \quad i=1, \ldots, m$$

یعنی، این است‌که $(c_1, \ldots, c_n)$ جوابی از دستگاه $AX=0$ باشد. با این دید، عمل تحویل سطری، روشی بانظام برای یافتن پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط مجموعهٔ متناهی مفروضی ازبردارهای $F^n$ به‌دست می‌دهد.

**مثال ۲۳.** ذیلاً سه تابعک خطی روی $R^4$ داده شده است:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1+2x_2+2x_3+x_4$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)= 2x_2+x_4$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)=-2x_1-4x_3+3x_4.$$

زیرفضایی که توسط این تابعکها پوچ می‌شود، با یافتن شکل تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۰ & -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

به‌طور صریح به‌دست می‌آید. محاسبه‌ای کوتاه یا نظری به‌مثال ۲۱ از فصل ۲ نشان می‌دهد که

$$R=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، تابعکهای خطی

$$g_۱(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)=x_۱+۲x_۳$$
$$g_۲(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)=x_۲$$
$$g_۳(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)=x_۴$$

همان زیرفضایی از $(R^۴)^*$ را پدید می‌آورند که تابعکهای $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$؛ و همان زیر-فضایی از $R^۴$ را پوچ می‌سازند که $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$. زیرفضای پوچ‌شده، متشکل از بردارهایی است که درشرایط

$$x_۱=-۲x_۳$$
$$x_۲=x_۴=۰$$

صدق می‌کنند.

**مثال ۲۴.** فرض کنیم $W$ زیرفضایی از $R^۵$ باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_۱=(۲, -۲, ۳, ۴, -۱) \qquad \alpha_۳=(۰, ۰, -۱, -۲, ۳)$$
$$\alpha_۲=(-۱, ۱, ۲, ۵, ۲) \qquad \alpha_۴=(۱, -۱, ۲, ۳, ۰)$$

پدید می‌آید. چگونه می‌توان $W^۰$، پوچساز $W$ را توصیف کرد؟ ماتریسی ۵ × ۴، مانند $A$، با بردارهای سطری $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$، و $\alpha_۴$ را تشکیل می‌دهیم و ماتریس تحویل شده‌سطری پلکانی $R$ را که هم‌ارز سطری $A$ است می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۳ & ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۵ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow R=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

اگر $f$ تابعکی خطی روی $R^5$ باشد:

$$f(x_1, \cdots, x_5)=\sum_{j=1}^{5} c_j x_j$$

آنگاه $f$ در $W^\circ$ قرار دارد اگروتنها اگر $f(\alpha_i)=0$، به‌ازای $i=1, 2, 3, 4$؛ یعنی، اگروتنها اگر

$$\sum_{j=1}^{5} A_{ij}c_j=0, \quad 1\leqslant i\leqslant 4.$$

واین خود هم‌ارز است با

$$\sum_{j=1}^{5} R_{ij}c_j=0, \quad 1\leqslant i\leqslant 3$$

یا

$$\begin{aligned} c_1-c_2-c_4&=0\\ c_3+2c_4&=0\\ c_5&=0. \end{aligned}$$

همهٔ این‌گونه تابعکهای‌خطی $f$ را با تخصیص‌مقادیری دلخواه به $c_2$ و $c_4$، مثلاً $c_2=a$ و $c_4=b$، وسپس‌یافتن‌مقادیرمتناظر $c_1=a+b$، $c_3=-2b$، و $c_5=0$ به‌دست‌می‌آوریم. بنا براین $W^\circ$ متشکل ازهمهٔ تابعکهای خطی $f$ به‌صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(a+b)x_1+ax_2-2bx_3+bx_4$$

است. بعد $W^\circ$ دواست وپایهٔ $\{f_1, f_2\}$ برای $W^\circ$ ازقراردادن $a=1$ و $b=0$ درابتدا، وسپس $a=0$ و $b=1$ به‌دست می‌آید:

$$f_1(x_1, \cdots, x_5)=x_1+x_2$$

$$f_2(x_1, \cdots, x_5)=x_1-2x_3+x_4.$$

تابعک نوعی $f$ از $W^\circ$ عبارت است از: $f=af_1+bf_2$.

## تمرین

۱. در $R^3$ بردارهای $\alpha_1=(1, 0, 1)$، $\alpha_2=(0, 1, -2)$، و $\alpha_3=(-1, -1, 0)$ را انتخاب می‌کنیم

(الف) هرگاه تابعک خطی $f$ روی $R^3$ با شرایط

$$f(\alpha_1)=1, \quad f(\alpha_2)=-1, \quad f(\alpha_3)=3$$

باشد و $\alpha=(a, b, c)$، دراین صورت $f(\alpha)$ را بیابید.

(ب) تابعک خطی $f$ روی $R^3$ راکه

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=0 \quad \text{ولی} \quad f(\alpha_3)\neq 0$$

به‌طور صریح توصیف کنید.

(پ) فرض کنید تابعك خطی $f$ با خواص

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=0, \quad f(\alpha_3)\neq 0$$

باشد و $\alpha=(2, 3, -1)$. نشان دهید $f(\alpha)\neq 0$.

۲. فرض کنید پایهٔ $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ برای $C^3$ به‌صورت

$$\alpha_1=(1, 0, -1), \quad \alpha_2=(1, 1, 1), \quad \alpha_3=(2, 2, 0)$$

تعریف شده است. پایهٔ دوگان $\mathcal{B}$ را بیابید.

۳. اگر $A$ و $B$ دو ماتریس $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشند، نشان دهید $tr(AB)=tr(BA)$. سپس نشان دهید ماتریسهای متشابه، ردهای متساوی دارند.

۴. فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ توابع چند جمله‌ای $p$ از $R$ در $R$ با درجهٔ ۲ یا کمتر باشد:

$$p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2.$$

سه تبدیل خطی توسط

$$f_1(p)=\int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p)=\int_0^2 p(x)dx,$$

$$f_3(p)=\int_0^{-1} p(x)dx$$

روی $V$ تعریف می‌کنیم. با ارائه پایه‌ای برای $V$ که $\{f_1, f_2, f_3\}$ دوگان آن باشد، نشان دهید $\{f_1, f_2, f_3\}$ پایه‌ای برای $V^*$ است.

۵. اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مختلط $n\times n$ باشند، نشان دهید که تساوی $AB-BA=I$ غیر ممکن است.

۶. فرض کنید $m$ و $n$ دو عدد صحیح مثبت و $F$ یك هیأت باشد، و $f_1$، ...، $f_m$ تابعکهایی خطی روی $F^n$ باشند. به‌ازای هر $\alpha$ در $F^n$ تعریف می‌کنیم

$$T\alpha=(f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha)).$$

نشان‌دهید $T$ تبدیلی خطی از $F^n$ در $F^m$ است. سپس نشان‌دهید هر تبدیل خطی از $F^n$ در $F^m$، به‌ازای $f_1$، ...، $f_m$ هایی، به‌شکل بالاست.

۷ . فرض کنید $\alpha_1 = (1, 0, -1, 2)$ و $\alpha_2 = (2, 3, 1, 1)$، و $W$ زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$ و $\alpha_2$ از $R^4$ باشد. از تابعکهایی خطی مانند $f$ به‌صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

کدام درپوچساز $W$ قراردارد؟

۸ . فرض کنید $W$ زیرفضایی از $R^5$ باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \epsilon_3, \qquad \alpha_2 = \epsilon_2 + 3\epsilon_3 + 3\epsilon_4 + \epsilon_5$$

$$\alpha_3 = \epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 6\epsilon_3 + 4\epsilon_4 + \epsilon_5$$

پدید می‌آید. پایه‌ای برای $W^\circ$ بیابید.

۹ . فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ ماتریسهای $2 \times 2$ برروی هیأت اعداد حقیقی باشد، و

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید $W$ زیرفضای متشکل از همهٔ $A$های با شرط $AB = 0$ از $V$، و تابعك خطی $f$ روی $V$ متعلق به پوچساز $W$ باشد. اگر $f(I) = 0$، $f(C) = 3$، $I$ ماتریس همانی $2 \times 2$ و

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باشند، $f(B)$ را بیابید.

۱۰. فرض کنید $F$ زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد. $n$ تابعك خطی روی $F^n$ $(n \geqslant 2)$ توسط

$$f_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} (k-j)x_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

تعریف می‌کنیم. بعد زیرفضای پوچ شده توسط $f_1$، $\cdots$، $f_n$ چیست؟

۱۱. فرض کنید $W_1$ و $W_2$ دوزیرفضا ازیك فضای برداری با بعد متناهی $V$ باشند.

(الف) ثابت کنید $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$.

(ب) ثابت کنید $(W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ$.

۱۲. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ و $W$ زیرفضایی از $V$ باشد. اگر $f$ تابعکی خطی روی $W$ باشد، ثابت کنید یك تابعك خطی $g$ روی $V$

یافت می‌شود به‌طوری‌که به‌ازای هر $\alpha$ درزیرفضای $W$، $g(\alpha)=f(\alpha)$.

۱۳. فرض‌کنید $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط و $V$ فضای برداری دلخواهی برروی $F$ باشد. $f$ و $g$ را تابعکهایی خطی روی $V$ می‌گیریم به‌قسمی‌که تابع $h$ تعریف شده توسط $h(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$ نیز تابعکی خطی روی $V$ شود. ثابت‌کنید $f=0$ یا $g=0$.

۱۴. فرض‌کنید $F$ هیأتی با سرشت‌نمای صفر و $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی $F$ باشد. اگر $\alpha_1$، ...، $\alpha_m$ تعدادی متناهی بردار از $V$ باشند، و همه مخالف بردار صفر، ثابت‌کنید یك تابعك $f$ روی $V$ یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$f(\alpha_i)\neq 0, \quad i=1, \cdots, m.$$

۱۵. بنابرتمرین ۳، ماتریسهای متشابه دارای ردهای متساوی‌اند. از این‌رو، می‌توانیم رد یك عملگرخطی روی یك فضای با بعد متناهی را رد هرماتریسی‌که آن عملگررا در یك پایهٔ مرتب نمایش دهد تعریف‌کنیم. این مفهوم خوش تعریف است، چرا که همهٔ این‌گونه ماتریسهای نمایش برای یك عملگر با هم متشابه‌اند.
حال فرض کنید $V$ فضای همهٔ ماتریسهای $2\times 2$ برروی هیأت $F$ و $P$ ماتریس $2\times 2$ ثابتی باشد. فرض‌کنید $T$ عملگرخطی تعریف شده توسط $T(A)=PA$ روی $V$ باشد. ثابت‌کنید $tr(A)=2tr(P)$.

۱۶. نشان دهید تابعك رد روی ماتریسهای $n\times n$، به‌مفهوم زیر، یکتاست. اگر $W$ فضای ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت $F$، و $f$ تابعکی خطی روی $W$ باشدکه به‌ازای هر $A$ و $B$ از $W$، $f(AB)=f(BA)$، آنگاه $f$ مضربی اسکالری از تابع رد است. اگرعلاوه براین $f(I)=n$، آنگاه $f$ خود تابع رد می‌باشد.

۱۷. فرض‌کنید $W$ فضای ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت $F$ و $W_0$ زیرفضای پدیدآمده توسط‌ماتریسهای $C$ به‌صورت $C=AB-BA$ باشد. ثابت‌کنید $W_0$ دقیقاً زیرفضای متشکل ازماتریسهایی‌است که دارای رد صفرهستند. (راهنمایی: بعدفضای ماتریسهای با رد صفر چیست؟ از «واحدهای» ماتریسی، یعنی از ماتریسهایی‌که تنها یك درایهٔ غیرصفردارند برای ساختن تعداد کافی ماتریس مستقل خطی به‌صورت $AB-BA$ استفاده‌کنید.)

## ۶.۳. دوگان مضاعف

یك پرسش دربارهٔ پایه‌های دوگان‌که در بخش قبل بدان پاسخ ندادیم، این بودکه آیا هرپایه برای $V^*$ دوگان پایه‌ای برای $V$ هست یا نه. روشی برای پاسخگویی به‌این

www.riazisara.ir



پرسش این است که $V^{**}$، فضای دوگان $V$ را بررسی کنیم.

اگر $\alpha$ برداری از $V$ باشد، آنگاه $\alpha$ تبدیل خطی $L_\alpha$ را که با

$$L_\alpha(f)=f(\alpha) \text{،} \quad \text{به‌ازای هر } f \text{ در } V^*$$

تعریف می‌شود، روی $V^*$ القا می‌کند. اثبات این‌که $L_\alpha$ خطی است، چیزی نیست جز فرمولبندی مجدد تعریف اعمال خطی در $V^*$:

$$\begin{aligned} L_\alpha(cf+g) &= (cf+g)(\alpha) \\ &= (cf)(\alpha)+g(\alpha) \\ &= cf(\alpha)+g(\alpha) \\ &= cL_\alpha(f)+L_\alpha(g). \end{aligned}$$

اگر $V$ با بعد متناهی باشد و $\alpha\neq 0$، آنگاه $L_\alpha\neq 0$؛ به بیان دیگر، یک تابعک خطی $f$ وجود دارد که $f(\alpha)\neq 0$. اثبات این مطلب بسیار ساده است و در بخش ۵.۳ آمده است: پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ با شرط $\alpha_1=\alpha$ را برای $V$ انتخاب کنید و $f$ را تابعکی خطی بگیرید که به هر بردار $V$، اولین مختصش در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ را نسبت دهد.

**قضیهٔ ۱۷.** فرض کنیم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت $F$ باشد. به‌ازای هر بردار $\alpha$ از $V$ تعریف می‌کنیم

$$L_\alpha(f)=f(\alpha) \text{،} \quad \text{به‌ازای هر } f \text{ در } V^*.$$

دراین صورت، نگاشت $\alpha\to L_\alpha$ یك یکریختی از $V$ بروی $V^{**}$ است.

اثبات. نشان دادیم که به‌ازای هر $\alpha$ تابع $L_\alpha$ خطی است. فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ در $V$ و $c$ در $F$ باشد، و همچنین $\gamma=c\alpha+\beta$. در این صورت، به‌ازای هر $f$ در $V^*$،

$$\begin{aligned} L_\gamma(f) &= f(\gamma) \\ &= f(c\alpha+\beta) \\ &= cf(\alpha)+f(\beta) \\ &= cL_\alpha(f)+L_\beta(f) \end{aligned}$$

و از این رو

$$L_\gamma=cL_\alpha+L_\beta\,.$$

این نشان می‌دهد که نگاشت $\alpha\to L_\alpha$، تبدیلی خطی از $V$ در $V^{**}$ است. این تبدیل نامنفرد است؛ زیرا، بنا بر ملاحظات فوق، $L_\alpha=0$ اگر و تنها اگر $\alpha=0$. پس $\alpha\to L_\alpha$ تبدیل خطی نامنفردی از $V$ در $V^{**}$ است و چون

$$\text{بعد}\,(V)=\text{بعد}\,(V^*)=\text{بعد}\,(V^{**})$$

قضیهٔ ۹ بیان می‌کند که این تبدیل معکوس‌پذیر، وبنابراین یك یکریختی از $V$ بروی $V^{**}$ است. □

**نتیجه.** فرض کنیم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ باشد. اگر $L$ تابعکی خطی روی $V^*$، فضـای دوگان $V$، باشد، آنگاه یـك بردار یکتای $\alpha$ در $V$ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $f$ در $V^*$

$$L(f)=f(\alpha)\,.$$

**نتیجه.** فرض‌کنیم $V$ یك فضای برداری بابعد متناهی برروی هیأت $F$ باشد.هرپایه از $V^*$ دوگان پایه‌ای از $V$ است.

اثبات. گیریم $\mathcal{B}^*=\{f_1, \cdots, f_n\}$ پایه‌ای بـرای $V^*$ باشد. بنابر قضیهٔ ۱۵، پایه‌ای چون $\{L_1, \cdots, L_n\}$ برای $V^{**}$ با این خاصیت یافت می‌شودکه

$$L_i(f_j)=\delta_{ij}\,.$$

با استفاده از نتیجهٔ قبل، به‌ازای هر $i$ یك بردار $\alpha_i$ در $V$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f$ در $V^*$

$$L_i(f)=f(\alpha_i)$$

یعنی، $L_i=L_{\alpha_i}$. ازاینجا بلافاصله نتیجه می‌شودکه $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ است و $\mathcal{B}^*$ دوگان این پایه است. □

نظر به‌قضیهٔ ۱۷، معمولاً $\alpha$ را بـا $L_\alpha$ یکی می‌گیریم، ومی‌گوییم $V$ دوگان فضای $V^*$ «است»، یااینکه فضاهای $V$ و $V^*$ به‌طورطبیعی در دوگانی یکدیگر هستند، ویا اینکه هرفضا دوگان فضای دیگراست. آخرین نتیجه گواه مفید بودن این نتایج است. گواه‌دیگر به‌شرح زیراست.

اگر $E$ زیرمجموعه‌ای از $V^*$ باشد، آنگاه پوچساز $E^\circ$ (بنابه‌قاعده) زیرمجموعه‌ای از $V^{**}$ است. اگرنظر به‌قضیهٔ ۱۷ تصمیم به‌یکی انگاشتن $V$ و $V^{**}$ بگیریم، آنگاه $E^\circ$ زیرفضایی از $V$ خواهد بودکه مجموعهٔ همهٔ $\alpha$های $V$ با شرط $f(\alpha)=0$ به‌ازای همـهٔ $f$های در$E$ است. دریکی از نتیجه‌های قضیهٔ ۱۶ مشاهده‌کردیم که هرزیرفضای $W$توسط پوچسازش $W^\circ$ تعیین می‌شود. چگونه؟ پاسخ این است‌که $W$ زیرفضای پوچ شده توسط همهٔ $f$های در$W^\circ$، یعنی اشتراك فضاهای پوچ همهٔ $f$های متعلق به $W^\circ$ است. بـا توجه به‌نماد مـورد استفاده بـرای پوچسازهـا، پـاسخ را می‌توان بسیار ساده بیـان کـرد: $W=(W^\circ)^\circ$.

**قضیهٔ ۱۸.** اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از فضای برداری با بعد متناهی $V$ باشد، آنگاه $(S^\circ)^\circ$ زیرفضای پدیدآمده توسط $S$ است.

اثبات. گیریم $W$ زیرفضای پدید آمده توسط $S$ باشد. واضح است که $S^{\circ}=W^{\circ}$. بنابراین، کافی است اثبات کنیم که $W^{\circ\circ}=W$. قبلاً* اثباتی از این مطلب عرضه کردیم، و اینك اثباتی دیگر. بنابر قضیهٔ ۱۶

$$\text{بعد}\,(V)=\text{بعد}\,(W^{\circ})+\text{بعد}\,(W)$$
$$\text{بعد}\,(V^{*})=\text{بعد}\,(W^{\circ\circ})+\text{بعد}\,(W^{\circ})$$

و چون بعد $(V^{*})=$ بعد $(V)$ داریم

$$\text{بعد}\,(W^{\circ\circ})=\text{بعد}\,(W).$$

چون $W$ زیرفضای $W^{\circ\circ}$ است، می‌بینیم که $W=W^{\circ\circ}$. □

نتایج این بخش برای فضاهای برداری دلخواه نیز برقرار هستند؛ لکن، اثباتها مستلزم استفاده از به‌اصطلاح اصل انتخاب می‌باشند. چون نمی‌خواهیم خود را درگیر بحثی طولانی دربارهٔ این اصل بکنیم، پوچسازها را در فضاهای برداری عمومی مورد بحث قرار نمی‌دهیم. اما، دو نتیجه دربارهٔ تابعکهای خطی روی فضاهای برداری دلخواه چنان اساسی هستند که نمی‌توان از آنها بسادگی گذشت.

گیریم $V$ فضایی برداری باشد. می‌خواهیم ابر فضاهای $V$ را تعریف کنیم. بجز در حالتی که بعد $V$ متناهی باشد، نمی‌توانیم ابرفضاها را از طریق بعدآنها تعریف کنیم. ولی می‌توانیم این ایده را که زیر فضای $N$ برای پرکردن $V$ دقیقاً یك بعدکم دارد، به‌طریق زیر بیان کنیم:

۱. $N$ زیرفضایی سره از $V$ است؛

۲. اگر زیرفضای $W$ از $V$ شامل $N$ باشد، آنگاه یا $W=N$ و یا $W=V$. شرایط (۱) و (۲) توأماً بیان می‌کنند که $N$ زیرفضایی سره است، و زیرفضای سره‌ای بزرگتر از آن وجود ندارد؛ به‌طور خلاصه، $N$ یك زیرفضای سرهٔ ماکسیمال است.

**تعریف.** اگر $V$ فضایی برداری باشد، یك **ابرفضای** $V$ یك زیرفضای سرهٔ ماکسیمال $V$ است.

**قضیهٔ ۱۹.** اگر $f$ تابعك خطی غیرصفری روی فضای برداری $V$ باشد، آنگاه فضای پوچ $f$، یك ابرفضای $V$ است. بعکس، هر ابرفضای $V$، فضای پوچ تابعك خطی غیر صفری (نه لزوماً یکتا) روی است.

اثبات. فرض کنیم $f$ تابعك خطی غیرصفری روی $V$، و $N_f$ فضای پوچ آن باشد. $\alpha$ را برداری از $V$ می‌گیریم که در $N_f$ نباشد؛ یعنی، $\alpha$ را برداری می‌گیریم که $f(\alpha)\neq 0$. نشان می‌دهیم که هر بردار $V$، در فضای پدیدآمده توسط $N_f$ و $\alpha$ قرار دارد. این زیر-فضا شامل همهٔ بردارهای

$$\gamma+c\alpha,\quad \gamma \text{ در } N_f،\ c \text{ در } F$$

است. هرگاه $\beta$ در $V$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$c=\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}.$$

این تعریف بامعنی است چرا که $f(\alpha)\neq 0$. دراین صورت، بردار $\gamma=\beta-c\alpha$ در $N_f$ است، زیرا

$$\begin{aligned} f(\gamma)&=f(\beta-c\alpha)\\ &=f(\beta)-cf(\alpha)\\ &=0. \end{aligned}$$

لذا، $\beta$ در زیر فضای پدیدآمده توسط $N_f$ و $\alpha$ قرار دارد.

حال $N$ را یك ابرفضای $V$ فرض می‌کنیم و برداری چون $\alpha$ را در نظر می‌گیریم که در $N$ نباشد. چون $N$ یك زیرفضای سرهٔ ماکسیمال است، زیرفضای پدیدآمده توسط $N$ و $\alpha$ کل فضای $V$ است. بنابراین، هر بردار $\beta$ از $V$ به‌صورت

$$\beta=\gamma+c\alpha،\quad \gamma \text{ در } N \text{ و } c \text{ در } F$$

است. بردار $\gamma$ و اسکالر $c$ توسط $\beta$ به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. زیر ، اگر همچنین داشته باشیم

$$\beta'=\gamma'+c'\alpha،\quad \gamma' \text{ در } N \text{ و } c' \text{ در } F$$

آنگاه

$$(c'-c)\alpha=\gamma-\gamma'.$$

اگر $c-c'\neq 0$، آنگاه $\alpha$ باید در $N$ باشد؛ از این‌رو، $c=c'$ و $\gamma=\gamma'$. طریقی دیگر برای بیان نتیجهٔ حاصل چنین است. اگر $\beta$ در $V$ باشد، اسکالریکتایی چون $c$ وجوددارد که $\beta-c\alpha$ در $N$ است. این اسکالر را $g(\beta)$ می‌نامیم. حال، بررسی این‌که $g$ تابعکی خطی روی $V$ و $N$ فضای پوچ $g$ است، آسان می‌باشد. □

**لم.** اگر $f$ و $g$ تابعکهایی خطی روی فضای برداری $V$ باشند، آنگاه $g$ مضرب اسکالری $f$ است اگر و تنها اگر فضای پوچ $g$ شامل فضای پوچ $f$ باشد؛ یعنی اگر و تنها اگر $f(\alpha)=0$ ایجاب کندکه $g(\alpha)=0$.

**اثبات.** اگر $f=0$، آنگاه به‌همین نحو $g=0$ و مسلماً $g$ مضربی اسکالری از $f$ است. فرض کنیم $f\neq 0$؛ آنگاه فضای پوچ $N_f$ یك ابر فضای $V$ است. بردار $\alpha$ از $V$ را با شرط $f(\alpha)\neq 0$ انتخاب و فرض می‌کنیم

$$c=\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

تابعك خطی $h=g-cf$ روی $N_f$ صفر است، زیرا $f$ و $g$ هر دو روی $N_f$ صفرهستندو $h(\alpha)=g(\alpha)-cf(\alpha)=0$. پس، $h$ روی زیرفضای پدید آمده توسط $N_f$ و $\alpha$، صفر است و این زیر فضا خود $V$ است. نتیجه اینکه $h=0$، یعنی، $g=cf$. □

**قضیهٔ ۲۰.** فرض کنیم $g$، $f_1$، ...، $f_r$ تابعکهایی خطی روی فضای برداری $V$، بترتیب، با فضاهای پوچ $N$، $N_1$، ...، و $N_r$ باشند. در این صورت، $g$ ترکیبی خطی از $f_1$، ...، و $f_r$ است اگر و تنها اگر $N$ شامل اشتراك $N_1\cap\cdots\cap N_r$ باشد.

اثبات. اگر $g=c_1f_1+\cdots+c_rf_r$، وبه‌ازای هر $i$ داشته باشیم $f_i(\alpha)=0$، آنگاه بوضوح $g(\alpha)=0$. بنابراین، $N$ شامل $N_1\cap\cdots\cap N_r$ است.

حالت عکس (نیمهٔ «اگر» قضیه) را به استقرا نسبت بـه $r$ اثبات می‌کنیم. لم قبل اثبات‌حالت $r=1$ را به‌دست می‌دهد. فرض‌کنیم قضیه را برای حالت $r=k-1$بدانیم و تابعکهای خطی $f_1$، ...، و $f_k$ را با فضاهای پوچ $N_1$، ...، $N_k$ با این شرط کـه $N_1\cap\cdots\cap N_k$ مشمول در $N$، فضـای پـوچ $g$، بـاشد در نظـر مـی گیریم. اگـر $g'$، $f'_1$، ...، $f'_{k-1}$ تحدیدهای $g$، $f_1$، ...، و $f_{k-1}$ به زیرفضای $N_k$ باشند، آنگاه $g'$، $f'_1$، ...، و $f'_{k-1}$ تابعکهایی خطی روی فضای برداری $N_k$ هستند. بعلاوه، اگر $\alpha$ برداری در $N_k$ باشد وبه‌ازای $i=1,\cdots,k-1$ داشته باشیم $f'_i(\alpha)=0$، آنگاه $\alpha$ در $N_1\cap\cdots\cap N_k$ است و لذا $g'(\alpha)=0$. بنا بـه‌فرض استقرا (حـالت $r=k-1$) اسکالرهایی چون $c_i$ وجود دارندکه

$$g'=c_1f'_1+\cdots+c_{k-1}f'_{k-1}.$$

اکنون فرض می‌کنیم

$$h=g-\sum_{i=1}^{k-1}c_if_i. \tag{۱۶-۳}$$

در این صورت، $h$ تابعکی خطی روی $V$ است و (۳-۱۶) می‌گویدکـه به‌ازای هر $\alpha$ از $N_k$، $h(\alpha)=0$. بنا بر لم قبل، $h$ مضربی اسکالری از $f_k$ است. اگر $h=c_kf_k$، آنگاه

$$g=\sum_{i=1}^{k}c_if_i. \quad \square$$

## تمرین

۱. فرض کنید $n$ عددی صحیح مثبت و $F$ یك هیأت باشد. $W$ را مجموعهٔ همهٔ بردارهای $(x_1,\cdots,x_n)$ از $F^n$ بگیریدکه $x_1+\cdots+x_n=0$.

(الف) ثابت‌کنید $W^0$ متشکل است از همهٔ تابعکهای خطی $f$ به‌صورت

$$f(x_1,\cdots,x_n)=c\sum_{j=1}^{n}x_j.$$

(ب) نشان دهید $W^*$، فضای‌دوگان $W$ را می‌توان«به‌طورطبیعی» با تابعکهای خطی

$$f(x_1,\cdots,x_n)=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

روی $F^n$ با شرط $c_1+\cdots+c_n=0$ یکی گرفت.

۲. قضیهٔ ۲۰ را برای اثبات مطلب ذیل به‌کار ببرید. اگر $W$ زیرفضایی از یك فضای برداری با بعد متناهی $V$ و $\{g_1,\cdots,g_r\}$ پایه‌ای برای $W^0$ باشد، آنگاه

$$W=\bigcap_{i=1}^{r}N_{g_i}.$$

۳. فرض کنید $S$ یك‌مجموعه، $F$ یك‌هیأت، و $V(S;F)$ فضای‌همهٔ‌توابع از $S$ در $F$ باخواص

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(cf)(x)=cf(x)$$

باشد. $W$ را زیرفضای $n$ بعدی دلخواهی از $V(S;F)$ بگیرید و نشان دهید نقاطی چون $x_1,\cdots,x_n$ در $S$ وتوابعی چون $f_1,\cdots,f_n$ در $W$ یافت می‌شوند به‌طوری‌که $f_i(x_j)=\delta_{ij}$.

## ۷.۳ ترانهادهٔ تبدیل خطی

فرض‌کنیم دوفضای برداری $V$ و $W$ بر روی هیأت $F$ و تبدیل خطی $T$ از $V$ در $W$داده شده باشند. در این صورت، $T$ تبدیلی خطی از $W^*$ در $V^*$، به‌طریق زیر، القا می‌کند. فرض‌کنید $g$ تابعکی خطی روی $W$ باشد و به‌ازای هر $\alpha$ از $V$

$$f(\alpha)=g(T\alpha). \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

در این صورت، (۳-۱۷) یك تابع $f$ از $V$ در $F$ تعریف می‌کند. این تابع از ترکیب تابع $T$ از $V$ در $W$ با تابع $g$ از $W$ در $F$ حاصل می‌شود. چون $T$ و $g$ هر دو خطی هستند، قضیهٔ ۶ می‌گوید که $f$ نیز خطی است؛ یعنی، $f$ تابعکی خطی روی $V$ است. پس، $T$ یك قاعدهٔ $T^t$ در دسترس ما می‌گذارد که هر تابعك خطی $g$ روی $W$ را به‌یك تابعك خطی $f=T^tg$ روی $V$، که طبق (۳-۱۷) تعریف می‌شود، مربوط می‌سازد. بعلاوه، توجه کنید که $T^t$ درواقع تبدیلی خطی از $W^*$ در $V^*$ است؛ زیرا، اگر $g_1$ و $g_2$ در $W^*$ باشند و $c$ یك اسکالر

$$\begin{aligned}[T^t(cg_1+g_2)](\alpha)&=(cg_1+g_2)(T\alpha)\\&=cg_1(T\alpha)+g_2(T\alpha)\\&=c(T^tg_1)(\alpha)+(T^tg_2)(\alpha)\end{aligned}$$

و از اینجا $T^t(cg_1+g_2)=cT^tg_1+T^tg_2$. این مطلب را خلاصه می‌کنیم.

**قضیهٔ ۲۱.** فرض کنیم $V$ و $W$ فضاهایی برداری بر روی هیأت $F$ باشند. به‌ازای هر تبدیل خطی $T$ از $V$ در $W$ یك تبدیل خطی یکتای $T^t$ از $W^*$ در $V^*$ وجود داردکه به ازای هر $g$ از $W^*$ و هر $\alpha$ از $V$،

$$(T^tg)(\alpha)=g(T\alpha).$$

$T^t$ را **ترانهادهٔ** $T$ می‌نامیم. تبدیل $T^t$ اغلب الحاقی $T$ هم نامیده می‌شود، لکن، ما این اصطلاح را به‌کار نخواهیم برد.

**قضیهٔ ۲۲.** فرض کنیم $V$ و $W$ فضاهایی برداری بر روی هیأت $F$، و $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد. فضای پوچ $T^t$ پوچساز برد $T$ است. اگر $V$ و $W$ با بعدمتناهی باشند، آنگاه

(۱) رتبهٔ $(T^t)=$ رتبهٔ $(T)$؛

(۲) برد $T^t$ پوچساز فضای پوچ $T$ است.

اثبات. اگر $g$ در $W^*$ باشد،آنگاه بنا بر تعریف به‌ازای هر $\alpha$ از $V$،

$$(T^tg)(\alpha)=g(T\alpha).$$

این‌که $g$ در فضای پوچ $T^t$ باشد بدین معنی است‌که به‌ازای هر $\alpha$ از $V$، $g(T\alpha)=0$. پس، فضای پوچ $T^t$ دقیقاً همان پوچساز برد $T$ است.

فرض‌کنیم $V$ و $W$ با بعد متناهی باشند، مثلاً $\dim V=n$ و $\dim W=m$. برای اثبات (۱): گیریم $r$ رتبهٔ $T$، یعنی بعد برد $T$ باشد. طبق قضیهٔ ۱۶، بعد پوچساز برد $T$ برابر $(m-r)$ است. بنابر اولین حکم این قضیه، پوچی $T^t$ باید $(m-r)$ باشد. اما در آن صورت، چون $T^t$ تبدیلی خطی روی یك فضای $m$ بعدی است، رتبهٔ $T^t$ برابر $m-(m-r)=r$ است، و لذا رتبه‌های $T$ و $T^t$ برابرند. برای اثبات (۲): گیریم $N$ فضای پوچ $T$ باشد. هر تابعك واقع در برد $T^t$ در پوچساز $N$ قرار دارد؛ زیرا، فرض کنیم به‌ازای یك $g$ از $W^*$ داشته باشیم $f=T^tg$؛ در این صورت، اگر $\alpha$ در $N$ باشد

$$f(\alpha)=(T^tg)(\alpha)=g(T\alpha)=g(0)=0.$$

حال برد $T^t$ زیرفضایی از فضای $N^\circ$ است، و

$$\text{رتبهٔ}\,(T^t)=\text{رتبهٔ}\,(T)=n-\text{بعد}\,(N)=\text{بعد}\,(N^\circ)$$

و بنابراین برد $T^t$ باید دقیقاً $N^\circ$ باشد. □

**قضیهٔ ۲۳.** فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت $F$ باشند. $\mathcal{B}$ را پایهٔ مرتبی برای $V$ با پایهٔ دوگان $\mathcal{B}^*$، و $\mathcal{B}'$ را پایهٔ مرتبی برای $W$ با پایهٔ

دوگان $\mathcal{B}'^*$ می‌گیریم. اگر $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$، $A$ ماتریس $T$ نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، و $B$ ماتریس $T^t$ نسبت به $\mathcal{B}'^*$ و $\mathcal{B}^*$ باشد، آنگاه $B_{ij}=A_{ji}$.

اثبات. فرض کنیم

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\qquad \mathcal{B}'=\{\beta_1,\cdots,\beta_m\},$$
$$\mathcal{B}^*=\{f_1,\cdots,f_n\},\qquad \mathcal{B}'^*=\{g_1,\cdots,g_m\}.$$

بنا بر تعریف

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{m}A_{ij}\beta_i,\quad j=1,\cdots,n$$

$$T^tg_j=\sum_{i=1}^{n}B_{ij}f_i,\quad j=1,\cdots,m.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}(T^tg_j)(\alpha_i)&=g_j(T\alpha_i)\\ &=g_j\Big(\sum_{k=1}^{m}A_{ki}\beta_k\Big)\\ &=\sum_{k=1}^{m}A_{ki}g_j(\beta_k)\\ &=\sum_{k=1}^{m}A_{ki}\delta_{jk}\\ &=A_{ji}.\end{aligned}$$

برای هر تابعك خطی دلخواه $f$ روی $V$

$$f=\sum_{i=1}^{m}f(\alpha_i)f_i.$$

اگر این فرمول را بر تابعك $f=T^tg_j$ به‌کار بندیم واز این واقعیت‌که $(T^tg_j)(\alpha_i)=A_{ji}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$T^tg_j=\sum_{i=1}^{n}A_{ji}f_i$$

که از آن بیدرنگ نتیجه می‌شود $B_{ij}=A_{ji}$. □

**تعریف.** اگر $A$ ماتریسی $m\times n$ بر روی هیأت $F$ باشد، **ترانهادهٔ** $A$ عبارت است از ماتریس $n\times m$ ی $A^t$ که با $A^t_{ij}=A_{ji}$ تعریف می‌شود.

بدین سان قضیهٔ ۲۳ بیان می‌کندکه اگر $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد که

ماتریسش نسبت به‌یك جفت پایـه $A$ است، آنگاه تبدیـل ترانهادهٔ $T^t$ در جفت دوگان آن پایه‌ها توسط ماتریس ترانهادهٔ $A^t$ نمایش داده می‌شود.

**قضیهٔ ۲۴.** فرض کنیم $A$ ماتریس $m\times n$ دلخواهی بر روی هیأت $F$ باشد. آنگاه رتبهٔ سطری $A$ با رتبهٔ ستونی $A$ برابر است.

اثبات. پایهٔ مرتب‌استاندهٔ $F^n$ را $\mathcal{B}$ وپایهٔ مرتب استاندهٔ $F^m$ را $\mathcal{B}'$ می‌نامیم. فرض کنیم $T$ تبدیلی خطی از $F^n$ در $F^m$ باشدکه ماتریس آن نسبت بـه‌جفت $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$ برابر $A$ است؛ یعنی،

$$T(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_m)$$

که در آن

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j.$$

رتبهٔ ستونی $A$ برابر رتبهٔ تبدیـل $T$ است؛ زیرا، برد $T$ متشکل از همهٔ $m$ تایی‌هایی است که ترکیبی خطی از بردارهای ستونی $A$ هستند.

نگاشت ترانهادهٔ $T^t$ نسبت به‌پایه‌های دوگان $\mathcal{B}'^*$ و $\mathcal{B}^*$ توسط ماتریس $A^t$ نمایش داده می‌شود. چون ستونهای $A^t$ همان سطرهای $A$ هستند، بنا بر همین استدلال می‌بینیم که رتبهٔ سطری $A$ (رتبهٔ ستونی $A^t$) برابر رتبهٔ $T^t$ است. بنا بـر قضیهٔ ۲۲، رتبه‌های $T$ و $T^t$ برابرند، و لذا رتبهٔ سطری $A$ برابر رتبهٔ ستونی $A$ است. □

اکنون می‌بینیم که اگر $A$ ماتریسی $m\times n$ برروی $F$ و $T$ تبدیل خطی تعریف شده در فوق از $F^n$ در $F^m$ باشند، آنگاه

$$\text{رتبهٔ }(T)=\text{رتبهٔ سطری }(A)=\text{رتبهٔ ستونی }(A)\,.$$

این عدد را به‌طور ساده **رتبهٔ** $A$ می‌نامیم.

**مثال ۲۵.** دراین مثال به‌مطلبی کلی می‌پردازیم ــ وبیشتر بحث است تا مثال. فرض کنیم فضای برداری $n$ بعـدی $V$ بر روی هیأت $F$ و عملگـر خطی $T$ روی $V$ داده شده باشند، و نیز $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ پایـهٔ مرتبی برای $V$ باشد. بنا بر تعریف، ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت است از ماتریس $n\times n$ ی $A$ به‌طوری که

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}\alpha_i\,.$$

به‌بیان‌دیگر، $A_{ij}$ همان $i$امین‌مختص بردار $T\alpha_j$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ است. اگر $\{f_1,\cdots,f_n\}$ پایهٔ دوگان $\mathcal{B}$ باشد، این مطلب به‌صورت سادهٔ

$$A_{ij}=f_i(T\alpha_j)$$

بیان می‌شود. اکنون ببینیم هنگام تغییر پایه چه رخ می‌دهد. فرض کنیم

$$\mathcal{B}'=\{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_n\}$$

پایهٔ مرتب دیگری برای $V$ با پایهٔ دوگان $\{f'_1,\cdots,f'_n\}$ باشد. اگر $B$ ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ باشد، آنگاه

$$B_{ij}=f'_i(T\alpha'_j).$$

گیریم $U$ عملگر خطی معکوس‌پذیری باشد که $U\alpha_j=\alpha'_j$. در این صورت، ترانهادهٔ $U$ از $U^tf'_i=f_i$ به‌دست می‌آید. بسادگی می‌توان نشان داد که چون $U$ معکوس‌پذیراست، $U^t$ نیز معکوس‌پذیر است و $(U^t)^{-1}=(U^{-1})^t$. از این‌رو، $f'_i=(U^{-1})^tf_i$، به‌ازای $i=1,\cdots,n$. بنابراین،

$$\begin{aligned}B_{ij}&=[(U^{-1})^tf_i](T\alpha'_j)\\&=f_i(U^{-1}T\alpha'_j)\\&=f_i(U^{-1}TU\alpha_j).\end{aligned}$$

اما، این رابطه چه می‌گوید؟ $f_i(U^{-1}TU\alpha_j)$ چیزی جز درایهٔ $j$ و $i$ ماتریس $U^{-1}TU$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ نیست. محاسبات بالا نشان می‌دهد که این اسکالر درایهٔ $i,j$ ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هم هست. به‌بیان دیگر

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}'}&=[U^{-1}TU]_{\mathcal{B}}\\&=[U^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}\\&=[U]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

و این دقیقاً همان فرمول تغییر پایه است که قبلاً استخراج کردیم.

## تمرین

۱. فرض کنید هیأتی چون $F$ و تابعك خطی $f$ روی $F^2$ تعریف شده توسط $f(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$ داده شده‌اند. به‌ازای هر یك از عملگرهای خطی زیر، فرض کنید $g=T^tf$ و $g(x_1,x_2)$ را بیابید.

(الف) $T(x_1,x_2)=(x_1,0)$؛

(ب) $T(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$؛

(پ) $T(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$.

۲. فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ توابع چند جمله‌ای بر روی هیأت اعداد حقیقی

باشد. $a$ و $b$ را دو عدد حقیقی ثابت بگیرید، و فرض کنید $f$ تابعکی خطی روی $V$ باشد که توسط

$$f(p)=\int_a^b p(x)dx$$

تعریف می‌شود. اگر $D$ عملگر مشتق‌گیری روی $V$ باشد، $D^t f$ چیست؟

۳. فرض کنید $V$ فضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت $F$ و $B$ ماتریس $n\times n$ ثابتی باشد. اگر عملگر خطی $T$ روی $V$ با $T(A)=AB-BA$ تعریف بشود و $f$ تابع‌رد باشد، $T^t f$ چیست؟

۴. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. $c$ را یك اسکالر بگیرید و فرض کنید بردار غیر صفری چون $\alpha$ در $V$ موجود است که $T\alpha=c\alpha$. ثابت کنید تابعك خطی غیر صفری چون $f$ روی $V$ وجود دارد که $T^t f=cf$.

۵. فرض کنید $A$ ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید $A=0$ اگر و تنها اگر $tr(A^tA)=0$.

۶. فرض کنید $n$ عددی صحیح ومثبت باشد، و $V$ فضای همهٔ توابع چند جمله‌ای با درجهٔ حداکثر $n$، یعنی توابع به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

بر روی هیأت اعداد حقیقی. اگر $D$ عملگر مشتق‌گیری روی $V$ باشد، پایه‌ای برای فضای پوچ عملگر ترانهادهٔ $D^t$ بیابید.

۷. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ باشد. نشان دهید $T\to T^t$ یك یکریختی از $L(V, V)$ برروی $L(V^*, V^*)$ است.

۸. فرض کنید $V$ فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت $F$ باشد.

(الف) اگر $B$ ماتریس $n\times n$ ثابتی باشد، تابع $f_B$ روی $V$ را طبق $f_B(A)=tr(B^tA)$ تعریف کنید. نشان دهید $f_B$ تابعکی خطی روی $V$ است.

(ب) نشان دهید هر تابعك خطی روی $V$ بـه‌صورت بالا است؛ یعنی، بـه‌ازای ماتریسی چون $B$ برابر $f_B$ است.

(پ) نشان دهید $B\to f_B$ یك یکریختی از $V$ بروی $V^*$ است.

# ۴

# چندجمله‌ایها

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

## ۱.۴ جبرها

هدف ما در این فصل این است که چند خاصیت بنیانی جبر چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت $F$ را اثبات کنیم. جهت تسهیل کار ابتدا به معرفی مفهوم جبر خطی بر روی هیأت $F$ می‌پردازیم.

**تعریف.** فرض می‌کنیم $F$ یك هیأت باشد. یك **جبر خطی برروی هیأت** $F$ فضایی برداری مانند $\mathfrak{a}$ برروی $F$ همراه با عملی اضافی به‌نام **ضرب برداری** است که هرجفت از بردارهای $\alpha$ و $\beta$ از $\mathfrak{a}$ را به‌بردار $\alpha\beta$ از $\mathfrak{a}$، به‌نام **حاصلضرب** $\alpha$ و $\beta$، چنان وابسته می‌سازد که

(الف) ضرب شرکت‌پذیر است،

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

(ب) ضرب نسبت به‌جمع پخش‌پذیر است،

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{و} \quad (\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

(پ) به‌ازای هراسکالر $c$ از $F$

$$c(\alpha\beta)=(c\alpha)\beta=\alpha(c\beta).$$

اگر عنصری چون ۱ در $\mathfrak{a}$ موجود باشد، به‌طوری که به ازای هر $\alpha$ از $\mathfrak{a}$، $\alpha=\alpha 1=1\alpha$، $\mathfrak{a}$ را یك **جبرخطی با عنصرهمانی برروی $F$** و ۱ را عنصر همانی می‌نامیم. جبر $\mathfrak{a}$ **جابجایی** نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای همهٔ $\alpha$ها و $\beta$های در $\mathfrak{a}$، $\alpha\beta=\beta\alpha$.

**مثال ۱.** مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی یك هیأت همراه بااعمال معمولی یك جبرخطی با عنصرهمانی است؛ بخصوص، خود هیأت هم یك جبر با عنصرهمانی است. این جبردرصورتی که $n\geqslant 2$ جابجایی نیست. خود هیأت (البته) جابجایی است.

**مثال ۲.** فضای همهٔ عملگرهای خطی روی یك فضای برداری همراه با ترکیب عملگرها، به‌عنوان ضرب، یك جبرخطی با عنصرهمانی است. این جبرجابجایی است اگر وتنها اگرفضا یك بعدی باشد.[1]

خواننده ممکن است دربارهٔ ضرب نقطه‌ای وضرب خارجی بردارهای در $R^3$ تجربیاتی داشته باشد. در این صورت وی باید متوجه باشدکه هیچ‌یك ازاین ضربها، از نوع توصیف شده درتعریف جبرخطی نیست. ضرب نقطه‌ای یك «ضرب اسکالری» است؛ بدین معنی که به‌هرجفت برداریك اسکالروابسته می‌سازد وازاین‌رو، یقیناً ازنوع ضربی نیست که درحال حاضرمورد بحث ماست. ضرب خارجی هرچند به‌هرجفت بردار $R^3$ یك بردار وابسته می‌کند، اما شرکت‌پذیر نیست.

بقیهٔ این بخش به‌ساختن جبری خطی اختصاص داردکه با جبرهای مطرح شده در هریك ازمثالهای پیشین به‌طور بارزی متفاوت است. فرض‌کنیم $F$ یك هیأت و $S$ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی باشد. بنا برمثال ۳ ازفصل ۲، مجموعهٔ همهٔ توابع از $S$ در $F$ فضایی برداری برروی $F$ است. ما این فضای برداری را با $F^\infty$ نشان می‌دهیم. لذا، بردارهای $F^\infty$ دنباله‌های نامتناهی $f=(f_0, f_1, f_2, \cdots)$ از اسکالرهای $f_i$ از $F$ هستند. اگر $g=(g_0, g_1, g_2, \cdots)$، هر $g_i$ در $F$، و $a$ و $b$ اسکالرهایی از $F$ باشند، $af+bg$ دنباله‌ای نامتناهی است که با

$$af+bg=(af_0+bg_0, af_1+bg_1, af_2+bg_2, \cdots) \qquad (۴-۱)$$

تعریف می‌شود. با وابسته‌کردن هرجفت $f$ و $g$ از بردارهای $F^\infty$ به‌بردار $fg$ که با

$$(fg)_n=\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}, \quad n=0, 1, 2, \cdots \qquad (۴-۲)$$

معین می‌شود، یك ضرب در $F^\infty$ تعریف می‌کنیم. پس

$$fg=(f_0g_0, f_0g_1+f_1g_0, f_0g_2+f_1g_1+f_2g_0, \cdots)$$

---

۱. درصورتی که فضا صفر بعدی هم باشد این جبر جابجایی است. برای اجتناب از این‌گونه پیچیدگیها فرض می‌کنیم فضا حداقل دوعنصرمتمایز داشته باشد. ـم.

وچون به‌ازای $n=0, 1, 2, \cdots$،

$$(gf)_n=\sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i}=\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}=(fg)_n,$$

نتیجه می‌گیریم که این ضرب جابجایی است، $gf=fg$. اگـر $h$ نیزمتعلق به $F^\infty$ باشد، آنگاه به‌ازای $n=0, 1, 2, \cdots$،

$$\begin{aligned}[(fg)h]_n&=\sum_{i=0}^{n}(fg)_i h_{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\Big)h_{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}h_{n-i}\\&=\sum_{j=0}^{n} f_j\sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j}\\&=\sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j}=[f(gh)]_n\end{aligned}$$

و بنابراین

$$(fg)h=f(gh). \qquad (۴\text{-}۳)$$

از خواننده می‌خواهیم نشان دهد که ضـرب تعریف شده توسط (۲-۴) در شرایط (ب) و (پ) تعریف جبر خطی هم صدق می‌کند و بردار $1=(1, 0, 0, \cdots)$ چون یك عنصر همانی برای $F^\infty$ عمل می‌نماید. دراین صورت، $F^\infty$ همراه با اعمال تعریف شده در بالا یك جبرخطی جابجایی با عنصرهمانی برروی هیأت $F$ است.

درمطالبی که متعاقباً خواهد آمد، بردار $(0, 1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ نقش ممتازی برعهده دارد و ما آن را همواره با $x$ نشان می‌دهیم. در سراسراین فصل، $x$ هرگز برای نشان دادن عنصری ازهیأت $F$ به‌کار نخواهد رفت. حاصل‌ضرب $n$ بار $x$ در خودش را با $x^n$ نشان می‌دهیم و بنابرقرارداد می‌گیریم $x^0=1$. دراین صورت

$$x^2=(0, 0, 1, 0, \cdots), \quad x^3=(0, 0, 0, 1, 0, \cdots)$$

ودرحالت کلی به‌ازای هرعدد صحیح $k\geqslant 0$، $(x^k)_k=1$ و به‌ازای همـهٔ اعداد صحیح نامنفی $n\neq k$، $(x^k)_n=0$. درخاتمهٔ این بخش ملاحظه می‌کنیم کـه مجموعهٔ متشکل از ۱، $x$، $x^2$، $\cdots$ هم مستقل است وهم نامتناهی. پس، بعد جبر $F^\infty$ متناهی نیست.

جبـر $F^\infty$ گاهـی جبـر **رشته‌های توانی صوری** برروی $F$ نامیده می‌شود. عنصـر $f=(f_0, f_1, f_2, \cdots)$ غالباً به‌صورت

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \tag{۴-۴}$$

نوشته می‌شود. این نماد در مواجهه با اعمال جبری بسیار مناسب است. هنگام استفاده از آن باید به‌خاطرداشت که این نماد صددرصد صوری است. در جبر، «مجموع نامتناهی» وجود ندارد و قرار براین نیست که نماد رشتهٔ توانی (۴-۴) چیزی دربارهٔ همگرایی، در صورتی که خواننده بداند همگرایی چیست، القا کند. پس، با استفاده از دنباله‌ها و بدون آنکه درمخاطرهٔ ابهام مطالبی چون مجموع نامتناهی قرار بگیریم توانستیم جبری را که‌در آن عملهای جبری، رفتاری شبیه به‌جمع و ضرب رشته‌های توانی صوری دارند، به‌طور دقیق تعریف کنیم.

## ۲.۴. جبر چندجمله‌ایها

اکنون درموقعیتی هستیم که بتوانیم یك چندجمله‌ای برروی هیأت $F$ را تعریف کنیم.

**تعریف.** فرض کنیم $F[x]$ زیرفضای پدید آمـده توسط بردارهای ۱، $x$، $x^2$، ... از $F^\infty$ باشد. هرعنصر $F[x]$ یك **چندجمله‌ای برروی** $F$ نامیده می‌شود.

چون $F[x]$ متشکل‌ازهمهٔ ترکیبات خطی (متناهی) $x$ وتوانهای آن است،هر بردار غیرصفر $f$ از $F^\infty$، یك چندجمله‌ای است اگر وتنها اگر یك عدد صحیح $n\geqslant 0$ وجودداشته باشد به‌طوری‌که $f_n\neq 0$ و به‌ازای همهٔ اعداد صحیح $k>n$، $f_k=0$؛ این عددصحیح راکه (درصورت وجود) مسلماً یکتاست **درجهٔ** $f$ می‌نامیم. درجهٔ چندجمله‌ای $f$ را بـا $\deg f$ نشان می‌دهیم، امـا درجه‌ای به‌چندجمله‌ای ۰ اختصاص نمی‌دهیم.[1] اگـر $f$ یك چندجمله‌ای غیرصفرازدرجهٔ $n$ باشد، داریم

$$f=f_0x^0+f_1x+f_2x^2+\cdots+f_nx^n,\quad f_n\neq 0 \tag{۵-۴}$$

اسکالرهای $f_0$، $f_1$، ...، $f_n$ گاهی **ضرایب** $f$ نامیـده می‌شوند، و گفته می‌شود $f$ یك چندجمله‌ای با ضرایب متعلق به $F$ است. چندجمله‌ایهای به‌صورت $cx^0$ را **چندجمله‌ایهای اسکالری** می‌نامیم وغالباً به‌جـای $cx^0$ می‌نویسیم $c$. هرچندجمله‌ای غیر صفر $f$ از درجهٔ $n$ با شرط $f_n=1$ یك چندجمله‌ای **تکین** نامیده می‌شود.

خواننده بایدتوجه داشته باشد که چندجمله‌ایها چیزهایی ازقبیل توابع چندجمله‌ای روی $F$ که تاکنون درچند مورد دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم، نیستند. اگر $F$ شامل تعدادی نامتناهی عنصر باشد، بین $F[x]$ وجبر توابع چندجمله‌ای برروی $F$ یك یکریختی طبیعی برقراراست. این موضوع را دربخش بعد مورد بحث قرار می‌دهیم واکنون نشان‌می‌دهیم که $F[x]$ یك جبر خطی است.

---

۱. $\deg f$ را با درجهٔ $(f)$ هم نشان می‌دهند. ــم.

**قضیهٔ ۱.** فرض کنیم $f$ و $g$ دوچندجمله‌ای غیرصفر بروی $F$ باشند. دراین صورت
(۱) $fg$ یك چندجمله‌ای غیرصفراست؛
(۲) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$؛
(۳) هرگاه $f$ و $g$ هردوچندجمله‌هایی تکین باشند، آنگاه $fg$ نیز یك چندجمله‌ای تکین است؛
(۴) $fg$ یك چندجمله‌ای اسکالری است اگروتنها اگر $f$ و $g$ هردوچندجمله‌ای‌هایی اسکالری باشند؛
(۵) اگر $f+g\neq 0$، داریم

$$\deg(f+g) \leqslant \max(\deg f, \deg g).$$

اثبات. فرض کنیم $f$ از درجهٔ $m$، و $g$ از درجهٔ $n$ باشد. اگر $k$ عددی صحیح و غیرمنفی باشد،

$$(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}.$$

برای این‌که $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0$، لازم است $i \leqslant m$ و $m+n+k-i \leqslant n$. از این‌رو، لازم است $m+k \leqslant i \leqslant m$ که خود ایجاب می‌کند $k=0$ و $i=m$. لذا

$$(fg)_{m+n} = f_m g_n \tag{۶-۴}$$

و

$$(fg)_{m+n+k} = 0, \quad k > 0. \tag{۷-۴}$$

احکام (۱)، (۲)، و (۳) بیدرنگ از (۴-۶) و (۴-۷) نتیجه می‌شوند، درحالی‌که (۴) پیامدی از (۱) و (۲) است. تحقیق درستی (۵) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. □

**نتیجهٔ ۱.** مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهای بروی یك هیأت مفروض $F$، مجهزبه‌اعمال (۴-۱) و (۴-۲)، یك جبرخطی جابجایی با عضوهمانی بروی $F$ است.

اثبات. چون اعمال (۴-۱) و (۴-۲) همان اعمال تعریف شده در جبر $F^\infty$ هستند و چون $F[x]$ زیرفضایی از $F^\infty$ است، کافی است ثابت‌کنیم که حاصلضرب دوچندجمله‌ای خرد یك چندجمله‌ای است. این مطلب درصورت ۰ بودن یکی ازسازه‌ها بدیهی است و درغیراین صورت از (۱) نتیجه می‌شود. □

**نتیجهٔ ۲.** فرض کنیم $f$، $g$ و $h$ چندجمله‌ایهایی بروی هیأت $F$ باشند که $f\neq 0$ و $fg=fh$. دراین صورت $g=h$.

اثبات. چون $fg=fh$، داریم $f(g-h)=0$، و نظر به‌اینکه $f\neq 0$، بیدرنگ از (۱) نتیجه می‌شود که $g-h=0$. □

چند واقعیت دیگرهم نسبتاً بآسانی از اثبات قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شوند و ما برخی را دراینجا ذکرمی کنیم.

فرض کنیم

$$f=\sum_{i=0}^{m} f_i x^i \quad \text{و} \quad g=\sum_{j=0}^{n} g_j x^j.$$

دراین صورت از (۴-۷) نتیجه می‌شود که

$$fg=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r}\right)x^s. \tag{۴-۸}$$

ازخواننده می‌خواهیم نشان دهدکه درحالت خاص $f=cx^m$، $g=dx^n$، با $c$ و $d$ در $F$، (۴-۸) به‌صورت

$$(cx^m)(dx^n)=cdx^{m+n} \tag{۴-۹}$$

درمی‌آید. حال، از (۴-۹) و قوانین پخش‌پذیری $F[x]$، نتیجه می‌شودکه حاصلضرب (۴-۸) به‌صورت

$$\sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j} \tag{۴-۱۰}$$

نیزمی‌تواند نوشته شود. دراینجا، مجموع روی همهٔ جفت اعداد صحیح $i, j$ با شرایط $0\leqslant i\leqslant m$ و $0\leqslant j\leqslant n$ درنظر گرفته می‌شود.

**تعریف.** فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبرخطی با عنصرهمانی برروی هیأت $F$ باشد. عنصر همانی $\mathfrak{A}$ را با 1 نشان می‌دهیم و قرارداد می‌کنیم‌که به‌ازای هر $\alpha$ از $\mathfrak{A}$، $\alpha^0=1$. دراین صورت به‌هر چندجمله‌ای $f=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ برروی $F$ و هر $\alpha$ از $\mathfrak{A}$، یک عنصر $f(\alpha)$ از $\mathfrak{A}$ را بنابرقاعدهٔ

$$f(\alpha)=\sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$$

وابسته می‌سازیم.

**مثال ۳.** گیریم $C$ هیأت اعداد مختلط و $f=x^2+2$ باشد.

(الف) اگر $\mathfrak{A}=C$ و $z$ متعلق به $C$ باشد، آنگاه $f(z)=z^2+2$؛ بخصوص $f(2)=6$ و

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=1.$$

(ب) اگر $\mathfrak{A}$ جبرهمهٔ ماتریسهای $2\times 2$ برروی $C$ باشد و

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$f(B)=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}.$$

(پ) اگر $\mathcal{A}$ جبر همهٔ عملگرهای خطی روی $C^۳$ و $T$ عنصری از $\mathcal{A}$ داده شده توسط

$$T(c_۱, c_۲, c_۳)=(i\sqrt{۲}c_۱, c_۲, i\sqrt{۲}c_۳)$$

باشد، آنگاه $f(T)$ عملگری خطی روی $C^۳$ است که توسط

$$f(T)(c_۱, c_۲, c_۳)=(۰, ۳c_۲, ۰)$$

تعریف می‌شود.

(ت) اگر $\mathcal{A}$ جبر همهٔ چندجمله‌ایهای بر روی $C$ و $g=x^۴+۳i$ باشد، آنگاه $f(g)$ آن چندجمله‌ای در $\mathcal{A}$ است که به‌وسیلهٔ

$$f(g)=-۷+۶ix^۴+x^۸$$

تعیین می‌شود.

دربارهٔ مثال اخیر خوانندهٔ نکته‌بین ممکن است متوجه شود که اگر $f$ چندجمله‌ای مفروضی برروی یک هیأت دلخواه و $x$ چندجمله‌ای $(\cdots ,۰ ,۱ ,۰)$ باشد، آنگاه $f=f(x)$، اما به‌وی توصیه می‌کنیم که این واقعیت را نادیده انگارد.

**قضیهٔ ۲.** فرض‌کنیم $F$ یك هیأت و $\mathcal{A}$ جبری خطی با عنصرهمانی برروی $F$ باشد. اگر $f$ و $g$ چندجمله‌ایهایی برروی $F$، $\alpha$ عنصری از $\mathcal{A}$ و $c$ متعلق به $F$ باشد، آنگاه

(۱) $(cf+g)(\alpha)=cf(\alpha)+g(\alpha)$؛

(۲) $(fg)(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$.

اثبات. نظر به اینکه اثبات (۱) کاملاً ساده است، تنها به اثبات (۲) می‌پردازیم. فرض کنیم

$$g=\sum_{j=۰}^{n} g_j x^j \quad \text{و} \quad f=\sum_{i=۰}^{m} f_i x^i$$

بنابر (۴-۱۰)

$$fg=\sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j}$$

وازاین‌رو، بنابر (۱)

$$(fg)(\alpha)=\sum_{i,j} f_i g_j \alpha^{i+j}$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} g_j \alpha^j\right)$$
$$=f(\alpha)g(\alpha) . \ \square$$

## تمرین

۱. فرض‌کنید $F$ زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط باشد و $A$ ماتریسی ۲ × ۲ بــرروی $F$ به‌صورت

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}.$$

برای‌هر یك ازچندجمله‌ایهای داده شدهٔ زیر،برروی $F$، ماتریس $f(A)$ را محاسبه‌کنید.

(الف) $f=x^۲-x+۲$؛

(ب) $f=x^۳-۱$؛

(پ) $f=x^۲-۵x+۷$.

۲. فرض‌کنید $T$ عملگرخطی روی $R^۳$ تعریف شده توسط

$$T(x_۱, x_۲, x_۳)=(x_۱, x_۳, -۲x_۲-x_۳)$$

باشد و $f$ چندجمله‌ای روی $R$ تعریف شده تــوسط $f=-x^۳+۲$. مطلــوب است $f(T)$.

۳. فرض‌کنید $A$ یك ماتریس قطری $n \times n$ برروی هیأت $F$ باشد؛ یعنــی،ماتریسی باشد که به‌ازای $i \neq j$ درشرط $A_{ij}=۰$ صدق‌کند. چندجمله‌ای $f$ برروی $F$ که توسط

$$f=(x-A_{۱۱}) \cdots (x-A_{nn})$$

تعریف می‌شود داده شده است. مطلوب است $f(A)$.

۴. اگر $f$ و $g$ دوچندجمله‌ای مستقل خطی برروی هیأت $F$ و $h$ یك چند جمله‌ای غیرصفر برروی $F$ باشند، نشان دهید $fh$ و $gh$ مستقل‌اند.

۵. اگر $F$ هیأتی باشد، نشان دهیدکه حاصل‌ضرب دوعضو غیرصفر $F^\infty$ غیرصفر است.

۶. فرض‌کنید $S$ مجموعه‌ای ازچندجمله‌ایهای غیرصفر بروی هیأت $F$ باشد. اگر هیچ دو

عضوی از $S$ درجهٔ مساوی نداشته باشند، نشان دهید که $S$ در $F[x]$ مجموعهٔ مستقلی است.

۷. اگر $a$ و $b$ اعضای هیأت $F$ باشند و $a\neq 0$، نشان دهید که چندجمله‌ایهای ۱، $ax+b$، $(ax+b)^2$، $(ax+b)^3$، ... پایه‌ای برای $F[x]$ تشکیل می‌دهند.

۸. اگر $F$ یك هیأت و $h$ یك چندجمله‌ای از درجه‌ای بزرگتر از یا مساوی با یك بر روی $F$ باشد، نشان دهید نگاشت $f \to f(h)$ یك تبدیل خطی یك به یك از $F[x]$ در $F[x]$ است. همچنین نشان دهید این تبدیل یك‌یکریختی از $F[x]$ بروی $F[x]$ است اگر و تنها اگر $\deg h = 1$.

۹. فرض کنید $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط و $T$ و $D$ تبدیلهای تعریف شده توسط

$$T\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\Big)=\sum_{i=0}^{n}\frac{c_i}{1+i}x^{i+1}$$

و

$$D\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\Big)=\sum_{i=1}^{n} i c_i x^{i-1}$$

روی $F[x]$ باشند.

(الف) نشان دهید $T$ عملگر خطی نامنفردی روی $F[x]$ است. همچنین نشان دهید $T$ معکوس‌پذیر نیست.

(ب) نشان دهید $D$ عملگری خطی روی $F[x]$ است وفضای پوچ آن را به‌دست آورید.

(پ) نشان دهید $DT=I$ و $TD\neq I$.

(ت) به‌ازای هر $f$ و $g$ از $F[x]$ نشان دهید

$$T[(Tf)g]=(Tf)(Tg)-T[f(Tg)].$$

(ث) قاعده‌ای برای $D$ مشابه با قاعدهٔ داده شده در (ت) برای $T$ بیان و آن را اثبات کنید.

(ج) فرض کنید $V$ زیرفضای غیرصفری از $F[x]$ باشد که به ازای هر $f$ در $V$، چندجمله‌ای $Tf$ متعلق به $V$ است. نشان دهید بعد $V$ متناهی نیست.

(چ) فرض کنید $V$ زیرفضایی با بعد متناهی از $F[x]$ باشد ثابت کنید یك عدد صحیح $m\geqslant 0$ یافت می‌شود که به‌ازای هر $f$ در $V$، $D^m f=0$.

## ۴.۳. درون‌یابی لاگرانژ

درسراسر این بخش فرض می کنیم $F$ هیأتی ثابت و $t_0$، $t_1$، ...، $t_n$، $n+1$ عنصر متمایز از $F$ باشند. فرض کنیم $V$ زیرفضایی از $F[x]$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای ازدرجه کمتر از

یا مساوی با $n$ (همراه با چندجمله‌ای ۰) و $L_i$ تابعی از $V$ در $F$ تعریف شده توسط

$$L_i(f)=f(t_i), \quad 0\leqslant i\leqslant n$$

به‌ازای هر $f$ از $V$ باشد. بنا برحکم (۱) قضیهٔ ۲، هر $L_i$ تابعکی خطی روی $V$ است. یکی ازمطالبی که می‌خواهیم نشان دهیم این است که مجموعهٔ متشکل از $L_0$، $L_1$، $\cdots$، $L_n$ پایه‌ای برای $V^*$، فضای دوگان $V$، تشکیل می‌دهد.

بدیهی است برای این منظور کافی است که $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$ دوگان پایه‌ای چون $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ از $V$ باشد (با قضیهٔ ۱۵ درفصل ۳ مقایسه شود). چنین پایه‌ای یکی بیشتر نیست و درصورت وجود با

$$L_j(P_i)=P_i(t_j)=\delta_{ij} \tag{۱۱-۴}$$

تعیین می‌شود. چندجمله‌ایهای

$$P_i=\frac{(x-t_0)\cdots(x-t_{i-1})(x-t_{i+1})\cdots(x-t_n)}{(t_i-t_0)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)} \tag{۱۲-۴}$$

$$=\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-t_j}{t_i-t_j}\right)$$

از درجهٔ $n$ هستند، ازاین‌رو به $V$ تعلق دارند و بنابرقضیهٔ ۲ در (۴-۱۱) صدق می‌کنند.

اگر $f=\sum_i c_iP_i$، آنگاه به‌ازای هر $j$

$$f(t_j)=\sum_i c_iP_i(t_j)=c_j\,. \tag{۱۳-۴}$$

چون چندجمله‌ای ۰ دارای ایـن خاصیت است که به‌ازای هر $t$ از $F$، $0=0(t)$، از (۴-۱۳) نتیجه می‌شود که چندجمله‌ایهای $P_0$، $P_1$، $\cdots$، $P_n$ مستقل خطی هستند. چندجمله‌ایهای ۱، $x$، $\cdots$، $x^n$ پایه‌ای برای $V$ تشکیل می‌دهند و لذا بعد $V$ برابر $(n+1)$ است. بنابراین، مجموعهٔ مستقل $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ نیز باید پایه‌ای برای $V$ باشد. پس، به‌ازای هر $f$ از $V$

$$f=\sum_{i=0}^{n}f(t_i)P_i\,. \tag{۱۴-۴}$$

عبارت (۴-۱۴)، **فرمول درون‌یابی لاگرانژ** نامیده می‌شود. اگر $f=x^j$ را در (۴-۱۴) قراردهیم، چنین به‌دست می‌آوریم

$$x^j=\sum_{i=0}^{n}(t_i)^jP_i\,.$$

اکنون ازقضیهٔ ۷ در فصل ۲ نتیجه می‌شودکه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

معکوس‌پذیر است. ماتریس (۱۵-۴) **ماتریس واندرموند**[1] نامیده می‌شود؛ نشان دادن مستقیم معکوس‌پذیری این ماتریس، هنگامی که $t_0$، $t_1$، $\cdots$، $t_n$ اعضایی متمایز از $F$ باشند، تمرین جالبی است.

دربحث حاضر اگر $f$ یك چندجمله‌ای دلخواه برروی $F$ باشد، تابع چندجمله‌ای از $F$ در $F$ راکه هر $t$ در $F$ را به $f(t)$ می‌برد، با $f^\sim$ نشان می‌دهیم. بنابر تعریف (با مثال ۴ درفصل ۲ مقایسه شود) هرتابع چندجمله‌ای به‌همین طریق به‌وجود می‌آید؛ هرچند برحسب اتفاق به ازای دوچندجمله‌ای $f$ و $g$ با شرط $f\neq g$ ممکن است داشته باشیم $f^\sim=g^\sim$، خوشبختانه، به‌طوری‌که خواهیم دید، این وضع ناخوش‌آیند تنها درحالتی که $F$ هیأتی با تعدادی متناهی عنصرمتمایز باشد پیش می‌آید. برای اینکه رابطهٔ بین چندجمله‌ایها وتوابع چندجمله‌ای را با روشی دقیق وجامع تشریح کنیم، نیاز به‌تعریف ضرب دوتابع چندجمله‌ای داریم. اگر $f$ و $g$ دوچندجمله‌ای برروی $F$ باشند، حاصل‌ضرب $f^\sim$ و $g^\sim$ عبارت است ازتابع $f^\sim g^\sim$ از $F$ در $F$ که با

$$(f^\sim g^\sim)(t)=f^\sim(t)g^\sim(t) \qquad \text{به‌ازای } t \text{ در } F \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

تعریف می‌شود. بنابرقسمت (۲) قضیهٔ ۲، $(fg)(t)=f(t)g(t)$، ولذا به‌ازای هر $t$ از $F$

$$(fg)^\sim(t)=f^\sim(t)g^\sim(t).$$

از این‌رو، $f^\sim g^\sim=(fg)^\sim$ وتابعی چندجمله‌ای است. در این‌جا، بررسی این نکته‌که فضای برداری توابع‌چندجمله‌ای برروی $F$، درصورتی‌که ضرب مطابق (۴-۱۶) تعریف شود، یك جبرخطی با عنصرهمانی برروی $F$ است، موضوعی است سرراست وآن را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

**تعریف.** فرض کنیم هیأت $F$ و جبرهای خطی $\mathcal{a}$ و $\mathcal{a}^\sim$ برروی $F$ داده شده باشند. جبرهای $\mathcal{a}$ و $\mathcal{a}^\sim$ **یکریخت** خوانده می‌شوند هرگاه یك نگاشت یك به‌یك $\alpha\to\alpha^\sim$ از $\mathcal{a}$ بروی $\mathcal{a}^\sim$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ از $\mathcal{a}$ و هردو اسکالر $c$ و $d$ از $F$،

$$(c\alpha+d\beta)^\sim=c\alpha^\sim+d\beta^\sim \qquad (\text{الف})$$

---

1. Vandermonde

www.riazisara.ir


و

$$(\alpha\beta)^\sim = \alpha^\sim \beta^\sim \qquad \text{(ب)}$$

نگاشت $\alpha \to \alpha^\sim$ یك **یكریختی** از $\mathfrak{a}$ بروی $\mathfrak{a}^\sim$ نامیده می‌شود. از این‌رو، هریكریختی از $\mathfrak{a}$ بروی $\mathfrak{a}^\sim$، یك یكریختی فضای برداری از $\mathfrak{a}$ بروی $\mathfrak{a}^\sim$ است که دارای خاصیت اضافی (ب) مربوط به «حفظ» حاصلضرب هم هست.

**مثال ۴.** گیریم $V$ یك فضای برداری $n$بعدی برروی هیأت $F$ باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۳ درفصل ۳ و تذکرات متعاقب آن، هرپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ از $V$ یك یكریختی $T \to [T]_{\mathcal{B}}$ ازجبرعملگرهای خطی روی $V$ بروی جبر ماتریسهای $n\times n$ برروی $F$ تعیین می‌کند. حال فرض کنیم عملگرخطی ثابت $U$ روی $V$ وچندجمله‌ای

$$f = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

با ضرایب $c_i$ از $F$ داده شده باشند. دراین صورت

$$f(U) = \sum_{i=0}^{n} c_i U^i,$$

وچون $T \to [T]_{\mathcal{B}}$ نگاشتی خطی است

$$[f(V)]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^{n} c_i [U^i]_{\mathcal{B}}.$$

اکنون ازاین واقعیت که به‌ازای هر $T_1$ و $T_2$ از $L(V, V)$

$$[T_1 T_2]_{\mathcal{B}} = [T_1]_{\mathcal{B}} [T_2]_{\mathcal{B}}$$

نتیجه می گیریم که

$$[U^i]_{\mathcal{B}} = ([U]_{\mathcal{B}})^i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

نظر به‌اینکه این رابطه به‌ازای $i = 0, 1$ نیزمعتبراست، این نتیجه را به‌دست می آوریم که

$$[f(U)]_{\mathcal{B}} = f([U]_{\mathcal{B}}). \qquad (۱۷-۴)$$

به‌زبان کلمات، اگر $U$ عملگری خطی روی $V$ باشد، ماتریس یك چندجمله‌ای از $U$، در پایه‌ای مفروض، عبارت است ازهمان چندجمله‌ای برحسب ماتریس $U$.

**قضیهٔ ۳.** اگر $F$ هیأتی مشتمل برتعدادی نامتناهی عنصرمتمایز باشد، نگاشت $f \to f^\sim$ یك یكریختی ازجبرچندجمله‌ایهای برروی $F$ بروی جبر توابع چندجمله‌ای برروی $F$ است.

اثبات. طبق تعریف، این نگاشت پوشاست؛ و اگر $f$ و $g$ متعلق به $F[x]$ باشند،

واضح است که به‌ازای همهٔ اسکالرهای $c$ و $d$،

$$(cf+dg)^{\sim}=cf^{\sim}+dg^{\sim}.$$

چون قبلاً ثابت کردیم که $(fg)^{\sim}=f^{\sim}g^{\sim}$، تنها نیازمندیم نشان دهیم که این نگاشت یك‌به‌یك است. برای انجام این‌کار، به‌خاطر خطی بودن نگاشت، کافی است نشان دهیم $f^{\sim}=۰$ ایجاب می‌کند که $f=۰$. دراین صورت فرض کنیم $f$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ $n$ یا کمتر باشد، به‌طوری که $f^{\sim}=۰$. گیریم $t_۰$، $t_۱$، ...، $t_n$، $n+۱$ عنصر متمایز از $F$ باشند. چون $f^{\sim}=۰$، به‌ازای $i=۰,۱,\ldots,n$، داریم $f(t_i)=۰$، و یك نتیجهٔ آنی از (۴-۱۴) این است که $f=۰$. □

از نتایج بخش بعد اثبات کاملاً متفاوتی برای این قضیه به‌دست خواهیم آورد.

## تمرین

۱. با استفاده از فرمول درون‌یابی لاگرانژ، یك چندجمله‌ای $f$ با ضرایب حقیقی بیابید که از درجهٔ کوچکتر از یا مساوی با ۳ باشد و $f(-۱)=-۶$، $f(۰)=۲$، $f(۱)=-۲$، $f(۲)=۶$.

۲. فرض کنید $\alpha$، $\beta$، $\gamma$، $\delta$ اعدادی حقیقی باشند. می‌خواهیم بدانیم چه وقت ممکن است یك چندجمله‌ای $f$ روی $R$ ازدرجهٔ نابیشتر از ۲ بیابیم که $f(-۱)=\alpha$، $f(۱)=\beta$، $f(۳)=\gamma$، و $f(۰)=\delta$. ثابت کنید این امر ممکن است اگر و تنها اگر

$$۳\alpha+۶\beta-\gamma-۸\delta=۰.$$

۳. فرض کنید $F$ هیأت اعداد حقیقی باشد وداشته باشیم

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$p=(x-۲)(x-۳)(x-۱).$$

(الف) نشان دهید $p(A)=۰$.

(ب) فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، و $P_۳$ چندجمله‌ایهای لاگرانژ به‌ازای $t_۱=۲$، $t_۲=۳$، و $t_۳=۱$ باشند. ماتریس $E_i=P_i(A)$، $i=۱,۲,۳$، را محاسبه کنید.

(پ) نشان دهید $E_۱+E_۲+E_۳=I$، $E_iE_j=۰$ هرگاه $i\neq j$، و $E_i^۲=E_i$.
(ت) نشان دهید $A=۲E_۱+۳E_۲+E_۳$.

۴. فرض کنید $p=(x-۲)(x-۳)(x-۱)$، و $T$ عملگری خطی روی $R^۴$ باشد که $p(T)=۰$. فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، و $P_۳$ چندجمله‌ایهای لاگرانژ در تمرین ۳ باشند و $E_i=P_i(T)$، $i=۱, ۲, ۳$. ثابت کنید

$$E_۱+E_۲+E_۳=I,$$

$$E_iE_j=۰ \quad \text{هرگاه} \quad i\neq j$$

$$E_i^۲=E_i,$$

$$T=۲E_۱+۳E_۲+E_۳.$$

۵. عدد صحیح مثبت $n$ و هیأت $F$ داده شده‌اند. فرض کنید $A$ ماتریسی $n\times n$ و $P$ ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری بر روی $F$ باشند. اگر $f$ چندجمله‌ای دلخواهی بر روی $F$ باشد، ثابت کنید

$$f(P^{-۱}AP)=P^{-۱}f(A)P.$$

۶. فرض کنید $F$ یك هیأت باشد. بعضی از تابعکهای خطی خاص روی $F[x]$ را که از طریق «تعیین مقدار در $t$»:

$$L(f)=f(t)$$

به‌دست می‌آیند قبلاً دیده‌ایم. این گونه تابعکها نه‌تنها خطی هستند بلکه دارای این خاصیت نیز می‌باشند که $L(fg)=L(f)L(g)$. ثابت کنید اگر $L$ تابعکی خطی روی $F[x]$ باشد که به‌ازای هر $f$ و $g$،

$$L(fg)=L(f)L(g),$$

آنگاه، یا $L=۰$ یا یك $t$ در $F$ یافت می‌شود که به‌ازای همهٔ $f$ها، $L(f)=f(t)$.

## ۴.۴. ایدآلهای چندجمله‌ایها

در این بخش به‌نتایجی که عمدتاً به‌ساختار ضربی جبر چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت وابسته هستند می‌پردازیم.

**لم.** فرض کنیم $f$ و $d$ دو چندجمله‌ای غیر صفر بر روی هیأت $F$ باشند و $\deg d\leqslant \deg f$. در این صورت، یك چندجمله‌ای $g$ در $F[x]$ با یکی از دو شرط زیر یافت می‌شود:

$\cdot\deg(f-dg)<\deg f$ یا $f-dg=0$

اثبات. فرض کنیم

$$f=a_mx^m+\sum_{i=0}^{m-1}a_ix^i,\quad a_m\neq 0$$

و

$$d=b_nx^n+\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i,\quad b_n\neq 0.$$

در این صورت $m\geqslant n$ و

$$\cdot\deg\left[f-\left(\frac{a_m}{b_n}\right)x^{m-n}d\right]<\deg f \text{ یا } f-\left(\frac{a_m}{b_n}\right)x^{m-n}d=0$$

بدین سان می‌توان $g$ را مساوی $(a_m/b_n)x^{m-n}$ اختیار کرد. □

با استفاده از این لم می‌توانیم نشان دهیم که فرایند آشنای «تقسیمات متوالی» برای چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی یا مختلط بر روی هرهیأت دلخواه نیز امکان‌پذیر است.

**قضیهٔ ۴.** اگر $f$ و $d$ دوچندجمله‌ای بر روی هیأت $F$ باشند و $d$ مخالف ۰، آنگاه دو چندجمله‌ای $q$ و $r$ در $F[x]$ وجود دارند به‌طوری که

(۱) $\cdot f=dq+r$

(۲) $r=0$ یا $\cdot\deg r<\deg d$ و یا

چند جمله‌ایهای $q$ و $r$ که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کنند یکتا هستند.

اثبات. اگر $f$ چندجمله‌ای ۰ باشد یا $\deg f<\deg d$ آنگاه، $q=0$ و $r=f$ یك پاسخ است. در حالت $f\neq 0$ و $\deg f\geqslant\deg d$، لم قبل نشان می‌دهد که می‌توان یك چندجمله‌ای $g$ با شرط $f-dg=0$ یا $\deg(f-dg)<\deg f$ انتخاب کرد. اگر $f-dg\neq 0$ و $\deg(f-dg)\geqslant\deg d$، چندجمله‌ای $h$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $(f-dg)-dh=0$ یا

$$\deg[f-d(g+h)]<\deg(f-dg).$$

با ادامهٔ این فرایند تا حد لزوم، سرانجام چندجمله‌ایهای $q$ و $r$ با شرط $r=0$ یا $\deg r<\deg d$، و شرط $f=dq+r$ حاصل می‌شوند. حال فرض کنیم همچنین داشته باشیم $f=dq_1+r_1$ که در آن $r_1=0$ یا $\deg r_1<\deg d$. در این صورت، $dq+r=dq_1+r_1$ و $d(q-q_1)=r_1-r$. اگر $q-q_1\neq 0$ آنگاه، $d(q-q_1)\neq 0$ و

$$\deg d + \deg(q-q_1) = \deg(r_1 - r).$$

اما چون درجهٔ $r_1 - r$ کمتر از درجهٔ $d$ است، چنین چیزی ممکن نیست، و $q - q_1 = 0$. از این‌رو، همچنین داریم $r_1 - r = 0$. □

**تعریف.** چند جمله‌ای غیر صفر $d$ بر روی $F$ مفروض است. اگر $f$ در $F[x]$ باشد، قضیهٔ قبل نشان می‌دهدکه حداکثر یك چندجمله‌ای $q$ در $F(x]$ موجود است‌که $f = dq$. اگر چنین $q$یی وجود داشته باشد، گوییم $d$ چندجمله‌ای $f$ را **عاد** می‌کند، $f$ بر $d$ **تقسیم (بخش) پذیر** است یا $f$ **مضربی** از $d$ است. در این صورت، می‌نویسیم $q = f/d$ و $q$ را **خارج قسمت** $f$ بر $d$ می‌نامیم.

**نتیجهٔ ۱.** فرض‌کنیم $f$ یك چندجمله‌ای برروی هیأت $F$، و $c$ عنصری از $F$ باشد. در این صورت، $f$ بر $x - c$ تقسیم‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f(c) = 0$.

اثبات. بنا بر قضیهٔ فوق $f = (x-c)q + r$ و در آن $r$ یك چندجمله‌ای اسکالری است. طبق قضیهٔ ۲

$$f(c) = 0q(c) + r(c) = r(c).$$

از این‌رو، $r = 0$ اگر و تنها اگر $f(c) = 0$. □

**تعریف.** فرض کنیم $F$ یك هیأت باشد. عنصر $c$ از $F$ **ریشه یا صفر** چندجمله‌ای مفروض $f$ بر روی $F$ خوانده می‌شود، هرگاه $f(c) = 0$.

**نتیجهٔ ۲.** یك چندجمله‌ای $f$ از درجهٔ $n$ بر روی هیأت $F$ حداکثر $n$ ریشه در $F$ دارد.

اثبات. نتیجه برای چند جمله‌ایهای از درجهٔ ۰ و درجهٔ ۱ بـه‌طور آشکار درست است. فرض می‌کنیم که نتیجه برای چندجمله‌ایهای از درجهٔ $n-1$ نیز درست باشد. اگر $a$ ریشه‌ای از $f$ باشد، آنگاه $f = (x-a)q$ ودرآن $q$ دارای درجهٔ $n-1$ است. چون $f(b) = 0$ اگر و تنها اگر $a = b$ یا $q(b) = 0$، بنا بر فرض استقرا نتیجه می‌شود که $f$ حداکثر $n$ ریشه دارد. □

خواننده توجه دارد که گام اصلی در اثبات قضیهٔ ۳ بیدرنگ از این نتیجه به دست می‌آید.

در مبحث ریشه‌های چندگانه مقولهٔ مشتقات صوری چندجمله‌ایها مفیدواقع می‌شود. **مشتق** چندجمله‌ای

$$f = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

عبارت است از چند جمله‌ای

$$f' = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1}.$$

از نماد $D_f = f'$ هم استفاده خواهیم کرد. مشتق‌گیری خطی است؛ بدین معنی که، $D$ عملگری خطی روی $F[x]$ است. مشتقات صوری مراتب بالاتر $D^2f = f''$، $D^3f = f^{(3)}$، و غیره نیز وجود دارند.

**قضیهٔ ۵.** (**فرمول تیلور**[1]) فرض کنیم $F$ هیأتی با سرشت نمای صفر، $c$ عنصری از $F$ و $n$ عددی صحیح مثبت باشد. اگر چند جمله‌ای $f$ بر روی $F$ با $\deg f \leqslant n$ باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=0}^{m} \frac{(D^kf)}{k!}(c)(x-c)^k.$$

اثبات. فرمول تیلور پیامدی از قضیهٔ دوجمله‌ای، و خطی بودن عملگرهای $D$،$D^2$،...،$D^n$ است. قضیهٔ دوجمله‌ای که بآسانی با استقرا ثابت می‌شود مدعی است که

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k}b^k.$$

در این فرمول

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k}$$

همان ضریب دوجمله‌ای مشهور است که تعداد ترکیبات $k$ شیء از $m$ شیء را به‌دست می‌دهد. بنا بر قضیهٔ دوجمله‌ای

$$\begin{aligned} x^m &= [c+(x-c)]^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} c^{m-k}(x-c)^k \\ &= c^m + mc^{m-1}(x-c) + \cdots + (x-c)^m \end{aligned}$$

و این، بیان فرمول تیلور برای حالت $f = x^m$ است. اگر

$$f = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

آنگاه

$$D^kf(c) = \sum_m a_m(D^kx^m)(c)$$

و

---

1. Taylor

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_k \sum_m a_m \frac{D^k x^m}{k!}(c)(x-c)^k$$
$$= \sum_m a_m \sum_k \frac{D^k x^m}{k!}(c)(x-c)^k$$
$$= \sum_m a_m x^m$$
$$= f \cdot \square$$

باید متذکر شد که به‌علت مستقل خطی بودن چند جمله‌ایهای ۱، $(x-c)$، ...، $(x-c)^n$ (با تمرین،در بخش ۲.۴ مقایسه شود) فرمول تیلور روش منحصر به فرد نوشتن $f$ به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای $(x-c)^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ را به‌دست می‌دهد.

در این مرحله، تذکر این مطلب، بدون ذکر جزئیات، ممکن است خالی از ارزش نباشد که با تعبیرمناسبی فرمول تیلوربرای چندجمله‌ایهای بر روی هیأتهای با سرشت‌نمای متناهی نیز معتبراست. اگر سرشت‌نمای هیأت $F$ متناهی باشد (مجموع تعدادی متناهی ۱ در $F$ برابره شود) آنگاه ممکن است در $F$ داشته باشیم $k!=0$، که در این حالت‌تقسیم $(D^k f)(c)$ بر $k!$ بی‌معنی است. با این حال، تقسیم $D^k f$ بر $k!$ می‌تواند بامعنی باشد، زیرا که هر ضریب $D^k f$ حاصل‌ضرب عنصری است از $F$ در عددی صحیح تقسیم‌پذیر بر $k!$. اگر این مطالب گیج کننده به‌نظر برسند، به‌خواننده توصیه می‌شودکه توجه خود را به هیأتهای با سرشت نمای صفر یا به‌زیر هیأتهایی از اعداد مختلط معطوف دارد.

اگر $c$ ریشه‌ای از چند جمله‌ای $f$ باشد، **چندگانگی** $c$ به عنوان ریشه‌ای از $f$ بزرگترین عدد صحیح مثبت $r$ است به‌طوری که $f$ بر $(x-c)^r$ تقسیم‌پذیر باشد.

چندگانگی یك ریشه، بوضوح کوچکتراست ازیا مساوی استبا درجهٔ $f$. در مورد چندجمله‌ایهای بر روی هیأتهایی با سرشت نمای صفر، چندگانگی $c$ به‌عنوان ریشه‌ای از $f$، در ارتباط است با تعداد مشتقاتی از $f$ که در $c$ صفر می‌شوند.

**قضیهٔ ۶.** فرض کنید $F$ هیأتی با سرشت نمای صفر و $f$ یك چند جمله‌ای بر روی $F$ با $\deg f \leqslant n$ باشد. دراین صورت، اسکالر $c$ ریشه‌ای از $f$ با چندگانگی $r$ است اگر و تنها اگر

$$(D^k f)(c) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1$$
$$(D^r f)(c) \neq 0.$$

اثبات. فرض‌کنیم $r$ چندگانگی $c$ به‌عنوان یك ریشهٔ $f$ باشد. دراین صورت یك چندجمله‌ای $g$ با خواص $f=(x-c)^r g$ و $g(c)\neq 0$ وجود دارد. زیرا در غیر این صورت، بنا بر نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ ۴، $f$ بر $(x-c)^{r+1}$ تقسیم‌پذیر است. با به‌کار بستن

فرمول تیلور بر $g$،

$$f=(x-c)^r\left[\sum_{m=0}^{n-r}\frac{(D^m g)}{m!}(c)(x-c)^m\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{n-r}\frac{(D^m g)}{m!}(c)(x-c)^{r+m}.$$

چون تنها یك راه برای نوشتن $f$ به‌عنوان ترکیبی خطی از توانهای $(x-c)^k$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ وجود دارد، داریم

$$\frac{(D^k f)(c)}{k!}=\begin{cases}0 & \text{اگر } 0\leqslant k\leqslant r-1\\ \dfrac{D^{k-r}g(c)}{(k-r)!} & \text{اگر } r\leqslant k\leqslant n\end{cases}.$$

بنابراین، به‌ازای $0\leqslant k\leqslant r-1$، $D^k f(c)=0$ و $D^r f(c)=g(c)\neq 0$. بعکس، اگر این شرایط برآورده شوند، از فرمول تیلور بیدرنگ نتیجه می‌شود که یك چندجمله‌ای $g$ با شرایط $f=(x-c)^r g$ و $g(c)\neq 0$ وجود دارد. حال فرض کنیم $r$ بزرگترین عدد صحیح مثبتی نباشد که $(x-c)^r$ چندجمله‌ای $f$ را عاد کند. در این صورت، یك چندجمله‌ای $h$ وجود دارد که $f=(x-c)^{r+1}h$. ولی این مطلب، بنا به نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۱، ایجاب می‌کند که $g=(x-c)h$؛ لذا $g(c)=0$ که هنوز خود یك تناقض است. □

**تعریف.** گیریم $F$ یك هیأت باشد. یك **ایدآل** $F[x]$ زیرفضایی چون $M$ از $F[x]$ است که به ازای هر $f$ از $F[x]$ و هر $g$ از $M$، چندجمله‌ای $fg$ متعلق به $M$ باشد.

**مثال ۵.** اگر $F$ یك هیأت و $d$ یك چندجمله‌ای برروی $F$ باشد، مجموعهٔ $M=dF[x]$ متشکل از همهٔ مضربهای $df$ از $d$ با $f$های دلخواه در $F[x]$، یك ایدآل است. زیرا، $M$ غیرتهی است و در واقع $M$ شامل $d$ است؛ و اگر $f$ و $g$ متعلق به $F[x]$ باشند و $c$ یك اسکالر، آنگاه

$$c(df)-dg=d(cf-g)$$

متعلق به $M$ است و بنابراین $M$ زیر فضاست. سرانجام $M$ به همین نحو شامل $(df)g=d(fg)$ هم هست. ایدآل $M$ **ایدآل اصلی تولیدشده توسط** $d$ نامیده می‌شود.

**مثال ۶.** فرض کنیم $d_1,\dots,d_n$ تعدادی متناهی چندجمله‌ای برروی $F$ باشند. دراین صورت $M$، مجموع زیرفضاهای $d_iF[x]$ یك زیرفضاست و نیز یك ایدآل. زیرا، فرض کنیم $p$ متعلق به $M$ باشد. دراین صورت، چند جمله‌ایهایی مانند $f_1,\dots,f_n$ در $F[x]$ وجود دارند که $p=d_1f_1+\dots+d_nf_n$. اگر $g$ چندجمله‌ای دلخواهی بر روی $F$ باشد، آنگاه

$$pg = d_1(f_1 g) + \cdots + d_n(f_n g)$$

و بنابراین $pg$ نیز به $M$ تعلق دارد. از این‌رو، $M$ یك ایدآل است، و می‌گوییم که $M$ ایدآل **تولید شده** توسط چند جمله‌ایهای $d_1, \cdots, d_n$ می‌باشد.

**مثال ۷.** $F$ را زیر هیأتی از اعداد مختلط فرض می‌کنیم و ایدآل

$$M = (x+2)F[x] + (x^2+8x+16)F[x]$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $M = F[x]$. زیرا، $M$ شامل

$$x^2+8x+16 - x(x+2) = 6x+16$$

و از این‌رو،شامل $6x+16 - 6(x+2) = 4$ است. پس، چندجمله‌ای اسکالری ۱، ودر نتیجه همهٔ مضربهای آن به $M$ تعلق دارند.

**قضیهٔ ۷.** اگر $F$ یك هیأت، و $M$ ایدآل غیر صفری از $F[x]$ باشد، چندجمله‌ای تکین یکتایی چون $d$ در $F[x]$ یافت می‌شودکه $M$ ایدآل اصلی تولیدشده توسط $d$ باشد.

اثبات. طبق فرض، $M$ شامل یك چندجمله‌ای غیر صفر است؛ در بین همهٔ چند-جمله‌ایهای غیر صفر $M$، یك چند جمله‌ای $d$ ازکمترین درجه وجود دارد. می‌توان فرض کرد که $d$ تکین است؛ زیرا، در غیر این صورت با ضرب $d$ در یك اسکالر می‌توان آن را تکین ساخت. حال، اگر $f$ به $M$ تعلق داشته باشد، قضیهٔ ۴ نشان می‌دهد $f = dq + r$ با این شرط که $r = 0$ یا $\deg r < \deg d$. چون $d$ در $M$ است، $dq$ و $f - dq = r$ نیز به $M$ تعلق دارند. ازطرفی چون $d$ عنصری از $M$ و از کمترین درجه است نمی‌توانیم داشته باشیم $\deg r < \deg d$، لذا $r = 0$. پس، $M = dF[x]$. اگر $g$ چندجمله‌ای تکین دیگری باشد که $M = gF[x]$، آنگاه در چندجمله‌ای غیر صفر $p$ و $q$ وجود دارند که $d = gp$ و $g = dq$. از این‌رو، $d = dpq$ و

$$\deg d = \deg d + \deg p + \deg q.$$

بنابراین، $\deg p = \deg q = 0$، و چون $d$ و $g$ تکین هستند، $p = q = 1$ و در نتیجه $d = g$. □

مشاهدهٔ این مطلب با ارزش است‌که دراثباتی‌که هم اکنون ارائه‌شد، حالت‌خاصی از یك واقعیت نسبتاً مفید و عمومی به‌شرح زیر مورد استفاده قرارگرفت: اگر $p$ چند-جمله‌ای غیرصفری از یك ایدآل $M$ باشد و اگر چندجمله‌ای $f$ در $M$ بر $p$ تقسیم‌پذیر نباشد، آنگاه $f = pq + r$ و «باقیماندهٔ» $r$ نه تنها به $M$ تعلق دارد و مخالف ۰ است، بلکه درجه‌اش کوچکتر ازدرجهٔ $p$ هم هست. قبلاً، در مثال ۷ نیز برای نشان دادن این‌که چندجمله‌ای اسکالری ۱ مولد تکین ایدآل مورد نظر است، از این واقعیت استفاده کردیم. اصولاً، یافتن چندجمله‌ای تکینی که ایدآل غیر صفر مفروضی را تولید کند، همواره

امکان‌پذیر است. زیرا، در هر ایدآل می‌توان به‌توسط تعدادی متناهی از تقسیم‌متوالـــی، نهایتاً یك چندجمله‌ای با کمترین درجه به‌دست آورد.

نتیجه. اگر $p_1$، ...، $p_n$ چند جمله‌ایهایـــی بر روی هیأت $F$ باشند و همـــه صفر نباشند، یك چندجمله‌ای تکین یکتای $d$ در $F[x]$ وجود داردکه

(الف) $d$ درایدآل تولید شده توسط $p_1$،...،$p_n$ قرار دارد.

(ب) $d$ هر یك از چندجمله‌ایهای $p_i$ را عاد می‌کند.

هر چندجمله‌ای که در (الف) و (ب) صدق کند، لزوماً شرط زیر را نیز برمی‌آورد.

(پ) $d$ بر هر چندجمله‌ای که همهٔ چندجمله‌ایهای $p_1$،...، $p_n$ را بخش کند، بخش‌پذیر است.

اثبات. گیریم $d$ مولد تکین ایدآل

$$p_1F[x]+\cdots+p_nF[x]$$

باشد. هرعنصراین ایدآل بر $d$ بخش‌پذیر است؛ لذا، همهٔ چندجمله‌ایهای $p_i$ بر $d$ بخش‌پذیرند. حال فرض‌کنیم $f$ یك چندجملدای باشد که همهٔ چندجمله‌ایهای $p_1$،...،$p_n$ را عادکند. در این صورت، چندجمله‌ایهایی چون $g_1$، ...، $g_n$ وجود دارند که $p_i=fg_i$، $1\leqslant i\leqslant n$. بعلاوه، چون $d$ در ایدآل

$$p_1F[x]+\cdots+P_nF[x]$$

است، چندجمله‌ایهایی چون $q_1$،...،$q_n$ در $F[x]$ یافت می‌شوند که

$$d=p_1q_1+\cdots+p_nq_n.$$

پس

$$d=f[g_1q_1+\cdots+g_nq_n].$$

تا اینجا نشان داده‌ایم که $d$ چندجمله‌ای تکینی است کـــه در (الف)، (ب)، و (پ) صدق می‌کند. اگر $d'$ یك چندجمله‌ای باشدکه شرایط (الف) و (ب) را برآورد، از (الف)و تعریف $d$ نتیجه می‌شودکـه $d'$ مضربی اسکالری از $d$ است و در (پ) نیز صدق می‌کند. سرانجام، در حالتی‌که $d'$ چندجمله‌ای تکینی باشد، داریم $d'=d$. □

**تعریف.** اگر $p_1$،...،$p_n$ چندجمله‌ایهایی برروی هیأت $F$ باشند وهمگی ۰ نباشند، آنگاه، $d$، مولد تکین ایدآل

$$p_1F[x]+\cdots+p_nF[x]$$

**بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک** چندجمله‌ایهای $p_1$، ...، $p_n$ نامیده می‌شود. این اصطلاح توسط لم قبل توجیه می‌شود. گوییم چندجمله‌ایهای $p_1$، ...، $p_n$ **نسبت به‌هم اول‌هستند**، هرگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها ۱ باشد، یا معادل آن، هرگاه ایدآلی را که آنها

تولید می‌کنند همهٔ $F[x]$ باشد.

**مثال ۸.** گیریم $C$ هیأت اعداد مختلط باشد. دراین صورت

(الف) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $x+۲$ و $x^۲+۸x+۱۶$ برابر ۱ است (مثال ۷ را ببینید)؛

(ب) بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك $(x-۲)^۲(x+i)$ و $(x-۲)(x^۲+۱)$ برابر $(x-۲)(x+i)$ است. زیرا ایدآل

$$(x-۲)^۲(x+i)F[x]+(x-۲)(x^۲+۱)F[x]$$

شامل

$$(x-۲)^۲(x+i)-(x-۲)(x^۲+۱)=(x-۲)(x+i)(i-۲)$$

وبنابراین شامل $(x-۲)(x+i)$ است که تکین است وهردوی

$$(x-۲)^۲(x+i) \quad \text{و} \quad (x-۲)(x^۲+۱)$$

را عاد می‌کند.

**مثال ۹.** $F$ را هیأت اعداد گویا می‌گیریم ودر $F[x]$ فرض می‌کنیم $M$ ایدآل تولید‌شده توسط

$$(x-۱)(x+۲)^۲\text{،} \quad (x+۲)^۲(x-۳)\text{،} \quad \text{و} \quad (x-۳)$$

باشد. دراین صورت، $M$ شامل

$$\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲[(x-۱)-(x-۳)]=(x+۲)^۲$$

است وچون

$$(x+۲)^۲=(x-۳)(x+۷)-۱۷$$

$M$ شامل چندجمله‌ای اسکالری ۱ هم هست. ازاین‌رو، $M=F[x]$ وچندجمله‌ایهای

$$(x-۱)(x+۲)^۲\text{،} \quad (x+۲)^۲(x-۳)\text{،} \quad \text{و} \quad (x-۳)$$

نسبت به‌هم اول هستند.

## تمرین

۱. فرض کنید $Q$ هیأت اعداد گویا باشد. تعیین کنید کدامیك از زیرمجموعه‌های زیر از $Q[x]$ ایدآل است. هرگاه مجموعهٔ داده شده ایدآل باشد، مولد تکین آن را بیابید.

(الف) همهٔ $f$‌های از درجهٔ زوج؛

(ب ) همهٔ $f$های از درجهٔ بزرگتر از یا مساوی با ۵؛
(پ ) همهٔ $f$هایی که $f(\text{۰})=\text{۰}$؛
(ت ) همهٔ $f$هایی که $f(\text{۲})=f(\text{۴})=\text{۰}$؛
(ث ) همهٔ $f$های واقع در برد عملگرخطی $T$ تعریف شده توسط

$$T\left(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{c_i}{i+1}x^{i+1}.$$

۲. مطلوب است بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هریك از جفت چندجمله‌ایهای زیر:

(الف) $2x^5-x^3-3x^2-6x+4$ و $x^4+x^3-x^2-2x-2$؛
(ب ) $3x^4+8x^2-3$ و $x^3+2x^2+3x+6$؛
(پ ) $x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ و $x^3+6x^2+7x+1$.

۳. اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشد، نشان دهید مجموعهٔ همه چندجمله‌ایهای $f$ در $F[x]$ با شرط $f(A)=0$ یك ایدآل است.

۴. فرض کنید $F$ زیرهیأتی ازاعداد مختلط باشد و

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

مولد تکین ایدآل متشکل ازهمهٔ چندجمله‌ایهای $f$ در $F[x]$ راکه $f(A)=0$ بیابید.

۵. اگر $F$ یك هیأت باشد، نشان دهید اشتراك هرتعداد دلخواه از ایدآلهای $F[x]$ خود یك ایدآل است.

۶. گیریم $F$ یك هیأت باشد. نشان دهید ایدآل تولید شده توسط تعدادی متناهی چندجمله‌ای از $F[x]$ چون $f_1$، ...، $f_n$ عبارت است ازاشتراك همهٔ ایدآلهای شامل آنها.

۷. فرض کنید $K$ زیرهیأتی از یك هیأت $F$ و $f$ و $g$ چندجمله‌ایهایی در $K[x]$ باشند. اگر $M_k$ ایدآل تولید شده توسط $f$ و $g$ در $K[x]$، و $M_F$ ایدال تولید شده توسط آنها در $F[x]$ باشد، نشان دهید $M_k$ و $M_f$دارای مولدهای تکین‌مساوی‌هستند.

## ۴.۵. تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌سازه‌های اول

در این بخش اثبات می‌کنیم که هرچندجمله‌ای برروی هیأت $F$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای «اول» نوشت. این تجزیه به‌سازه‌ها، ابزار مؤثری برای

یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هر تعداد متناهی از چندجمله‌ایها، و بخصوص، وسیلهٔ مؤثری برای اتخاذ تصمیم درمورد اینکه چه‌وقت این چندجمله‌ایها نسبت به‌هم اول هستند، فراهم می‌آورد.

**تعریف.** فرض کنیم $F$ یك هیأت باشد. چندجمله‌ای $f$ در $F[x]$ را **تحویل‌پذیر بر روی** $F$ می‌نامیم، هرگاه چندجمله‌ایهای $g$ و $h$ از درجهٔ بزرگتر از یا مساوی با یك در $F[x]$ وجود داشته باشند به‌طوری که $f = gh$؛ وگرنه، $f$ را **تحویل‌ناپذیر برروی** $F$ می‌نامیم. هرچندجمله‌ای تحویل‌ناپذیرغیراسکالری برروی $F$ یك **چندجمله‌ای اول برروی** $F$ نام دارد وگاهی یك **اول در** $F[x]$ نیز نامیده می‌شود.

**مثال ۱۰.** چندجمله‌ای $x^{2}+1$ برروی هیأت $C$ ازاعداد مختلط تحویل‌پذیر است. زیرا

$$x^{2}+1=(x+i)(x-i)$$

و چندجمله‌ایهای $x+i$ و $x-i$ به $C[x]$ تعلق دارند. از طرف دیگر، $x^{2}+1$ برروی هیأت اعداد حقیقی $R$ تحویل‌ناپذیراست. چراکه اگر

$$x^{2}+1=(ax+b)(a'x+b')$$

و $a$، $a'$، $b$ و $b'$ در $R$ باشند، آنگاه

$$aa'=1,\quad ab'+ba'=0,\quad bb'=1.$$

این روابط ایجاب می‌کنندکه $a^{2}+b^{2}=0$، که این خود با حقیقی بودن اعداد $a$ و $b$ غیرممکن است، مگرآنکه $a=b=0$.

**قضیهٔ ۸.** گیریم $p$، $f$، و $g$ چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت $F$ باشند. فرض کنیم $p$ چندجمله‌ای اولی باشدکه حاصلضرب $fg$ را عاد کند. در این صورت، $p$ یا $f$ را عاد می‌کند یا $g$ را.

اثبات. اگرفرض کنیم $p$ چندجمله‌ای اول تکینی است، ازعمومیت اثبات نکاسته‌ایم. دراین صورت، این واقعیت که $p$ اول است، چیزی جز این نمی‌گویدکه ۱ و $p$ تنها مقسوم‌علیه‌های تکین $p$ هستند. گیریم $d$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $f$ و $p$ است. دراین‌صورت، یا $d=1$ یا $d=p$؛ چراکه $d$ چندجمله‌ای تکینی‌است که $p$ را تقسیم می‌کند. اگر $d=p$، آنگاه $p$ چندجمله‌ای $f$ را تقسیم می‌کند وکار به‌انجام می‌رسد. از این‌رو، فرض می‌کنیم $d=1$؛ یعنی، فرض می‌کنیم $f$ و $p$ نسبت به‌هم اول باشند. ثابت خواهیم کرد که $p$ چندجمله‌ای $g$ را عاد می‌کند. چون بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك $f$ و $p$ یك‌است، چندجمله‌ایهایی چون $f_{0}$ و $p_{0}$ وجود دارندکه $1=f_{0}f+p_{0}p$. با ضرب این رابطه در $g$ داریم

$$g = f_\circ fg + p_\circ pg$$
$$= (fg)f_\circ + p(p_\circ g)\,.$$

چون $p$، چندجمله‌ای $fg$ را عاد می‌کند، $(fg)f_\circ$ و نیز مسلماً $p(p_\circ g)$ را نیز تقسیم می‌کند. بدین‌سان $g$ بر $p$ بخش‌پذیر است. □

**نتیجه.** اگر $p$ یك اول باشد و حاصلضرب $f_1 \cdots f_n$ را عادکند، آنگاه $p$ یکی از چندجمله‌ایهای $f_1$، $\cdots$، $f_n$ را عاد می‌کند.

اثبات. اثبات به‌استقرا صورت می‌گیرد. وقتی $n=2$، نتیجه چیزی جز صورت قضیهٔ ۶ نیست. فرض کنیم نتیجه را برای $n=k$ اثبات کرده باشیم و $p$ حاصلضرب $f_1 \cdots f_{k+1}$ از $(k+1)$ چندجمله‌ای را تقسیم کند. چون $p$ چندجمله‌ای $(f_1 \cdots f_k)f_{k+1}$ را تقسیم می‌کند. $p$ یا $f_{k+1}$ را عاد می‌کند یا $f_1 \cdots f_k$ را. بنابرفرض استقرا، اگر $p$ چندجمله‌ای $f_1 \cdots f_k$ را عادکند، آنگاه $j$ یی هست که $1 \leqslant j \leqslant k$ و $p$ چندجمله‌ای $f_j$ را عاد می‌کند. بدین لحاظ می‌بینیم که درهر حالت، $p$ باید یکی از $f_j$ها، $1 \leqslant j \leqslant k+1$، را عادکند. □

**قضیهٔ ۹.** اگر $F$ یك هیأت باشد، هرچندجمله‌ای تکین غیر اسکالری در $F[x]$ را می‌توان به‌یك، وبدون احتساب ترتیب، تنها به‌یك طریق به‌صورت حاصلضربی ازاولهای تکین در $F[x]$ تجزیه کرد.

اثبات. فرض کنیم $f$ چندجمله‌ای غیراسکالری تکینی برروی $F$ باشد. هرگاه $\deg f = 1$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند؛ زیرا چندجمله‌ایهای درجهٔ یك خود تحویل‌ناپذیرند. فرض‌کنیم $f$ دارای درجهٔ $n > 1$ باشد. بنابر فرض استقرا می‌توانیم فرض کنیم که قضیه برای همهٔ چندجمله‌ایهای تکین غیراسکالری از درجهٔ کمتر از $n$ درست است. اگر $f$ تحویل‌ناپذیر باشد، خود هم اکنون به‌صورت حاصلضربی از اولهای تکین هست. درغیر این صورت، $f = gh$ که در آن $g$ و $h$ دوچندجمله‌ای تکین غیر اسکالری از درجهٔ کمتر از $n$ هستند. پس، $g$ و $h$ می‌توانند به‌صورت حاصلضربهایی از اولهای تکین در $F[x]$ تجزیه شوند، و از اینجا به‌همین‌نحو $f$. حال فرض‌کنیم

$$f = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$$

که درآن $p_1$، $\cdots$، $p_m$ و $q_1 \cdots q_n$ اولهای تکینی از $F[x]$ هستند. در این صورت، $p_m$ حاصلضرب $q_1 \cdots q_n$ را تقسیم می‌کند. بنابرنتیجهٔ قبل، $p_m$ باید یکی از $q_i$ها را عادکند. چون $q_i$ و $p_m$ هردو چندجمله‌ایهای اول تکینی هستند، این بدان معنی است که

$$q_i = p_m. \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

از (۴-۱۶) می‌بینیم که اگر $m=1$ یا $n=1$، داریم $m=n=1$؛ زیرا

$$\deg f=\sum_{i=1}^{m}\deg p_i=\sum_{j=1}^{n}\deg q_j$$

دراین حالت چیزی بیشتر برای اثبات نمی‌ماند، لذا فرض می‌کنیم $m>1$ و $n>1$. پس از ترتیب‌بندی مجدد $q$ها می‌توانیم فرض کنیم که $p_m=q_n$ و

$$p_1\cdots p_{m-1}p_m=q_1\cdots q_{n-1}p_m\cdot$$

حال بنا به‌نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۱ داریم

$$p_1\cdots p_{m-1}=q_1\cdots q_{n-1}\cdot$$

چون درجهٔ چندجمله‌ای $p_1\cdots p_m$ کمتر از $n$ است، فرض استقرا به‌کار می‌رود و نشان می‌دهد که دنبالهٔ $q_1$، ...، $q_{n-1}$ حداکثر ترتیب‌بندی‌جدیدی از دنبالهٔ $p_1$، ...، $p_{m-1}$ است. این مطلب همراه با (۴-۱۶) نشان می‌دهد که تجزیهٔ $f$ به‌صورت حاصل‌ضربی از اولهای تکین، بدون توجه به‌ترتیب سازه‌ها، یکتاست. □

در تجزیهٔ چندجمله‌ای تکین غیراسکالری $f$ مفروض در بالا، بعضی ازسازه‌های اول تکین‌ممکن است تکرارشوند. اگر $p_1$، $p_2$، ...، $p_r$، اولهای تکین متمایزی باشند که در این تجزیهٔ $f$ ظاهرمی‌شوند، آنگاه

$$f=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r} \tag{۴-۱۷}$$

که در آن نمای $n_i$ تعداد دفعاتی است که سازهٔ اول $p_i$ درتجزیه ظاهر می‌شود، این تجزیه نیزمسلماً یکتاست، و **تجزیهٔ اولیهٔ** $f$ نامیده‌می‌شود. بسادگی می‌توان نشان دادکه‌هرمقسوم‌علیه تکین $f$ به‌صورت

$$p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_r^{m_r},\quad 0\leqslant m_i\leqslant n_i \tag{۴-۱۸}$$

است. از(۴-۱۸) نتیجه‌می‌شودکه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك تعدادی متناهی‌چندجمله‌ای تکین غیراسکالری $f_1$، ...، $f_s$ ازترکیب همهٔ سازه‌های اول تکینی به‌دست می‌آیدکه به‌طور همزمان در تجزیه‌های $f_1$، ...، $f_s$ ظاهرمی‌شوند. نمایی‌که برای هریك از سازه‌های اول فوق‌الذکر باید درنظرگرفته شود، بزرگترین نمایی است‌که آن سازه به‌توان این نما، سازه‌ای‌ازهمهٔ $f_i$ها باشد. هرگاه هیچ‌توانی (غیرصفر) ازچندجمله‌ایهای اول، سازه‌ای ازهمهٔ $f_i$ها نباشد، این چندجمله‌ایها نسبت به‌هم اول هستند.

**مثال ۱۱.** فرض‌کنیم هیأت $F$ وعناصرمتمایز $a$، $b$، و $c$ از $F$ داده شده باشند. در این صورت، چندجمله‌ایهای $x-a$، $x-b$، و $x-c$ اولهای تکین متمایزی از $F[x]$ هستند. اگر $m$، $n$، و $s$ اعداد صحیح مثبتی باشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك‌چندجمله‌ایهای

$$(x-a)^m(x-c)^s \quad \text{و} \quad (x-b)^n(x-c)^s$$

$(x-c)^s$ است، حال‌آنکه سه چندجمله‌ای

$$(x-b)^n(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-b)^n$$

نسبت به‌هم اول هستند.

**قضیهٔ ۱۰.** فرض کنیم $f$ یك چندجمله‌ای تکین غیراسکالری برروی هیأت $F$ و

$$f = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

تجزیهٔ $f$ به‌سازه‌های اول باشد. به‌ازای هر $j$، $1 \leqslant j \leqslant k$، گیریم

$$f_j = \frac{f}{p_j^{n_j}} = \prod_{i \neq j} p_i^{n_i}.$$

دراین صورت $f_1$، ...، $f_k$ نسبت به‌هم اول هستند.

اثبات. اثبات (آسان) این قضیه را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. این قضیه رابیشتر بدین منظور بیان کردیم که بعدها بتوانیم به‌آن رجوع کنیم. □

**قضیهٔ ۱۱.** فرض کنیم چندجمله‌ای $f$ برروی هیأت $F$ و مشتق آن $f'$ داده شده باشند. در این صورت $f$ حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایز برروی $F$ است اگر و تنها اگر $f$ و $f'$ نسبت به‌هم اول باشند.

اثبات. فرض‌کنیم در تجزیهٔ $f$ به‌سازه‌های اول برروی هیأت $F$، چندجمله‌ای اول (غیراسکالری) $p$ تکرار بشود. دراین صورت، به‌ازای عنصری چون $h$ از $F[x]$، $f = p^2h$. آنگاه

$$f' = p^2h' + 2pp'h$$

و $p$ مقسوم‌علیه $f'$ نیزهست. پس، $f$ و $f'$ نسبت به‌هم اول نیستند.

حال فرض‌کنیم $f = p_1 \cdots p_k$ و $p_1$، ...، $p_k$ چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر غیراسکالری متمایزی برروی $F$ باشند. اگر $f_j = f/p_j$، آنگاه

$$f' = p_1'f_1 + p_2'f_2 + \cdots + p_k'f_k.$$

گیریم $p$ چندجمله‌ای اولی باشد که هم $f$ و هم $f'$ را عاد می‌کند. در این صورت $i$ یی هست که $p = p_i$. حال به‌ازای $j \neq i$، $p_i$ چندجمله‌ای $f_j$ را عاد می‌کند، وچون $p_i$ چندجمله‌ای

$$f' = \sum_{j=1}^{k} p_j'f_j$$

را هم تقسیم می‌کند، می‌بینیم که $p_i$ باید $p_i'f_i$ را نیز عادکند. بنابراین $p_i$ یا $f_i$ را عاد می‌کندیا $p_i'$ را. ولی $p_i$ چندجمله‌ای $f_i$ را عادنمی‌کند، چراکه $p_1$، ...، $p_k$ از هم‌متمایزند. لذا، $p_i$ چندجمله‌ای $p_i'$ را عاد می‌کند. این‌هم‌ممکن‌نیست، زیرا درجهٔ $p_i'$ یکی کمتر از درجهٔ $p_i$ است. پس، نتیجه می‌گیریم که‌هیچ اولی هم $f$ وهم $f'$ را عادنمی‌کند، یا آنکه $f$ و $f'$

نسبت به‌هم اول هستند. □

**تعریف.** هیأت $F$ **بستهٔ جبری** نامیده می‌شود، هرگاه هرچندجمله‌ای اول برروی $F$ دارای درجهٔ ۱ باشد.

اینکه می‌گوییم $F$ بستهٔ‌جبری است بدین معنی که‌هرچندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر غیراسکالری برروی $F$ به‌صورت $(x-c)$ است. قبلاً دیده‌ایم که هرچندجمله‌ای از این نوع برروی هرهیأت $F$ تحویل‌ناپذیراست. بدین‌سان، یک تعریف هم‌ارز برای هیأت بستهٔ‌جبری عبارت ازاین است: هیأتی چون $F$ که هرچندجمله‌ای غیراسکالری $f$ در $F[x]$ بتواند به‌صورت

$$f=c(x-c_1)^{n_1}\cdots(x-c_k)^{n_k}$$

که درآن $c$ یك اسکالر، $c_1$، ...، $c_k$ عناصرمتمایزی از $F$ و $n_1$، ...، $n_k$ اعداد صحیح مثبتی هستند، بیان شود. یك فرمولبندی دیگرهم این است که اگر $f$ یك چندجمله‌ای غیر اسکالری برروی $F$ باشد، آنگاه عنصری چون $c$ در $F$ وجود داردکه $f(c)=0$.

هیأت $R$ از اعداد حقیقی بستهٔ جبری نیست؛ زیرا چندجمله‌ای $(x^2+1)$ برروی $R$ که از درجهٔ ۱ نیست تحویل‌ناپذیر است و یا به‌این علت که عددی حقیقی مانند $c$ وجود نداردکه $c^2+1=0$. قضیهٔ موسوم به قضیهٔ بنیادی جبر بیان می‌کندکه هیأت $C$ ازاعداد مختلط بستهٔ جبری است. اگرچه این قضیهٔ را دراین‌کتاب بعداً هم به‌کار می‌بریم ولی آن را اثبات نمی‌کنیم. اثبات این قضیه ازیك‌سو به‌علت محدودیت زمانی، واز سوی دیگر به‌این خاطرکه به‌خاصیتی «غیرجبری» ازاعداد حقیقی وابسته است،کنارگذاشته شده‌است. برای دیدن اثباتی‌ازاین قضیه، خوانندهٔ‌علاقه‌مند می‌تواند به‌کتاب شرایر و اسپرنر[1] مندرج درفهرست مراجع رجوع کند.

قضیهٔ بنیادی جبرهمچنین روشن می‌کندکه چه امکاناتی برای تجزیهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی به‌سازه‌های اول وجود دارد. اگرچندجمله‌ای $f$ با ضرایب حقیقی باشد و $c$ ریشه‌ای مختلط از $f$، آنگاه $\bar{c}$، مزدوج مختلط $c$، نیزیك ریشهٔ $f$ است. بنابراین، ریشه‌های مختلطی که حقیقی نیستند باید به‌صورت جفتهای مزدوج ظاهر بشوند. درنتیجه مجموعهٔ همهٔ ریشه‌ها به‌صورت $\{t_1,\cdots,t_k,c_1,\bar{c}_1,\cdots,c_r,\bar{c}_r\}$ است که در آن $t_1$، ...، $t_k$ اعدادی‌حقیقی و $c_1$، ...، $c_r$ اعدادی‌مختلط وغیرحقیقی‌هستند. پس، $f$ به‌صورت

$$f=c(x-t_1)\cdots(x-t_k)p_1\cdots p_r$$

تجزیه می‌شود، که درآن $p_i$ چندجمله‌ای درجهٔ دوم

$$p_i=(x-c_i)(x-\bar{c}_i)$$

است. البته ضرایب این چندجمله‌ایهای $p_i$ حقیقی هستند. نتیجه می‌گیریم که درجهٔ‌هرچند-

1. Schreier and Sperner

جمله‌ای تحویل‌ناپذیر برروی هیأت اعداد حقیقی ۱ یا ۲ است، و هرچندجمله‌ای برروی $R$ حاصل‌ضربی است ازچند سازهٔ خطی، که از ریشه‌های حقیقی $f$ به‌دست می‌آیند، در چند چندجمله‌ای درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر.

## تمرین

۱. فرض‌کنید چندجمله‌ای تکین $p$ برروی هیأت $F$ و چندجمله‌ایهای نسبت به‌هم اول $f$ و $g$ برروی $F$ داده شده باشند. ثابت‌کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $pf$ و $pg$ برابر $p$ است.

۲. با قبول قضیهٔ بنیادی جبر، مطلب زیررا اثبات‌کنید. اگر $f$ و $g$ چندجمله‌ایهایی برروی هیأت اعداد مختلط باشند، آنگاه $f$ و $g$ نسبت به‌هم اولند اگر وتنها اگر $f$ و $g$ ریشه مشترکی نداشته باشند.

۳. فرض‌کنید $D$ عملگرمشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهای برروی هیأت اعدادمختلط و $f$ يك چندجمله‌ای تکین برروی همین هیأت باشد. ثابت‌کنید تساوی

$$f=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$$

که درآن $c_1$، ...، $c_k$ اعداد مختلط متمایزی هستند برقراراست اگروتنها اگر $f$ و $Df$ نسبت به‌هم اول باشند. به‌بیان دیگر، $f$ دارای ریشهٔ تکراری نیست اگر و تنها اگر $f$ و $Df$ ریشهٔ مشترکی نداشته باشند. (قضیهٔ بنیادی جبررا دانسته فرض‌کنید.)

۴. تعمیم زیراز فرمول تیلور را ثابت‌کنید: فرض‌کنید $f$، $g$، و $h$ چندجمله‌ایهایی برروی زیرهیأتی ازاعداد مختلط باشند به‌طوری‌که $\deg f \leqslant n$. دراین صورت

$$f(g)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(h)(g-h)^k.$$

(در اینجا $f(g)$ به‌معنی «ترکیب $f$ با $g$» است.)

دربقیهٔ تمرینها به‌تعریف زیرنیازمندیم: اگر $f$، $g$، و $p$ چندجمله‌ایهایی برروی‌هیأت $F$ باشند و $p\neq 0$، گوییم $f$ **همنهشت** با $g$ **به پیمانهٔ** $p$ است، هرگاه $(f-g)$ بر $p$ بخش‌پذیر باشد. هرگاه $f$ همنهشت با $g$ به‌پیمانهٔ $p$ باشد، می‌نویسیم

$$f\equiv g \bmod p\,.$$

۵. به‌ازای هرچندجمله‌ای غیرصفر $p$، ثابت‌کنید همنهشتی به‌پیمانهٔ $p$ رابطه‌ای هم‌ارزی است؛ یعنی،

(الف) انعکاسی است: $f\equiv f \bmod p$.

(ب) متقارن است: اگر $f\equiv g \bmod p$، آنگاه $g\equiv f \bmod p$.

(پ) متعدی‌است: اگر $f\equiv g \bmod p$ و $g\equiv h \bmod p$، آنگاه $f\equiv h \bmod p$.

۶. فرض کنید $f\equiv g \bmod p$ و $f_1\equiv g_1 \bmod p$.

(الف) ثابت کنید $f+f_1\equiv g+g_1 \bmod p$.

(ب) ثابت کنید $ff_1\equiv gg_1 \bmod p$.

۷. از تمرین ۶ برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید اگر $f$، $g$، $h$، و $p$ چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت $F$ باشند و $p\neq 0$ و اگر همچنین $f\equiv g \bmod p$، آنگاه $h(f)\equiv h(g) \bmod p$.

۸. اگر $p$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری باشد و $fg\equiv 0 \bmod p$، ثابت کنید یا $f\equiv 0 \bmod p$ یا $g\equiv 0 \bmod p$. اگر $p$ تحویل‌پذیر نباشد، مثالی بیاورید که نشان دهد مطلب فوق نادرست است.

# ۵

# دترمینان

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

## ۱.۵ حلقه‌های جابجایی

در این فصل، به‌اثبات احکام اصلی دترمینانهای ماتریسهای مربعی می‌پردازیم. این امر را نه‌تنها برای ماتریسهای بر روی هیأتها، بلکه همچنین برای ماتریسهایی که درایه‌های آنها «اسکالر»هایی از نوع عمومی‌تری هستند، انجام می‌دهیم. ایــن تعمیم دو دلیل دارد. اول آنکه، در فصل بعد در مــوارد معینی ناگزیر از بحث دربارهٔ دترمینانهای ماتریسهایی با درایه‌های چندجمله‌ای هستیم. دوم آنکه، در آنچه که دربارهٔ دترمینانها خواهیم آورد، یکی ازاصول موضوع هیأتها، یعنی اصلی که وجودمعکوس ضربی هر عنصر غیرصفر را تضمین می‌کند، هیچ‌گونه نقشی ندارد. بـه‌این دلایل، مناسب است کــه نظریهٔ دترمینانها را برای ماتریسهایی که درایه‌های آنها عناصری از یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی باشند، تعمیم دهیم.

**تعریف.** یك حلقه عبارت است ازیك مجموعهٔ $K$ همراه با دوعمل $(x,y)\to x+y$ و $(x,y)\to xy$ که شرایط زیر را برآورند:

(الف) $K$ تحت عمل $(x,y)\to x+y$ یك گروه جابجایی است ($K$ تحت جمع یك گروه جابجایی است)؛

(ب) $(xy)z=x(yz)$ (ضرب شرکت پذیر است)؛

(پ) $x(y+z)=xy+xz$ و $(y+z)x=yx+zx$ (دو قانـون پخش‌پذیری

برقرارند).

اگر به ازای هر $x$ و $y$ از $K$ داشته باشیم $xy=yx$، گوییم حلقهٔ $K$ **جابجایی** است. اگر عنصری چون ۱ در $K$ یافت شود به طوری که به ازای هر $x$، $x=x1=1x$، گوییم $K$ **حلقه‌ای با عنصر همانی** است و ۱ را **عنصر همانی** $K$ می‌نامیم.

در اینجا حلقه‌های جابجایی با عنصر همانی مورد نظر ما هستند. چنین حلقه‌ای را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت مجموعه‌ای چون $K$ همراه با دو عمل توصیف کرد که همهٔ اصول موضوع هیأت را که درفصل ۱ ارائه شد ارضا می‌کنند مگر احتمالاً اصل موضوع (۸) و شرط ۱≠۰ را. بدین سان، یك هیأت عبارت است از حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی غیر صفر که به‌هر $x$ غیر صفر، عنصر $x^{-1}$ با خاصیت $xx^{-1}=1$ متناظر شود. مجموعهٔ اعداد صحیح همراه با اعمال معمولی، یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی است، اما یك هیأت نیست. مجموعهٔ همهٔ‌چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت همراه با جمع‌وضربی که برای چندجمله‌ایها تعریف کردیم حلقهٔ جابجایی دیگری با عنصر همانی است.

اگر $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد، هرماتریس $m\times n$ بر روی $K$ را به‌صورت تابعی چون $A$ از مجموعهٔ جفتهای $(i, j)$ از اعداد صحیح $1\leqslant i\leqslant m$ و $1\leqslant j\leqslant n$ در $K$ تعریف می‌کنیم. طبق معمول چنین ماتریسی را با آرایه‌ای مستطیلی که دارای $m$ سطر و $n$ ستون باشد، نمایش می‌دهیم. مجموع و حاصل ضرب ماتریسهای بر روی $K$، به‌همان نحوکه برای ماتریسهای بر روی هیأتها تعریف شدند، تعریف می‌شوند:

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$$
$$(AB)_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}.$$

جمع آنگاه تعریف می‌شودکه $A$ و $B$ دارای تعداد سطرها و نیز تعداد ستونهای مساوی باشند، و ضرب هنگامی تعریف می‌شودکه تعداد ستونهای $A$ برابر با تعداد سطرهای $B$ باشد. خواص جبری اساسی این اعمال در اینجا هم معتبرند. مثلاً

$A(B+C)=AB+AC$، $(AB)C=A(BC)$، و غیره.

همچون مورد هیأتها، عناصر $K$ را هم اسکالر می‌نامیم. با این قرار، ترکیب خطی سطرها یا ستونهای هر ماتریس را می‌توان همچون گذشته، تعریف کرد. به‌طور اجمال، به استثنای نتایجی که به «تقسیم» پذیری در $K$ مربوط‌اند، کلیهٔ احکامی را که قبلاً برای ماتریسهای بر روی هیأتها به‌دست‌آوردیم برای ماتریسهای بر روی $K$ نیز معتبرند.

## ۵.۲. تابع دترمینان

فرض‌کنیم $K$ یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی باشد. می‌خواهیم به‌هر ماتریس $n\times n$ (مربعی) بر روی $K$، اسکالری (عنصری از $K$) که به‌عنوان دترمینان آن ماتریس شناخته

می‌شود، اختصاص دهیم. این امکان وجود دارد که دترمینان ماتریس مربعی $A$ را تنها با نوشتن فرمولی برحسب درایه‌های $A$ تعریف کنیم. در این صورت، خواص گوناگون دترمینان را می‌توان از این فرمول به‌دست‌آورد. اما، چنین فرمولی نسبتاً پیچیده است، و ما برای دستیابی به‌مزیتی تکنیکی به‌صورت زیرعمل می‌کنیم. یك «تابع دترمینان» روی $K^{n\times n}$ را چنان تابعی تعریف می‌کنیم که به‌هر ماتریس $n\times n$ بر روی $K$ اسکالری را تخصیص بدهد و دارای خواص ویژهٔ زیر باشد: این تابع، به‌عنوان تابعی از هر یك از سطرهای ماتریس، خطی باشد؛ مقدارآن روی هر ماتریس با دو سطر متساوی برابر صفر باشد؛ و مقدارآن روی ماتریس همانی $n\times n$ برابر با ۱ باشد. ثابت می‌کنیم که چنین تابعی وجود دارد و سپس یکتا بودن‌آن را اثبات می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم که دقیقاً یك تابع با این ویژگیها وجود دارد. حین اثبات یکتایی، فرمولی صریح برای دترمینان و نیز چندین خاصیت مفیدآن را به‌دست خواهیم‌آورد.

این بخش به‌تعریف «تابع دترمینان» و به‌اثبات وجود حداقل یك تابع دترمینان اختصاص دارد.

**تعریف.** فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، $n$ عددی صحیح مثبت، و $D$ تابعی باشدکه به هرماتریس $n\times n$ مانند $A$ بر روی $K$ اسکالر $D(A)$ از $K$ را متناظر سازد، گوییم $D$ تابعی **n خطی** است هرگاه به ازای هر $i$، $1\leqslant i\leqslant n$، $D$ تابعی خطی‌از $i$مین سطر با ثابت نگاه داشتن $(n-1)$ سطر دیگر باشد.

این تعریف نیازمند چند توضیح است. اگر $D$ تابعی از $K^{n\times n}$ در $K$ و $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ سطرهای ماتریس $A$ باشند، می‌نویسیم

$$D(A)=D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

یعنی، $D$ را به‌عنوان تابعی از سطرهای $A$ نیز به‌شمار می‌آوریم. در این صورت، این بیان‌که $D$ تابعی $n$ خطی است، بدین معنی است که

$$D(\alpha_1, \cdots, c\alpha_i+\alpha_i', \cdots, \alpha_n)=cD(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)+D(\alpha_1, \cdots, \alpha_i', \cdots, \alpha_n). \qquad (۱\text{-}۵)$$

اگر همهٔ سطرها به‌جز سطر $i$م را ثابت نگاهداریم و $D$ را به‌عنوان تابعی از سطر $i$م محسوب کنیم، معمولاً مناسبتر است که به‌جای $D(A)$ بنویسیم $D(\alpha_i)$. بدین صورت، می‌توانیم (۵-۱) را به‌صورت

$$D(c\alpha_i+\alpha_i')=cD(\alpha_i)+D(\alpha_i'),$$

به‌شرطی که معنی‌آن روشن باشد، خلاصه کنیم.

**مثال ۱.** فرض‌کنیم اعداد صحیح مثبت $k_1, \cdots, k_n$، $1\leqslant k_i\leqslant n$، و عنصر $a$ از

$K$ مفروض باشند. به‌ازای هر ماتریس $n\times n$ مانند $A$ بر روی $K$، تعریف می‌کنیم

$$D(A)=\alpha A(1,\, k_1)\cdots A(n,\, k_n). \qquad (۵-۲)$$

در این صورت تابع $D$ تعریف شده توسط (۵-۲) تابعی $n$ خطی است. زیرا، اگر $D$ را به عنوان تابعی از سطر $i$م ماتریس $A$ با ثابت نگاهداشتن سطرهای دیگر بینگاریم، می‌توانیم بنویسیم

$$D(\alpha_i)=A(i,\, k_i)b.$$

در اینجا $b$ عنصر ثابتی از $K$ است. گیریم $\alpha_i'=(A_{i1}',\, \ldots,\, A_{in}')$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} D(c\alpha_i+\alpha_i') &= [cA(i,\, k_i)+A'(i,\, k_i)]b \\ &= cD(\alpha_i)+D(\alpha_i'). \end{aligned}$$

پس، $D$ تابعی خطی از هر یك از سطرهای $A$ است.

تابع $n$ خطی ویژه‌ای از این نوع، تابع

$$D(A)=A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$$

است. به‌عبارت دیگر، «حاصلضرب درایه‌های قطری» تابعی $n$ خطی روی $K^{n\times n}$ است.

**مثال ۲.** ذیلاً همهٔ توابع ۲ خطی روی ماتریسهای $2\times 2$ بر روی $K$ رامی‌یابیم. فرض‌کنیم $D$ چنین تابعی باشد. اگر سطرهای ماتریس همانی $2\times 2$ را با $\epsilon_1$ و $\epsilon_2$ نشان دهیم، داریم

$$D(A)=D(A_{11}\epsilon_1+A_{12}\epsilon_2,\, A_{21}\epsilon_1+A_{22}\epsilon_2).$$

با استفاده از این حکم که $D$ تابعی ۲ خطی است مطابق (۵-۱) داریم

$$\begin{aligned} D(A) &= A_{11}D(\epsilon_1,\, A_{21}\epsilon_1+A_{22}\epsilon_2)+A_{12}D(\epsilon_2,\, A_{21}\epsilon_1+A_{22}\epsilon_2) \\ &= A_{11}A_{21}D(\epsilon_1,\, \epsilon_1)+A_{11}A_{22}D(\epsilon_1,\, \epsilon_2)+A_{12}A_{21}D(\epsilon_2,\, \epsilon_1) \\ &\quad +A_{12}A_{22}D(\epsilon_2,\, \epsilon_2). \end{aligned}$$

از این‌رو، $D$ توسط چهار اسکالر

$D(\epsilon_1,\, \epsilon_1)$، $D(\epsilon_1,\, \epsilon_2)$، $D(\epsilon_2,\, \epsilon_1)$ و $D(\epsilon_2,\, \epsilon_2)$

کاملاً تعیین می‌شود. خواننده باید بآسانی بتواند نشان دهدکه اگر $a$، $b$، $c$، و $d$ چهار اسکالر دلخواه در $K$ باشند و تعریف‌کنیم

$$D(A)=A_{11}A_{21}a+A_{11}A_{22}b+A_{12}A_{21}c+A_{12}A_{22}d$$

آنگاه $D$ تابعی ۲ خطی روی ماتریسهای $2\times 2$ بر روی $K$ است و

$$D(\epsilon_1, \epsilon_1) = a, \quad D(\epsilon_1, \epsilon_2) = b,$$
$$D(\epsilon_2, \epsilon_1) = c, \quad D(\epsilon_2, \epsilon_2) = d.$$

**لم.** هر ترکیب خطی از توابع $n$ خطی، خود $n$ خطی است.

اثبات. کافی است ثابت کنیم کـه ترکیبی خطی از دو تابع $n$ خطی تابعی است $n$خطی. گیریم $D$ و $E$ توابعی $n$ خطی باشند. اگـر $a$ و $b$ به $K$ تعلق داشته باشند، بدیهی است که ترکیب خطی $aD+bE$ توسط

$$(aD+bE)(A) = aD(A)+bE(A)$$

تعریف می‌شود. از این‌رو، اگر همهٔ سطرها، به‌جز سطر $i$، را ثابت نگاهداریم

$$\begin{aligned}(aD+bE)(c\alpha_i+\alpha_i') &= aD(c\alpha_i+\alpha_i')+bE(c\alpha_i+\alpha_i')\\ &= acD(\alpha_i)+aD(\alpha_i')+bcE(\alpha_i)+bE(\alpha_i')\\ &= c(aD+bE)(\alpha_i)+(aD+bE)(\alpha_i'). \square\end{aligned}$$

اگر $K$ یك هیأت و $V$ مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی $K$ باشند، لـم بالا بیان می‌کند که مجموعهٔ توابع $n$خطی روی $V$ زیرفضایی ازفضای همهٔ توابع از $V$ در $K$است.

**مثال ۳.** فرض‌کنیم تابع $D$ روی ماتریسهای ۲ × ۲ برروی $K$ توسط

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \tag{۳-۵}$$

تعریف شده باشد. دراین‌صورت، $D$ مجموع دو تابع‌ازنوع توصیف شده درمثال ۱ است:

$$D = D_1 + D_2$$
$$D_1(A) = A_{11}A_{22}$$
$$D_2(A) = -A_{12}A_{21}.$$

بنابرلم بالا، $D$ تابعی ۲خطی است. خواننده‌ای‌که مختصرتجربه‌ای بـا دترمینانها داشته باشد ایـن مطلب را شگفت‌آور نخواهد یافت؛ زیرا، (۳-۵) چیـزی جزتعریف معمولی دترمینان یك ماتریس ۲ × ۲ نیست. بدیهی است تابع $D$ کـه هم‌اکنون تعریف شدنمونهٔ توابع ۲ خطی نیست. این تابع دارای خواص ویژهٔ بسیاری است که اینك به‌ذکر برخی ازآنها می‌پردازیم. اول، اگـر $I$ ماتریس همانی ۲ × ۲ باشد، آنگاه $D(I) = 1$؛ یعنی، $D(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1$. دوم، اگردوسطر $A$ برابرباشند، داریم

$$D(A) = A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11} = 0.$$

سوم، اگر $A'$ ماتریسی باشدکه ازتعویض سطرهای ماتریس $A$ی ۲ × ۲حاصل شده باشد، آنگاه $D(A') = -D(A)$؛ زیرا

$$D(A') = A'_{11}A'_{22} - A'_{12}A'_{21}$$
$$= A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11}$$
$$= -D(A).$$

**تعریف.** تابع $n$خطی $D$ را **متناوب** گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف) وقتی دو سطر $A$ متساوی باشند، $D(A) = 0$.

(ب) اگر ماتریس $A'$ از تعویض دو سطر $A$ حاصل شده باشد، آنگاه $D(A') = -D(A)$.

ذیلاً ثابت می‌کنیم هر تابع $n$ خطی $D$ که شرط (الف) را برآورد، خود به‌خود شرط (ب) را نیز برمی‌آورد. با این وجود، برای راحتی است که در تعریف تابع $n$خطی متناوب هردو خاصیت را گنجانده‌ایم. خواننده احتمالاً خود درخواهد یافت که اگر $D$ درشرط (ب) صدق کند و دوسطر از سطرهای ماتریس $A$ متساوی باشند، آنگاه $D(A) = -D(A)$. این مطلب ما را وسوسه می‌کند حکم کنیم که در این صورت $D$ در شرط (الف) نیزصدق می‌کند. به‌عنوان مثال، اگر $k$ هیأتی باشدکه درآن $1+1 \neq 0$، این مطلب درست است، ولی درحالت عمومی (الف) نتیجه‌ای از (ب) نیست.

**تعریف.** فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، $n$عددی صحیح مثبت و $D$ تابعی از ماتریسهای $n \times n$ برروی $K$ در $K$ باشد. گوییم $D$ **تابع دترمینان** است، هرگاه $D$، $n$خطی و متناوب باشد و $D(I) = 1$.

همچنان‌که قبلا نیز بیان‌کردیم، نهایتاً نشان خواهیم دادکه روی ماتریسهای $n \times n$ برروی $K$ دقیقاً یك تابع دترمینان وجود دارد. این مطلب درمورد ماتریسهای $1 \times 1$، $A = [a]$ برروی $K$، بسادگی قابل مشاهده است. تابع $D$ که با $D(A) = a$ داده شود، یك تابع دترمینان است وواضح است‌که این تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای $1 \times 1$ است. ازاین گذشته درموقعیتی هستیم که تکلیف حالت $n = 2$ را نیزمعلوم‌کنیم. درمثال ۳ نشان داده شدکه تابع

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

یك تابع دترمینان است. بعلاوه، فرمولی‌که در مثال ۲ ارائه شد، نشان می‌دهدکه $D$ تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای $2 \times 2$ است. زیرانشان دادیم که به‌ازای هرتابع ۲خطی $D$

$$D(A) = A_{11}A_{21}D(\epsilon_1, \epsilon_1) + A_{11}A_{22}D(\epsilon_1, \epsilon_2) + A_{12}A_{21}D(\epsilon_2, \epsilon_1) +$$
$$A_{12}A_{22}D(\epsilon_2, \epsilon_2).$$

اگر $D$ متناوب باشد، آنگاه

$$D(\epsilon_1, \epsilon_1) = D(\epsilon_2, \epsilon_2) = 0$$

و

$$D(\epsilon_2, \epsilon_1) = -D(\epsilon_1, \epsilon_2) = -D(I).$$

اگر $D$ درشرط $D(I)=1$ نیزصدق کند، آنگاه

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

**مثال ۴.** هیأت $F$ و تابع ۳خطی متناوب دلخواه $D$ روی ماتریسهای $3\times 3$ بر روی حلقهٔ چندجمله‌ای $F[x]$ را درنظرمی‌گیریم.

فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{bmatrix}.$$

اگرسطرهای ماتریس همانی $3\times 3$ را با $\epsilon_1$، $\epsilon_2$، و $\epsilon_3$ نشان دهیم، آنگاه

$$D(A) = D(x\epsilon_1 - x^2\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3).$$

ازآنجاکه $D$، به‌عنوان تابعی از هرسطر، خطی است

$$\begin{aligned} D(A) &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3) - x^2D(\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3) \\ &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1) + x^4D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) - x^2D(\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1) \\ &\quad - x^5D(\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_3). \end{aligned}$$

چون $D$ متناوب است، داریم

$$D(A) = (x^4 + x^2)D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3).$$

**لم.** فرض کنیم تابع ۲ خطی $D$ با این خاصیت باشد که به‌ازای هرماتریس $A$ی $2\times 2$ بر روی $K$ با سطرهای متساوی، $D(A)=0$. در این‌صورت $D$ متناوب است.

**اثبات.** آنچه‌که باید نشان دهیم‌این است‌که اگر $A$ ماتریسی $2\times 2$ باشد و $A'$ از تعویض سطرهای $A$ حاصل بشود، آنگاه $D(A') = -D(A)$. اگرسطرهای $A$ را $\alpha$ و $\beta$ بنامیم، این بدان معنی است‌که باید نشان دهیم $D(\beta, \alpha) = -D(\alpha, \beta)$. چون $D$ تابعی ۲خطی است

$$D(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = D(\alpha, \alpha) + D(\alpha, \beta) + D(\beta, \alpha) + D(\beta, \beta).$$

بنا به‌فرض $D(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = D(\alpha, \alpha) = D(\beta, \beta) = 0$. بنابراین

$$D(\alpha, \beta)+D(\beta, \alpha)=0. \square$$

**لم.** تابع $n$ خطی $D$ روی ماتریسهای $n\times n$ برروی $K$ مفروض است. فرض کنیم $D$ دارای این خاصیت باشدکه هرگاه دوسطرمجاور $A$ متساوی باشند، آنگاه $D(A)=0$. در این صورت $D$ متناوب است.

اثبات. باید نشان دهیم‌وقتی که دوسطر دلخواه $A$ متساوی باشند آنگاه $D(A)=0$، ونیزوقتی که $A'$ از تعویض دوسطر دلخواه $A$ حاصل بشود آنگـاه $D(A')=-D(A)$. ابتدا، فرض می‌کنیم $A'$ ازتعویض دوسطرمجاور $A$ حاصل شده باشد. شایان توجه است که برهانی که دراثبات لم قبل به‌کار رفت شامل این حالت نیزمی‌شود و $D(A')=-D(A)$ را به‌دست می‌دهد.

اینك فرض می‌کنیم $B$ ازتعویض سطرهای $i$ و $j$ ماتریس $A$ با شرط $j>i$ حاصل شده باشد. بدیهی است می‌توانیم $B$ را با چند تعویض متوالی سطرهای مجاور $A$ به‌طور جفت‌جفت به‌دست آوریم. ازتعویض سطر $i$ با سطر $(i+1)$ شروع می‌کنیم وکاررا ادامه می‌دهیم تااینکه سطرها بترتیب

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_j, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n$$

درآیند. این عمل نیاز به $k=j-i$ تعویض سطرهای مجاور دارد. اکنون با استفاده از $(k-1)$ تعویض سطرهای مجاور، $\alpha_j$ را به‌مـکان $i$ام منتقل می‌کنیم. بدین‌سان، $B$ را با $k+(k-1)=2k-1$ تعویض سطرهای مجاور، از $A$ به‌دست می‌آوریم. پس

$$D(B)=(-1)^{2k-1}D(A)=-D(A).$$

فرض می‌کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ بـا دوسطر متساوی، مثلاً $\alpha_i=\alpha_j$ بـا $i<j$، باشد. اگر $j=i+1$، آنگاه $A$ دارای دوسطرمجاورمتساوی است و $D(A)=0$. اگـر $j>i+1$، $\alpha_{i+1}$ و $\alpha_j$ را تعـویض می‌کنیم. ماتریس حاصـل؛ یعنی $B$، دارای دوسطر مجـاور متساوی است و لـذا $D(B)=0$. از سوی دیگـر، $D(B)=-D(A)$، پس $D(A)=0$. $\square$

**تعریف.** اگـر $n>1$ و $A$ یك ماتـریس $n\times n$ بـر روی $K$ بـاشد، ماتـریس $(n-1)\times(n-1)$ حاصل از حذف سطر $i$م و ستون $j$م ماتریس $A$ را با $A(i|j)$ نشان می‌دهیم. اگـر $D$ تابعی $(n-1)$ خطی و $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد، قـرار می‌گذاریم که $D_{ij}(A)=D[A(i|j)]$.

**قضیهٔ ۱.** فرض کنیم $n>1$ و $D$ تابع $(n-1)$ خطی متناوبی روی ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ بر روی $K$ باشد. به‌ازای هر $j$، $1\leqslant j\leqslant n$، تابع $E_j$ تعریف شده توسط

$$E_j(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}D_{ij}(A) \qquad (۴\text{-}۵)$$

تابع $n$خطی متناوبی روی ماتریسهای $A$ی $n\times n$ است. اگر $D$ یك تابع دترمینان باشد، هر $E_j$ نیز یك تابع دترمینان است.

اثبات. اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد، $D_{ij}(A)$ مستقل از $i$امین سطر $A$ است. چون $D$، $(n-1)$ خطی است، واضح است که $D_{ij}$ به‌عنوان تابعی از هر سطر، به‌جز سطر $i$، خطی است. بنابراین $A_{ij}D_{ij}(A)$ تابعی $n$ خطی از $A$ است. هر ترکیب خطی از توابع $n$خطی، خود $n$خطی است؛ از این‌رو، $E_j$ هم $n$خطی‌است. برای اینکه‌ثابت‌کنیم $E_j$ متناوب نیز هست، کافی است نشان‌دهیم هنگامی که $A$ دارای دوسطرمجاور متساوی باشد $E_j(A)=0$. فرض می‌کنیم $\alpha_k=\alpha_{k+1}$. اگر $i\neq k$ و $i\neq k+1$ ماتریس $A(i|j)$ دارای دوسطر متساوی است ولذا $D_{ij}(A)=0$. بنابراین

$$E_j(A)=(-1)^{k+j}A_{kj}D_{kj}(A)+(-1)^{k+1+j}A_{(k+1)j}D_{(k+1)j}(A).$$

چون $\alpha_k=\alpha_{k+1}$

$$A_{kj}=A_{(k+1)j} \quad \text{و} \quad A(k|j)=A(k+1|j).$$

دراین صورت مسلماً $E_j(A)=0$.

حال فرض می‌کنیم $D$ یك‌تابع دترمینان باشد. اگر $I^{(n)}$ ماتریس همانی $n\times n$باشد، آنگاه $I^{(n)}(j|j)$ ماتریس همانی $(n-1)\times(n-1)$، یعنی $I^{(n-1)}$، است. چون $I^{(n)}_{ij}=\delta_{ij}$ از (۵-۴) نتیجه می‌شود که

$$E_j(I^{(n)})=D(I^{(n-1)}). \qquad (۵\text{-}۵)$$

حال $D(I^{(n-1)})=1$، از این‌رو $E_j(I^{(n)})=1$ و $E_j$ نیزیك تابع دترمینان است. □

نتیجه. اگر $K$ حلقه‌ای جابجایی باعنصر همانی و $n$ عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه حداقل یك تابع دترمینان روی $K^{n\times n}$ وجود دارد.

اثبات. قبلاً وجود یك تابع دترمینان روی ماتریسهای $1\times 1$ برروی $K$، وحتی روی ماتریسهای $2\times 2$ برروی $K$ را نشان دادیم. قضیهٔ ۱ بوضوح نشان می‌دهد که با در دست داشتن یك تابع‌دترمینان روی ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$، چگونه‌می‌توان یك تابع‌دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ راساخت. حال، اثبات این‌نتیجه با استقرا تکمیل می‌شود. □

**مثال ۵.** فرض‌کنیم $B$ ماتریسی $2\times 2$ برروی $K$ باشد و

$$|B|=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}.$$

دراین‌صورت، اگر $D$ یك‌تابع دترمینان‌روی ماتریسهای $2\times 2$ باشد، آنگاه $D(B)=|B|$.

www.riazisara.ir



نشان دادیم که این تابع روی $K^{2\times 2}$ یکتاست. گیریم

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریسی $3\times 3$ برروی $K$ باشد. اگر $E_1$، $E_2$، و $E_3$ را طبق (۵-۴) تعریف کنیم، آنگاه

$$E_1(A)= A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۵\text{-}۶)$$

$$E_2(A)= -A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{22}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{32}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۵\text{-}۷)$$

$$E_3(A)= A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} - A_{23}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} + A_{33}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}. \quad (۵\text{-}۸)$$

از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که $E_1$، $E_2$، و $E_3$ توابع دترمینان هستند. درواقع، چنانکه بعداً نشان خواهیم داد، $E_1=E_2=E_3$، ولی هنوز این موضوع حتی دراین حالت ساده هم روشن نیست. به‌هرصورت، این موضوع را مستقیماً با بسط هریك ازعبارات بالامی‌توان نشان داد. به‌جای انجام این‌کار، چند مثال خاص می‌آوریم.

(الف) فرض کنیم $K=R[x]$ و

$$A=\begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^3 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{bmatrix}.$$

دراین‌صورت

$$E_1(A)=(x-1)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}=(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$E_2(A)=-x^2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}+(x-2)\begin{vmatrix} (x-1) & x^3 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3),$$

و

$$E_3(A)=x^3\begin{vmatrix} 0 & x-2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x-1 & x^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+(x-3)\begin{vmatrix} x-1 & x^2 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3).$$

(ب) گیریم $K=R$ و

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

دراین صورت

$$E_1(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$E_2(A)=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

$$E_3(A)=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1.$$

## تمرین

۱. هریك از عبارات زیر، یك تابع $D$ روی مجموعهٔ ماتریسهای $3\times 3$ برروی هیأت اعداد حقیقی تعریف می‌کند. درکدام یك ازاین حالات $D$ تابعی ۳خطی است؟

(الف) $D(A)=A_{11}+A_{22}+A_{33}$؛

(ب) $D(A)=(A_{11})^2+3A_{11}A_{22}$؛

(پ) $D(A)=A_{11}A_{12}A_{33}$؛

(ت) $D(A)=A_{13}A_{22}A_{32}+5A_{12}A_{22}A_{32}$؛

(ث) $D(A)=0$؛

(ج) $D(A)=1$.

۲. مستقیماً نشان دهیدکه سه تابع $E_1$، $E_2$، و $E_3$ تعریف شده تـوسط (۵-۶)، (۵-۷)، و (۵-۸) مساوی‌اند.

۳. حلقهٔ جابجایی $K$ بـا عنصرهمانی مفروض است. اگـر $A$ ماتریسی $2\times 2$ برروی $K$ باشد، **الحاقی کلاسیک** $A$ عبارت از ماتریس $2\times 2$ی $\operatorname{adj} A$ است که به‌صورت

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود. اگر det تابع یکتای دترمینان روی ماتریسهای $2\times 2$ برروی $K$را نمایش دهد، نشان دهید

(الف) $(\operatorname{adj} A)A=A(\operatorname{adj} A)=(\det A)I$؛
(ب) $\det(\operatorname{adj} A)=\det(A)$؛
(پ) $\operatorname{adj}(A^t)=(\operatorname{adj} A)^t$.
($A^t$ ترانهادهٔ $A$ را نشان می‌دهد.)

۴. فرض کنید $A$ ماتریسی $2\times 2$ برروی هیأت $F$ باشد. نشان دهیدکـه $A$ معکوس‌پذیر است اگروتنها اگر $\det A\neq 0$. اگر $A$ معکوس‌پذیر باشد، فرمولی برای $A^{-1}$ به‌دست آورید.

۵. فرض کنید $A$ ماتریسی $2\times 2$ برروی هیأت $F$ باشد و $A^2=0$. نشان دهیـد به‌ازای هراسکالر $c$ داریم $\det(cI-A)=c^2$.

۶. زیرهیأت $K$ ازاعداد مختلطوعدد صحیح مثبت $n$ مفروض‌اند. فرض کنید $j_1$، ... ، $j_n$ و $k_1$، ... ، $k_n$ اعداد صحیح‌مثبتی کوچکتر ازیا متساوی با $n$ باشند. به‌ازای‌هرماتریس $n\times n$ ی $A$ برروی $K$ تعریف می‌کنیم

$$D(A)=A(j_1,\, k_1)A(j_2,\, k_2)\cdots A(j_n,\, k_n).$$

ثابت کنید $D$ تابعی $n$خطی‌است اگروتنها اگراعداد صحیح $j_1$، ... ، $j_n$ متمایز باشند.

۷. فرض کنید $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. نشان دهید تابع دترمینان روی ماتریسهای $2\times 2$ ی $A$ برروی $K$ به‌عنوان تابعی ازستونهای $A$ تابعی است متناوب و ۲خطی.

۸. حلقهٔ جابجایی $K$ با عنصرهمانی را درنظربگیرید وتابع $D$ روی ماتریسهای $3\times 3$ برروی $K$ را با قاعدهٔ

$$D(A)=A_{11}\det\begin{bmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}-A_{12}\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{23}\\ A_{31} & A_{33}\end{bmatrix}$$
$$+A_{13}\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{22}\\ A_{31} & A_{32}\end{bmatrix}$$

تعریف کنید. نشان دهید $D$ به‌عنوان تابعی از ستونهای $A$ متناوب و ۳خطی است.

۹. فرض کنید $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی باشد و $D$ تابع $n$خطی متناوبی روی ماتریسهای $n\times n$ برروی $K$. نشان دهید

(الف) هرگاه یکی از سطرهای $A$ برابره باشد، $D(A)=0$.

(ب) هرگاه $B$ از $A$ با اضافه‌کردن مضربی اسکالری ازیك سطر$A$ به سطری دیگر حاصل شده باشد، $D(B)=D(A)$.

۱۰. هیأتی چون $F$، یك ماتریس $A$ی ۳ × ۲ برروی $F$، وبردار $(c_1, c_2, c_3)$ از $F^3$ تعریف شده توسط

$$c_1=\begin{vmatrix}A_{12} & A_{13}\\ A_{22} & A_{23}\end{vmatrix},\quad c_2=\begin{vmatrix}A_{13} & A_{11}\\ A_{23} & A_{21}\end{vmatrix},\quad c_3=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}.$$

داده شده‌اند. نشان دهید

(الف) ۲ = رتبهٔ $(A)$ اگروتنها اگر $(c_1, c_2, c_3)\neq 0$؛

(ب) اگر $A$ دارای رتبهٔ ۲ باشد، آنگاه $(c_1, c_2, c_3)$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه معادلات $AX=0$ است.

۱۱. فرض کنید $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی و $D$ تابع ۲خطی متناوبی روی ماتریسهای۲ × ۲ برروی$K$ باشد. نشان‌دهیدبه‌ازای هر$A$، $D(A)=(\det A)D(I)$. حال ازاین نتیجه استفاده کنید (هیچ محاسبه‌ای روی درایه‌هاجایزنیست) ونشان‌دهید که به‌ازای هردوماتریس $A$ و $B$ی ۲ × ۲ برروی $K$ داریم

$$\det(AB)=(\det A)(\det B).$$

۱۲. یك هیأت $F$ ویك تابع $D$ روی ماتریسهای $n\times n$ برروی $F$ (با مقادیر در$F$)داده شده‌اند. فرض کنید به‌ازای‌هر $A$ و$B$، $D(AB)=D(A)D(B)$. نشان‌دهید که‌یا به‌ازای هر $A$ داریم $D(A)=0$ یا $D(I)=1$. درحالت اخیر، نشان دهید هنگامی که $A$ معکوس‌پذیر باشد آنگاه $D(A)\neq 0$.

۱۳. فرض کنید $R$ هیأت اعداد حقیقی باشد و تابع $D$ روی ماتریسهای ۲ × ۲ بر روی $R$ با مقادیر در $R$ چنان باشد که به‌ازای همهٔ $A$ها و $B$ها، $D(AB)=D(A)D(B)$. همچنین فرض کنید

$$D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \neq D\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

مطالب زیر را اثبات کنید:

(الف) $D(0)=0$؛

(ب) هرگاه $A^2=0$ آنگاه $D(A)=0$؛

(پ) هرگاه $B$ از تعویض سطرها (یا ستونهای) $A$ حاصل شده باشد، آنگاه $D(B)=-D(A)$؛

(ت) هرگاه یك سطر (یا یك ستون) $A$ صفر باشد آنگاه $D(A)=0$؛

(ث) هرگاه $A$ منفرد باشد آنگاه $D(A)=0$.

۱۴. فرض کنید $A$ ماتریسی ۲ × ۲ بر روی هیأت $F$ باشد. در این صورت، مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای به‌صورت $f(A)$ که در آن $f$ یك چندجمله‌ای بر روی $F$ است حلقه‌ای است جابجایی با عنصر همانی که آن را با $K$ نمایش می‌دهیم. اگر $B$ ماتریسی ۲ × ۲ بر روی $K$ باشد، آنگاه دترمینان $B$، ماتریسی ۲ × ۲ بر روی $F$ و به‌صورت $f(A)$ است. فرض کنید $I$ ماتریس همانی ۲ × ۲ بر روی $F$ و $B$ ماتریس ۲ × ۲ بر روی $K$ به‌این صورت باشد که

$$B=\begin{bmatrix} A-A_{11}I & -A_{12}I \\ -A_{21}I & A-A_{22}I \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $\det B=f(A)$، که در آن $f=x^2-(A_{11}+A_{22})x+\det A$، و همچنین نشان دهید $f(A)=0$.

## ۳.۵. جایگشتها و یکتایی دترمینان

در این بخش، یکتایی تابع دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ بر روی $K$ را اثبات می‌کنیم. اثبات، به‌طور کاملاً طبیعی، ما را به‌درنظر گرفتن جایگشتها و برخی از خواص بنیانی آنها رهنمون می‌کند.

فرض کنیم $D$ تابع $n$خطی متناوبی روی ماتریسهای $n\times n$ بر روی $K$ باشد. ماتریس $A$ی $n\times n$ بر روی $K$ با سطرهای $\alpha_1$، $\alpha_2$، ...، $\alpha_n$ را درنظر می‌گیریم. اگر سطرهای ماتریس همانی $n\times n$ بر روی $K$ را با $\epsilon_1$، $\epsilon_2$، ...، $\epsilon_n$ نشان دهیم، داریم

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}A(i,\ j)\epsilon_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{۵-۹}$$

ازاین‌رو

$$D(A)=D\ (\sum_j A(1,\ j)\epsilon_j,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$$
$$=\sum_j A(1,\ j)D(\epsilon_j,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

اکنون اگر $\sum_k A(2,\ k)\epsilon_k$ را جایگزین $\alpha_2$ کنیم، می‌بینیم که

$$D(\epsilon_j,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)=\sum_k A(2,\ k)D(\epsilon_j,\ \epsilon_k,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

پس

$$D(A)=\sum_{j,\ k}A(1,\ j)A(2,\ k)D(\epsilon_j,\ \epsilon_k,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

سپس در $D(\epsilon_j,\ \epsilon_k,\ \cdots,\ \alpha_n)$، $\sum A(3,\ l)\epsilon_l$ را به‌جای $\alpha_3$ می‌گذاریم، والی آخر. سرانجام برای $D(A)$ به‌عبارتی پیچیده ولی از نظرتئوری مهم دست می‌یابیم و آن:

$$D(A)=\sum_{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n}A(1,\ k_1)A(2,\ k_2)\ \cdots\ A(n,\ k_n)\times$$
$$D(\epsilon_{k_1},\ \epsilon_{k_2},\ \cdots,\ \epsilon_{k_n}). \tag{۵-۱۰}$$

در (۵-۱۰) مجموع به‌ازای همهٔ دنباله‌های $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ از اعداد صحیح‌مثبت نابیشتر از $n$ محاسبه می‌شود. این مطلب نشان می‌دهد که $D$ مجموعی متناهی از توابع‌از نوع توصیف شده توسط (۵-۲) است. باید توجه داشت‌که (۵-۱۰) صرفاً نتیجه‌ای از فرض $n$خطی بودن $D$ است، ونیزاینکه حالت خاصی از (۵-۱۰) درمثال ۲ به‌دست آمد. چون $D$ متناوب است

$$D(\epsilon_{k_1},\ \epsilon_{k_2},\ \cdots,\ \epsilon_{k_n})=0$$

با این شرط‌که دو نمایهٔ $k_i$ متساوی باشند. دنبالهٔ $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ از اعداد صحیح مثبت نابیشتر از $n$ با این خاصیت‌که هیچ دوتایی از $k_i$ها متساوی نباشند، **یك جایگشت از درجهٔ** $n$ نامیده می‌شود. بنابراین، در (۵-۱۰)، ضرورت دارد فقط عمل جمع، برروی دنباله‌هایی صورت گیرد که جایگشتهایی از درجهٔ $n$ هستند.

چون هردنبالهٔ متناهی یا هر$n$تایی تابعی‌است تعریف شده روی اولین $n$ عددصحیح مثبت، هرجایگشت از درجهٔ $n$ را می‌توان به‌عنوان تابعی یك به‌یك از مجموعهٔ $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ به‌روی خودش تعریف کرد. چنین تابعی، مثلاً $\sigma$، با $n$تایی $(\sigma 1,\ \sigma 2,\ \cdots,\ \sigma n)$ متناظر است و از این‌رو چیزی جز قاعده‌ای برای ترتیب‌بندی

اعداد ۱، ۲، ۰۰۰، $n$ به‌یك روش کاملاً خوش تعریف نیست.

اگر $D$ تابع $n$خطی متناوبی باشد و $A$ ماتریسی $n\times n$ برروی $K$، آنگاه داریم

$$D(A)=\sum_{\sigma} A(1,\sigma 1)\cdots A(n,\sigma n)D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n}) \qquad (۱۱\text{-}۵)$$

که درآن مجموع به‌ازای جایگشتهای متمایز $\sigma$ از درجهٔ $n$ محاسبه می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که

$$D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n})=\pm D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n) \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

که در آن علامت $\pm$ تنها به‌جایگشت $\sigma$ وابسته است. دلیل این نکته به‌شرح زیر است. دنبالهٔ $(\sigma 1,\sigma 2,\cdots,\sigma n)$ را می‌توان از دنبالهٔ $(1,2,\cdots,n)$ با تعدادی متناهی تعویض جفتی عناصر به‌دست آورد. مثلاً، اگر $1\neq\sigma 1$، می‌توان جای ۱ و $\sigma 1$ را عوض کرد و $(\sigma 1,\cdots,1,\cdots)$ را به‌دست آورد. با ادامهٔ این راه، پس از حداکثر $n$بار تعویض جفتهایی ازاین نوع به‌دنبالهٔ $(\sigma 1,\cdots,\sigma n)$ دست می‌یابیم. چون $D$ متناوب است، هربار که دوسطر $\epsilon_i$ و $\epsilon_j$ را تعویض کنیم، علامت مقدارآن هم تغییرمی‌کند. پس، اگر از $(1,2,\cdots,n)$ با $m$ تعویض از جفتهای $(i,j)$ به $(\sigma 1,\sigma 2,\cdots,\sigma n)$ برسیم، داریم

$$D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n})=(-1)^m D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n).$$

درحالت خاص، اگر $D$ یك تابع دترمینان باشد

$$D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n})=(-1)^m \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

که درآن $m$ تنها به $\sigma$ وابسته است و نه به $D$. بنابراین، همهٔ توابع دترمینان، به‌ماتریسی با سطرهای $\epsilon_{\sigma 1}$، ۰۰۰، $\epsilon_{\sigma n}$ یك مقدار تخصیص می‌دهند، واین مقدار یا ۱ است یا ۱ —.

حکمی بنیانی درمورد جایگشتها به‌شرح زیراست: اگر $\sigma$ جایگشتی از درجهٔ $n$ باشد، می‌توان از دنبالهٔ $(1,2,\cdots,n)$، با تعویضهایی متوالی ازجفتها، به‌دنبالهٔ $(\sigma 1,\sigma 2,\cdots,\sigma n)$ رسید. گرچه این امرمی‌تواند به‌طرق گوناگون انجام شود، ولی بدون توجه به‌چگونگی انجام آن، تعداد تعویضهای به‌کاررفته یا همواره زوج است و یا همواره فرد. دراین صورت، جایگشت بترتیب **زوج** یا **فرد** نامیده می‌شود. **علامت** جایگشت $\sigma$ توسط

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases} 1 & \text{هرگاه } \sigma \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{هرگاه } \sigma \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

تعریف می‌شود. دراینجا نماد «۱» عدد صحیح ۱ را نشان می‌دهد.

ذیلاً نشان خواهیم دادکه این خاصیت بنیانی‌جایگشتها را می‌توانیم از مطالبی که هم‌اکنون درمورد توابع دترمینان می‌دانیم نیز به‌دست آوریم. اما، عجالتاً این مطلب را

دانسته فرض می‌کنیم. پس، عدد صحیح $m$ موجود در (۵-۱۳) همواره زوج است هرگاه $\sigma$ جایگشتی زوج باشد، وهمواره فرد است هرگاه $\sigma$ جایگشتی فرد باشد. دراین‌صورت، به‌ازای هرتابع $n$خطی متناوب $D$ داریم

$$D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}) = (\operatorname{sgn} \sigma) D(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$$

وبا استفاده از (۵-۱۱) داریم

$$D(A) = \left[ \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n) \right] D(I). \quad (۵\text{-}۱۴)$$

بدیهی است که $I$ ماتریس همانی $n \times n$ را نشان می‌دهد.

از (۵-۱۴) می‌توان دریافت که دقیقاً یك تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ برروی $K$ وجود دارد. هرگاه این تابع را با det نمایش دهیم، داریم

$$\det(A) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n) \quad (۵\text{-}۱۵)$$

که در آن مجموع به‌ازای جایگشتهای متمایز $\sigma$ از درجهٔ $n$ محاسبه می‌شود. این مطالب رسماً به‌صورت زیرخلاصه می‌شوند.

**قضیهٔ ۲.** فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و $n$عددی صحیح مثبت باشد. دقیقاً یك تابع دترمینان روی مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی $K$ وجود دارد، و این تابع همان تابع det تعریف شده در (۵-۱۵) است. اگر $D$ تابع $n$خطی متناوبی روی $K^{n \times n}$ باشد، آنگاه به‌ازای هرماتریس $A$ی $n \times n$

$$D(A) = (\det A) D(I).$$

این همان قضیه‌ای است که درجستجویش بودیم، اما کمبودی در اثبات آن وجود دارد. این کمبود عبارت از اثبات این مطلب است که به‌ازای هرجایگشت مفروض $\sigma$ وقتی با تعویض جفتها از $(1, 2, \cdots, n)$ به $(\sigma 1, \sigma 2, \cdots, \sigma n)$ برسیم، تعداد تعویضها یا همواره زوج است یا همواره فرد. این حکم بنیانی مربوط به ترکیبات، بدون هرگونه رجوعی به‌دترمینانها قابل اثبات است؛ با این وجود، مایلیم نشان دهیم که چگونه این واقعیت از وجود یك تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ نتیجه می‌شود.

فرض کنیم $K$ حلقهٔ اعداد صحیح باشد و $D$ تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی $K$. $\sigma$ را جایگشتی از درجهٔ $n$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم از $(1, 2, \cdots, n)$ با $m$ تعویض از جفتهای $(i, j)$، $i \neq j$، به $(\sigma 1, \sigma 2, \cdots, \sigma n)$ برسیم. چنانکه در (۵-۱۳) نشان دادیم

$$(-1)^m = D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n})$$

یعنی، عدد $(-1)^m$ باید مقدار $D$ روی ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}$ باشد. اگر

$$D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}) = 1$$

آنگاه، $m$ لزوماً زوج است و اگر

$$D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}) = -1$$

آنگاه، $m$ حتماً فرد است.

چون فرمولی صریح برای دترمینان ماتریسهای $n \times n$ در دست هست واین فرمول حاوی جایگشتهای از درجهٔ $n$ است، ایـن بخش را بـا چند مشاهدهٔ دیگـر در مـورد جایگشتها به‌پایان می‌رسانیم. ابتدا، متذکر می‌شویم که دقیقاً $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ جایگشت ازدرجهٔ $n$ وجود دارد. زیرا، اگر $\sigma$ چنین جایگشتی باشد، $n$ امکان برای انتخاب $\sigma 1$ وجود دارد؛ وقتی این انتخاب صورت گرفت، $(n-1)$ انتخاب برای $\sigma 2$ موجـود است، سپس $(n-2)$ انتخاب برای $\sigma 3$، و الی آخر. بنا براین

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

جایگشت مانند $\sigma$ وجود دارد. پس، فرمول (۵-۱۵) برای $\det(A)$، این تابع را به‌صورت مجموعی از $n!$ جمله، یك جمله به‌ازای هر جایگشت ازدرجهٔ $n$، به‌دست می‌دهد. هرجملهٔ مفروض حاصل ضربی چون

$$A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n)$$

از $n$ درایهٔ $A$ است، یك درایه از هر سطر و یکی از هر ستون با علامتی «$+$» یا «$-$» برحسب اینکه $\sigma$ جایگشتی زوج یا جایگشتی فرد باشد.

وقتی جایگشتها به‌عنوان توابعی یك بـه‌یك از مجموعهٔ $\{1, 2, \cdots, n\}$ به‌روی خودش محسوب شوند، تعریف یك نوع ضرب برای جایگشتها میسر می‌شود. حاصلضرب $\sigma$ و $\tau$ بسادگی می‌تواند تابع مرکب $\sigma\tau$ با تعریف

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

باشد. اگر $\epsilon$ جایگشت‌همانی، $\epsilon(i) = i$، رانشان دهد، آنگاه هر $\sigma$ دارای یك معکوس $\sigma^{-1}$ است که

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \epsilon.$$

این‌مشاهدات را می‌توان با این گفته که مجموعهٔ جایگشتهای ازدرجهٔ $n$ تحت عمل ترکیب یك گروه است خلاصه کرد. این گروه غالباً **گروه متقارن درجهٔ n** نامیده می‌شود.

ازدیدگاه حاصل ضرب جایگشتها، خاصیت بنیانی علامت هر جایگشت این‌است که

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau). \qquad (۵\text{-}۱۶)$$

به‌بیان دیگر، $\sigma\tau$ جایگشتی زوج است هرگاه $\sigma$ و $\tau$ یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد، درحالی‌که $\sigma\tau$ فرد است هرگاه یکی از دوجایگشت فرد و دیگری زوج باشد. این‌مطلب

را می‌توان از تعریف علامت، برحسب تعویضهای متوالی جفتهای $(i, j)$ دریافت. با این وجود، نشان دادن چگونگی حصول رابطهٔ $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$ از یك‌خاصیت بنیانی دترمینانها ممکن است آموزنده هم باشد.

گیریم $K$ حلقهٔ اعداد صحیح و $\sigma$ و $\tau$ جایگشتهایی از درجهٔ $n$ باشند. $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ را سطرهای ماتریس همانی $n\times n$ بر روی $K$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $A$ ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\tau 1}, \cdots, \epsilon_{\tau n}$، و $B$ ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}$ باشد. $i$امین سطر $A$ دقیقاً شامل یك درایهٔ غیرصفر، یعنی همان ۱ واقع در ستون $\tau i$ است. از اینجا بسادگی مشاهده می‌شود که $\epsilon_{\sigma\tau i}$ همان $i$امین سطر ماتریس حاصل‌ضرب $AB$ است. حال

$$\det(A)=\operatorname{sgn}\tau ،\ \det(B)=\operatorname{sgn}\sigma ،\ \text{و}\ \det(AB)=\operatorname{sgn}(\sigma\tau).$$

از این‌رو، بلافاصله پس از اثبات قضیهٔ زیر داریم $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$.

**قضیهٔ ۳.** فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، و $A$ و $B$ ماتریسهایی $n\times n$ بر روی $K$ باشند. در این صورت

$$\det(AB)=(\det A)(\det B).$$

**اثبات.** $B$ را ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی $K$ می‌گیریم و به‌ازای هر ماتریس $A$ی $n\times n$ تعریف می‌کنیم $D(A)=\det(AB)$. اگر سطرهای $A$ را با $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ نشان دهیم، آنگاه

$$D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=\det(\alpha_1 B, \cdots, \alpha_n B).$$

در اینجا $\alpha_i B$ ماتریسی $1\times n$ را نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب ماتریس $\alpha_j$ی $1\times n$ و ماتریس $B$ی $n\times n$ است. از آنجا که

$$(c\alpha_i+\alpha_i')B=c\alpha_i B\times\alpha_i' B$$

و $\det$ تابعی $n$ خطی است، بسادگی دیده می‌شود که $D$ تابعی $n$ خطی است. اگر $\alpha_i=\alpha_j$، آنگاه $\alpha_i B=\alpha_j B$، و چون $\det$ متناوب است

$$D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=0.$$

از این‌رو، $D$ نیز متناوب است. پس $D$ یك تابع $n$ خطی متناوب است، و بنا بر قضیهٔ ۲

$$D(A)=(\det A)D(I).$$

اما $D(I)=\det(IB)=\det B$، بنابراین

$$\det(AB)=D(A)=(\det A)(\det B).\ \square$$

حکم $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$، تنها یکی از چند نتیجهٔ قضیهٔ ۳ است. بعضی از این نتیجه‌ها را در بخش بعد ملاحظه خواهیم کرد.

## تمرین

۱ . اگر $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و $A$ ماتریسی بر روی $K$ به‌صورت

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

باشند، نشان دهید $\det A = 0$.

۲ . ثابت کنید دترمینان ماتریس واندرموند

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

برابر $(b-a)(c-a)(c-b)$ است.

۳ . شش جایگشت درجهٔ ۳ را بـه‌طور صریح بنویسید و مشخص کنید کـدام فرد وکدام زوج است، وآنها را در ارائهٔ فـرمـول کامل (۵-۱۵) برای دترمینان یك ماتریس $3 \times 3$ به‌کار ببرید.

۴ . فرض کنید $\sigma$ و $\tau$ جایگشتهایی از درجهٔ ۴ باشند که با $\sigma 1 = 2$، $\sigma 2 = 3$، $\sigma 3 = 4$، $\sigma 4 = 1$، $\tau 1 = 3$، $\tau 2 = 1$، $\tau 3 = 2$، $\tau 4 = 4$ تعریف شده‌اند.
(الف) $\sigma$ فرد است یا زوج؟ $\tau$ فرد است یا زوج؟
(ب) $\sigma\tau$ و $\tau\sigma$ را بیابید.

۵ . اگر $A$ ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری برروی یك‌هیأت باشد، نشان دهید $\det A \neq 0$.

۶ . $A$ ماتریسی $2 \times 2$ برروی یك هیأت است. ثابت کنید $\det(I+A) = 1 + \det A$ اگر و تنها اگر $\operatorname{tr}(A) = 0$.

۷ . ماتریس $n \times n$ی مانند $A$ مثلثی نامیده می‌شود، هرگاه $A_{ij} = 0$ وقتی کـه $i > j$، یا هرگاه $A_{ij} = 0$ وقتی کـه $i < j$. ثابت کنید کـه دترمینان هـر ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب $A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$ از درایه‌های قطری آن است.

۸ . فرض کنید $A$ ماتریسی $3 \times 3$ بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس $xI - A$ با درایه‌های چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهیم؛ درایهٔ $i, j$ ایـن ماتریس چندجمله‌ای

$\delta_{ij}x-A_{ij}$ است. اگر $f=\det(xI-A)$، نشان دهید $f$ یک چندجمله‌ای تکین درجهٔ ۳ است. اگر به‌ازای اعداد مختلط $c_1$، $c_2$، و $c_3$ را داشته باشیم

$$f=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$$

ثابت کنید

$$c_1+c_2+c_3=\operatorname{tr}(A) \quad \text{و} \quad c_1c_2c_3=\det A.$$

۹. فرض کنید $n$ عددی صحیح مثبت و $F$ یك هیأت باشد. اگر $\sigma$ جایگشتی از درجهٔ $n$ باشد، ثابت کنید که تابع

$$T(x_1,\cdots,x_n)=(x_{\sigma 1},\cdots x_{\sigma n})$$

یك عملگر خطی معکوس‌پذیر روی $F^n$ است.

۱۰. فرض کنید $F$ یك هیأت، $n$ عددی صحیح مثبت، و $S$ مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ بر روی $F$ باشد. فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ توابع از $S$ در $F$، و $W$ مجموعهٔ توابع $n$ خطی متناوب روی $S$ باشد. ثابت کنید $W$ زیرفضایی از $V$ است. بعد $W$ چند است؟

۱۱. عملگر خطی $T$ روی $F^n$ داده شده است. تابع $D_T$ را به‌صورت

$$D_T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\det(T\alpha_1,\cdots,T\alpha_n).$$

تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید $D_T$ یك تابع $n$ خطی متناوب است.

(ب) اگر

$$c=\det(T\epsilon_1,\cdots,T\epsilon_n)$$

نشان دهید که به‌ازای هر $n$ بردار داده شدهٔ $\alpha_1،\cdots،\alpha_n$ داریم

$$\det(T\alpha_1,\cdots,T\alpha_n)=c\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n).$$

(پ) اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای $F^n$ و $A$ ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشد، نشان دهید $\det A=c$.

(ت) فکر می‌کنید چه نامی برای اسکالر $c$ مناسب است؟

۱۲. اگر $\sigma$ جایگشتی از درجهٔ $n$ و $A$ ماتریسی $n\times n$ بر روی هیأت $F$ با بردارهای سطری $\alpha_1،\cdots،\alpha_n$ باشد، فرض کنید $\sigma(A)$ ماتریس $n\times n$ با بردارهای سطری $\alpha_{\sigma 1}،\cdots،\alpha_{\sigma n}$ را نمایش دهد.

(الف) ثابت کنید $\sigma(AB)=\sigma(A)B$ و در حالت خاص $\sigma(A)=\sigma(I)A$.

(ب) اگر $T$ عملگر خطی تمرین ۹ باشد، ثابت کنید ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب استانده برابر $\sigma(I)$ است.

(پ) آیا $\sigma^{-1}(I)$ ماتریس $\sigma(I)$ است؟

(ت) آیا این درست است که $\sigma(A)$ با $A$ متشابه است؟

۱۳. ثابت کنید تابع علامت روی جایگشتها به‌مفهوم زیر یکتاست. اگر $f$ تابعی باشد که به‌هر جایگشت درجهٔ $n$ یك عددصحیح را تخصیص بدهدواگر $f(\sigma\tau)=f(\sigma)f(\tau)$، آنگاه $f$ یا متحداً ۰ است یا متحداً ۱، و یا تابع علامت است.

## ۴.۵. چند خاصیت دیگر دترمینان

در این بخش به‌شرح برخی از خواص مفید تابع دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ می‌پردازیم. شاید اولین نکته‌ای را که باید خاطرنشان کنیم، مطلب ذیل باشد. در بحث $\det A$، سطرهای $A$ نقش ممتازی را ایفا کردند. چون تفاوتی اساسی بین سطرها و ستونها وجود ندارد، می‌توان انتظار داشت که $\det A$ تابع $n$ خطی متناوبی از ستونهای $A$ هم باشد. در واقع چنین است و برای اثبات آن کافی است نشان دهیم

$$\det(A^t)=\det(A) \qquad (۵\text{-}۱۷)$$

که در آن $A^t$ نمایشگر ترانهادهٔ $A$ است.

اگر $\sigma$ جایگشتی از درجهٔ $n$ باشد،

$$A^t(i,\ \sigma i)=A(\sigma i,\ i).$$

در این صورت بنا به‌عبارت (۵-۱۵) داریم

$$\det(A^t)=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)A(\sigma 1,1)\cdots A(\sigma n,n).$$

وقتی که $i=\sigma^{-1}j$ داریم $A(\sigma i\ ,i)=A(j,\ \sigma^{-1}j)$. از این‌رو

$$A(\sigma 1,\ 1)\cdots A(\sigma n,\ n)=A(1,\sigma^{-1}1)\cdots A(n,\ \sigma^{-1}n).$$

چون $\sigma\sigma^{-1}$ جایگشت همانی است،

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{یا} \quad (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})=1$$

بعلاوه، چون $\sigma$ روی همهٔ جایگشتهای درجهٔ $n$ تغییر می‌کند، $\sigma^{-1}$ نیز چنین تغییر می‌کند. بنابراین

$$\det(A^t)=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})A(1,\ \sigma^{-1}1)\cdots A(n,\ \sigma^{-1}n)$$
$$=\det A$$

و (۵-۱۷) اثبات می‌شود.

درموارد معینی به‌محاسبهٔ دترمینانهای مشخصی نیازمندیم. هنگامی که این امر ضرورت یابد، غالباً استفاده از حکم زیر مفید است. اگر $B$ از $A$ با افزودن مضربی از یك سطر $A$ به سطری دیگر (یا مضربی از یك ستون به ستونی دیگر) حاصل شود، آنگاه

$$\det B = \det A. \qquad (۵\text{-}۱۸)$$

ما این حکم را در مورد سطرها اثبات می‌کنیم. فرض‌کنیم $B$ از $A$ با افزودن $c\alpha_j$ به $\alpha_i$، بافرض $i<j$، حاصل بشود. چون det، به‌عنوان تابعی از $i$مین سطر، خطی است

$$\begin{aligned}\det B &= \det A + c\,\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n)\\ &= \det A.\end{aligned}$$

حکم مفید دیگری هم به‌شرح زیر است. فرض‌کنیم ماتریسی $n\times n$ به‌صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

داده شده باشد. در اینجا $A$ ماتریسی $r\times r$، $C$ ماتریسی $s\times s$، $B$ ماتریسی $r\times s$، و ۰ ماتریس صفر $s\times r$ را نشان می‌دهد. در این صورت

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C). \qquad (۵\text{-}۱۹)$$

برای اثبات این مطلب، تعریف می‌کنیم

$$D(A, B, C) = \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

اگر $A$ و $B$ را ثابت نگاهداریم، آنگاه $D$ به‌عنوان تابعی از سطرهای $C$ متناوب و $s$ خطی است. از این‌رو، بنا بر قضیهٔ ۲

$$D(A, B, C) = (\det C)D(A, B, I).$$

که درآن $I$ ماتریس همانی $s\times s$ است. با تفریق مضاربی از سطرهای $I$ ازسطرهای $B$ و به‌کار بردن حکم پیش از رابطهٔ (۵-۱۸)، داریم

$$D(A, B, I) = D(A, 0, I).$$

حال $D(A, 0, I)$ به‌عنوان تابعی از سطرهای $A$ مسلماً متناوب و $r$ خطی است. ازاین‌رو

$$D(A, 0, I) = (\det A)D(I, 0, I).$$

اما، $D(I, 0, I) = 1$، پس

$$\begin{aligned} D(A, B, C) &= (\det C)D(A, B, I) \\ &= (\det C)D(A, \circ, I) \\ &= (\det C)(\det A). \end{aligned}$$

با برهانی از همین نوع یا با استفاده از ترانهاده‌ها داریم

$$\det \begin{bmatrix} A & \circ \\ B & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C). \tag{۲۰-۵}$$

**مثال ۶.** فرض‌کنیم $K$ هیأت اعداد گویا باشد وبخواهیم دترمینان ماتریس ۴ × ۴

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & \circ & ۲ \\ ۴ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & \circ \end{bmatrix}$$

را محاسبه‌کنیم. با تفریق مضربهای مناسب سطر ۱ از سطرهای ۲، ۳، و ۴ ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ \circ & ۴ & -۴ & -۴ \\ \circ & ۵ & -۹ & -۱۳ \\ \circ & ۳ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

را به‌دست می‌آوریم و می‌دانیم‌که بنا بر (۵-۱۸) این ماتریس همان دترمینان ماتریس $A$ را دارد. اگر ۵/۴ سطر ۲ را از سطر ۳، و سپس ۳/۴ سطر ۲ را از سطر ۴ کم‌کنیم، داریم

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ \circ & ۴ & -۴ & -۴ \\ \circ & \circ & -۴ & -۸ \\ \circ & \circ & ۴ & \circ \end{bmatrix}$$

و بار دیگر $\det B = \det A$. از صورت بلوکی $B$ برمی‌آیدکه

$$\det A = \det B = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ \circ & ۴ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -۴ & -۸ \\ ۴ & \circ \end{vmatrix} = ۴(۳۲) = ۱۲۸.$$

حال فرض‌کنیم $n>1$ و $A$ ماتریسی $n\times n$ بر روی $K$ باشد. در قضیهٔ ۱ با مفروض بودن تابع دترمینان روی ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ نشان دادیم که یك تابع دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ چگونه ساخته می‌شود. حال که یکتایی تابع دترمینان را ثابت کرده‌ایم، فرمول (۵-۴) مطلب زیر را بیان می‌کند. اگر هر نمایهٔ ستونی دلخواه $j$ را ثابت نگاهداریم.

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\det A(i|j).$$

اسکالر $(-1)^{i+j}\det A(i|j)$ معمولاً **همسازهٔ** $i$ و $j$ ماتریس $A$ یا همسازهٔ درایهٔ $i$ و $j$ ماتریس $A$ نامیده می‌شود. در این صورت، فرمول فوق برای $\det A$ بسط $\det A$ به‌وسیلهٔ همسازه‌های ستون $j$م (یا گاهی بسط به‌وسیلهٔ کهادهای ستون $j$م) نامیده می‌شود. اگر بنویسیم

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A(i|j)$$

آنگاه از فرمول فوق برمی‌آید که به‌ازای هر $j$

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}C_{ij}.$$

دراینجا همسازهٔ $C_{ij}$، $(-1)^{i+j}$ برابر دترمینان ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ حاصل از حذف سطر $i$م و ستون $j$م ماتریس $A$ است.

اگر $j\neq k$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}A_{ik}C_{ij}=0.$$

زیرا، اگر $k$مین ستون $A$ را جایگزین $j$مین ستون آن بکنیم، وماتریس حاصل را $B$ بنامیم، آنگاه $B$ دارای دو ستون متساوی است و لذا $\det B=0$. چون $B(i|j)=A(i|j)$، داریم

$$\begin{aligned}0&=\det B\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}B_{ij}\det B(i|j)\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ik}\det A(i|j)\\&=\sum_{i=1}^{n}A_{ik}C_{ij}.\end{aligned}$$

این خواص همسازه‌ها را می‌توان به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = \delta_{jk} \det A \qquad (۵-۲۱)$$

خلاصه کرد.

ماتریس $n\times n$، $\mathrm{adj}A$، که ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های $A$ است، **الحاقی کلاسیك** $A$ نامیده می‌شود. بدین نحو

$$(\mathrm{adj}A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} \det A(j|i). \qquad (۵-۲۲)$$

فرمول (۵-۲۱) را می‌توان در معادلهٔ ماتریسی

$$(\mathrm{adj}A)A = (\det A)I \qquad (۵-۲۳)$$

خلاصه کرد.

حال مایلیم که تساوی $A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I$ را هم اثبات کنیم. چون $A^t(i|j) = A(j|i)^t$، داریم

$$(-1)^{i+j} \det A^t(i|j) = (-1)^{j+i} \det A(j|i)$$

که به‌طور ساده بیانگر این مطلب است که همسازهٔ $i, j$ ماتریس $A^t$ همان همسازهٔ $j, i$، $A$ است. بنابراین

$$\mathrm{adj}(A^t) = (\mathrm{adj}A)^t. \qquad (۵-۲۴)$$

با به‌کار بستن (۵-۲۳) بر $A^t$، به‌دست می‌آوریم

$$(\mathrm{adj}A^t)A^t = (\det A^t)I = (\det A)I$$

و با ترانهش آن داریم

$$A(\mathrm{adj}A^t)^t = (\det A)I.$$

حال با استفاده از (۵-۲۴) به آنچه که می‌خواستیم دست می‌یابیم:

$$A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I. \qquad (۵-۲۵)$$

نظیر مورد ماتریسهای بر روی هیأتها، ماتریس $n\times n$ ی $A$ بر روی $K$، **معکوس‌پذیر بر روی** $K$ نامیده می‌شود هرگاه ماتریسی $n\times n$ چون $A^{-1}$ با درایه‌های متعلق به $K$ یافت شود به‌طوری که $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. اگر چنین ماتریس معکوسی موجود باشد، یکتاست؛ زیرا، همان برهانی که در فصل ۱ به‌کار رفت نشان می‌دهد که اگر $BA = AC = I$، آنگاه $B = C$. فرمولهای (۵-۲۳) و (۵-۲۵)، در بارهٔ معکوس‌پذیری ماتریسهای بر روی $K$ مطالب زیر را به‌دست می‌دهند. اگر عنصر $\det A$ در $K$ معکوس ضربی داشته باشد، آنگاه $A$ معکوس‌پذیر است و $A^{-1} = (\det A)^{-1}\mathrm{adj}A$ یکتا معکوس $A$ است. بعکس، بسادگی دیده می‌شود که اگر $A$ بر روی $K$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $\det A$ در $K$ معکوس‌پذیر است. زیرا، اگر $BA = I$، داریم

$$1 = \det I = \det(AB) = (\det A)(\det B).$$

حاصل آنچه که ثابت کرده‌ایم قضیهٔ زیر است.

**قضیهٔ ۴.** فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ بر روی $K$ باشد. در این صورت $A$ بر روی $K$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det A$ در $K$ معکوس‌پذیر باشد. وقتی $A$ معکوس‌پذیر باشد، یکتا معکوس $A$ عبارت است از

$$A^{-1}=(\det A)^{-1}\operatorname{adj}A.$$

بخصوص، هرماتریس $n\times n$ بر روی یك هیأت، معکوس‌پذیر است اگرو تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

باید خاطرنشان کنیم که این معیار دترمینانی برای معکوس‌پذیری، ثابت می کند که هر ماتریس $n\times n$ با معکوسی چپ یا راست، معکوس‌پذیر است. این اثبات کاملاً مستقل از اثباتی است که در فصل ۱ برای ماتریسهای بر روی هیأتها ارائه کردیم. مایلیم مفهوم معکوس‌پذیری ماتریسهای با درایه‌های چندجمله‌ای را نیز خاطرنشان کنیم. اگر $K$ حلقهٔ چندجمله‌ای $F[x]$ باشد، تنها عناصری از $K$ که معکوس‌پذیر هستند، عبارتند از چندجمله‌ایهای اسکالری غیر صفر؛ زیرا، اگر $f$ و $g$ دو چندجمله‌ای با شرط $fg=1$ باشند داریم $\deg f+\deg g=0$، پس $\deg f=\deg g=0$؛ یعنی، $f$ و $g$ دو چندجمله‌ای اسکالری هستند. از این‌رو، هر ماتریس $n\times n$ بر روی حلقهٔ چندجمله‌ای $F[x]$، بر روی $F[x]$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن یك چندجمله‌ای اسکالری غیر صفر باشد.

**مثال ۷.** فرض کنیم $K=R[x]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای بر روی هیأت اعداد حقیقی باشد. اگر

$$A=\begin{bmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{bmatrix}$$

آنگاه، با یك محاسبهٔ کوتاه، داریم $\det A=x+1$ و $\det B=-6$. از این‌رو، $A$ بر روی $K$ معکوس‌پذیر نیست، درحالی که $B$ بر روی $K$ معکوس‌پذیر است. توجه کنید که

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} 1 & -x-1 \\ -x+1 & x^2+x \end{bmatrix}, \quad \operatorname{adj}B=\begin{bmatrix} x & -x-2 \\ -x^2+2x-3 & x^2-1 \end{bmatrix},$$

$(\operatorname{adj}A)A=(x+1)I$ و $(\operatorname{adj}B)B=-6I$. بدیهی است که

$$B^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} x & -x-2 \\ -x^2+2x-3 & 1-x^2 \end{bmatrix}.$$

**مثال ۸.** فرض کنیم $K$ حلقهٔ اعداد صحیح باشد و

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}.$$

در این صورت $\det A = -۲$ و

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

از این رو، $A$ به‌عنوان یك ماتریس بر روی حلقهٔ اعداد صحیح، معکوس‌پذیـر نیست؛ با این وجود، می‌توانیم $A$ را به‌عنوان ماتریسی بر روی هیأت اعداد گویا نیزمحسوب کنیم، که در این صورت $A$ معکوس‌پذیر است و

$$A^{-۱}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}.$$

در رابطه با ماتریسهای معکوس‌پـذیـر، مایلیم بـه‌ذکـر حکم مقدماتی دیگری هم بپردازیم. ماتریسهای متشابه، دترمینانهای مساوی دارند؛ یعنی، اگر $P$ برروی $K$ معکوس‌پذیـر باشد و $B = P^{-۱}AP$، آنگاه $\det B = \det A$. این مطلب واضح است، زیرا

$$\det(P^{-۱}AP) = (\det P^{-۱})(\det A)(\det P) = \det A.$$

این مشاهدهٔ ساده، این امکان را به‌وجود می‌آورد که دترمینان هر عملگر خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی را تعریف کنیم. اگـر $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد، دترمینان $T$ را دترمینان هرماتریس $n\times n$ی تعریف می‌کنیم که نمایش $T$ در پایهٔ مرتبی از $V$ باشد. چون همهٔ این ماتریسها متشابـه هستند، دترمینانهای مساوی دارند و ایـن تعریف بامعنی است. در این باره به‌تمرین ۱۱ بخش ۳.۵ رجوع کنید.

حـال به بحث دربارهٔ **قاعدهٔ کرامر**[۱] برای حل دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم. فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ بر روی هیأت $F$ باشد، و بخواهیم دستگاه معادلات خطی $AX=Y$ رابه‌ازای $n$تایی مفروض $(y_۱,\dots,y_n)$ حل کنیم. اگر $AX=Y$، آنگاه

$$(\operatorname{adj} A)AX = (\operatorname{adj} A)Y$$

و بنابراین

$$(\det A)X = (\operatorname{adj} A)Y.$$

پس

---

1. Cramer

$$(\det A)x_j=\sum_{i=۱}^{n}(\mathrm{adj}A)_{ji}y_i$$
$$=\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+j}y_i\det A(i|j).$$

عبارت آخر همان دترمینان ماتریس $n\times n$ حاصل از جایگزینی $Y$ به جای $j$مین ستون $A$ است. اگر $\det A=۰$، از این مطالب چیزی معلوم نمی‌شود؛ اما، اگـر $\det A\neq ۰$ به قاعده‌ای دست می‌یابیم که به‌قاعدهٔ کرامرمشهوراست. گیریم $A$ یك ماتریس $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشد و $\det A\neq ۰$. اگـر $y_۱،\cdots،y_n$ اسکالرهایـی از $F$ باشند، یکتا جواب $X=A^{-۱}Y$ از دستگاه معادلات $AX=Y$ به‌صورت

$$x_j=\frac{\det B_j}{\det A},\quad j=۱,\cdots,n$$

به‌دست می‌آید. در اینجا $B_j$ ماتریس $n\times n$ حاصل از جایگـزینی $Y$ به‌جای $j$مین ستون ماتریس $A$ است.

در خاتمهٔ این بخش، علاقه‌مندیم به‌چند توضیح کـه به‌اعتقاد ما بـه‌نمایاندن چهرهٔ واقعی دترمینان کمك می‌کنند، بپردازیم. گه‌گاه لازم است دترمینانهای مشخصی را محاسبه کنیم، و لذا جزئی از ایـن بخش را بـه روشهایی‌که این محاسبات را آسان می‌سازند اختصاص دادیم. لکن، نقش اصلی دترمینان در این‌کتاب، هرچند زیبایی احکامی همچون قاعدهٔ کرامرانکارناپذیراست، نظری است. اما، قاعدهٔ کرامرعمدتاً به‌این‌علت که‌خود درگیر محاسبات‌بسیاری‌است، وسیلهٔ مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی نیست. لذا باید فکرخود را برآنچه‌که قاعدهٔ‌کرامر بیان می‌کند متمرکز سازیم تا برچگونگی محاسبه با آن. در واقع، امیدواریم که‌خواننده‌ضمن‌تفکرروی تمامی این فصل، تأکید بیشتری بردرك مفهوم‌دترمینان‌وچگونگی‌رفتارآن‌داشته‌باشد تا برچگونگی‌محاسبهٔ دترمینان‌ماتریسهای‌معین.

## تمرین

۱. از فرمول الحاقی‌کلاسیك برای محاسبهٔ معکوس هـر یك از ماتریسهای حقیقی ۳×۳ زیر استفاده کنید.

$$\begin{bmatrix}-۲ & ۳ & ۲\\ ۶ & ۰ & ۳\\ ۴ & ۱ & -۱\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\cos\theta & ۰ & -\sin\theta\\ ۰ & ۱ & ۰\\ \sin\theta & ۰ & \cos\theta\end{bmatrix}$$

۲. قاعدهٔ کرامر را برای حل هر یك از دستگاه معادلات خطی زیر بر روی هیأت اعداد گویا به‌کار گیرید.

$$\begin{aligned} x+y+z&=۱۱ \\ ۲x-۶y-z&=۰ \\ ۳x+۴y+۲z&=۰ \end{aligned}$$ (الف)

$$\begin{aligned} ۳x-۲y&=۷ \\ ۳y-۲z&=۶ \\ ۳z-۲x&=-۱ \end{aligned}$$ (ب)

۰۳. ماتریس $n\times n$ ی $A$ بر روی هیأت $F$ **متقارن‌کج** است هرگاه $A^t=-A$. اگر $A$ یك ماتریس $n\times n$ متقارن‌کج با درایه‌های مختلط باشد و $n$ عددی فرد، ثابت کنید $\det A=۰$.

۰۴. ماتریس $n\times n$ ی $A$ بر روی هیأت $F$ **متعامد** نامیده می‌شود هرگاه $AA^t=I$. اگر $A$ متعامد باشد، نشان دهید $\det A=\pm ۱$. یك ماتریس متعامد مثال بزنید که به‌ازای آن $\det A=-۱$.

۰۵. ماتریس $n\times n$ ی $A$ بر روی هیأت اعدادمختلط را **یکانی** خوانیم هرگاه $AA^*=I$ ($A^*$ نمایشگر ترانهادهٔ مزدوج $A$ است). اگر $A$ یکانی باشد، نشان دهید که $|\det A|=۱$.

۰۶. فرض کنید $T$ و $U$ دو عملگر خطی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ باشند. ثابت کنید

(الف) $\det(TU)=(\det T)(\det U)$؛

(ب) $T$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det T\neq ۰$.

۰۷. فرض کنید $A$ ماتریسی $n\times n$ بر روی $K$ که حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی است، باشد. فرض کنید $A$ صورت بلوکی

$$A=\begin{bmatrix} A_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & A_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

را داشته باشد. در اینجا $A_j$ ماتریسی $r_j\times r_j$ است. ثابت کنید

$$\det A=(\det A_۱)(\det A_۲)\cdots(\det A_k).$$

۸ . گیریم $V$ فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت $F$ باشد. فرض کنید $B$ عنصر ثابتی از $V$، و $T_B$ عملگر خطی روی $V$ تعریف‌شده توسط $T_B(A)=AB-BA$ باشد. نشان دهید $\det T_B=0$.

۹ . ماتریس $A$ ی $n\times n$، بر روی هیأتی مفروض است و $A\neq 0$. اگر $r$ عدد صحیح مثبت دلخواهی بین ۱ و $n$ باشد، یک **زیرماتریس** $r\times r$ از $A$ عبارت است از ماتریس $r\times r$ حاصل از حذف $(n-r)$ سطر و $(n-r)$ ستون از $A$. **رتبهٔ دترمینانی** $A$ بزرگترین عدد صحیح مثبت $r$ است که زیرماتریسی $r\times r$ از $A$ دارای دترمینان غیر صفر باشد. ثابت کنید درتبهٔ دترمینانی $A$ برابر رتبهٔ سطری $A$ ( = رتبهٔ ستونی $A$) است.

۱۰. اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ بر روی هیأت $F$ باشد، ثابت کنید حداکثر $n$ اسکالر متمایز $c$ در $F$ وجود دارد که $\det(cI-A)=0$.

۱۱. دو ماتریس $n\times n$، $A$ و $B$ بر روی هیات $F$ داده شده‌اند. نشان دهید که اگر $A$ معکوس‌پذیر باشد، حداکثر $n$ اسکالر $c$ در $F$ وجود دارد که به‌ازای آنها ماتریس $cA+B$ معکوس‌پذیر نیست.

۱۲. اگر $V$ فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ بر روی $F$ و $B$ ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی $F$ باشد، فرض کنید $L_B$ و $R_B$ دو عملگر خطی روی $V$ باشند که با $R_B(A)=AB$ و $L_B(A)=BA$ تعریف می‌شوند. نشان دهید

(الف) $\det L_B=(\det B)^n$

(ب) $\det R_B=(\det B)^n$.

۱۳. فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط و $B$ ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی $C$ باشد. عملگر خطی $M_B$ روی $V$ را توسط $M_B(A)=BAB^*$، که در آن $B^*=\overline{B^t}$، تعریف می‌کنیم. نشان دهید

$$\det M_B=|\det B|^{2n}.$$

حال فرض کنید $H$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای هرمیتی در $V$ باشد؛ $A$ هرمیتی است هرگاه $A=A^*$. در این صورت $H$ فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی است. نشان دهید تابع $T_B$ تعریف شده توسط $T_B(A)=BAB^*$ عملگری خطی روی فضای برداری حقیقی $H$ است، وسپس نشان دهید $\det T_B=|\det B|^{2n}$. (راهنمایی: در محاسبهٔ $\det T_B$، نشان دهید $V$ دارای پایه‌ای متشکل ازماتریسهای هرمیتی است، و سپس نشان دهید $\det T_B=\det M_B$.)

۱۴. فرض کنید $A$، $B$، $C$، و $D$ ماتریسهای $n\times n$ جابجا شونده‌ای بر روی هیأت $F$

باشند. نشان دهید دترمینان ماتریس $2n \times 2n$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

برابر $\det(AD-BC)$ است.

## ۵.۵. مدول

اگر $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد، هر مدول بر روی $K$ دستگاهی جبری است که مانندفضای برداری عمل می‌کند ودرآن $K$ نقش هیأت اسکالرها را برعهده دارد. به‌طور دقیق، گوییم $V$ **یك مدول بر روی $K$** (یا یك **$K$-مدول**) است، هرگاه

۱. عملی به‌نام جمع: $(\alpha, \beta) \to \alpha+\beta$ روی $V$ یافت شود به‌طوری‌که تحت آن $V$ گروهی جابجایی باشد

۲. عملی به‌نام ضرب: $(c, \alpha) \to c\alpha$ ازعناصر $\alpha$ در $V$ و $c$ در $K$ موجودباشدکه

$$(c_1+c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$$
$$c(\alpha_1+\alpha_2) = c\alpha_1 + c\alpha_2$$
$$(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$$
$$1\alpha = \alpha.$$

برای منظورما، مهمترین $K$-مدولها، مدولهای $n$تایی $K^n$ هستند، هرچندمدولهای ماتریسی $K^{n\times n}$ نیز مهم‌اند. اگر $V$ مدول دلخواهی باشد، عیناً به‌همان نحوکه در مورد فضای برداری عمل‌کردیم می‌توانیم ازترکیبات خطی، وابستگی خطی، و استقلال خطی صحبت کنیم. باید مواظب باشیم نتایجی از فضاهای برداری را که به عمل تقسیم بر اسکالرهای غیرصفروابسته‌اند، یعنی‌اعمالی‌که به‌هیأت مربوط‌اند و ممکن است حلقهٔ $K$ فاقد آنها باشد، در مورد $V$ به کار نبندیم. مثلاً، اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ وابستهٔ خطی باشند، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که یکی از $\alpha_i$ها ترکیبی خطی از بقیهٔ آنهاست. این مطلب یافتن پایه در مدول را مشکل‌تر می‌سازد.

یك **پایه** برای مدول $V$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی است‌که مدول را پدیدمی‌آورد (یا تولید می‌کند). این همان تعریفی است که در مورد فضای برداری هم ارائه‌کردیم. خاصیت مهم پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ این است که هر عنصر $V$ را می‌توان به طور یکتا به صورت ترکیبی خطی از(تعدادی متناهی از) عناصر $\mathcal{B}$ بیان‌کرد. اگردر ریاضیات اصل انتخاب (ر. ك. پیوست) پذیرفته شود، می‌توان نشان دادکه هر فضای برداری دارای‌پایه است. خواننده بخوبی‌آگاه است‌که در هر فضای برداری دلخواهی‌که توسط تعدادی متناهی بردار پدیدآید، پایه هم وجود دارد. اما، برای مدول وضعیت چنین نیست. از

این‌رو، برای مدولهایی که پایه دارند، و نیز برای مدولهایی که توسط تعدادی متناهی عنصر پدید می‌آیند، نیاز به‌نامهای خاصی داریم.

**تعریف.** $K$-مدول $V$، یك **مدول آزاد** نامیده می‌شود، هرگاه دارای پایه باشد. اگر $V$ دارای پایه‌ای متناهی شامل $n$ عنصر باشد، آنگاه $V$ یك **$K$-مدول آزاد با $n$ مولد** نامیده می‌شود.

**تعریف.** مدول $V$ **به‌طور متناهی تولید می‌شود** هرگاه شامل زیر مجموعه‌ای متناهی باشد که $V$ را پدید آورد. **رتبهٔ** مدولی که به طور متناهی تولید بشود کوچکترین عدد صحیح مثبت $k$ است که $V$ توسط $k$ عنصر پدید آید.

تکرار می‌کنیم که ممکن است مدولی به‌طور متناهی تولید بشود، بدون‌آنکه پایه‌ای متناهی داشته باشد. اگر $V$، $K$-مدول آزادی با $n$ مولد باشد، آنگاه $V$ با مدول $K^n$ یکریخت است. اگر $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد، یك یکریختی که بردار $c_1\beta_1+\cdots+c_n\beta_n$ را به روی $n$تایی $(c_1, \ldots, c_n)$ از $K^n$ بفرستد، وجود دارد. فوراً دیده نمی‌شود که مدول $V$ نمی‌تواند مدولی آزاد با $k$ مولد با شرط $k\neq n$ باشد. به بیان دیگر، واضح نیست که تعداد عناصر هر دو پایهٔ دلخواه $V$ باید لزوماً مساوی باشند. اثبات این حقیقت بر اساس کاربرد جالبی از دترمینانهاست.

**قضیهٔ ۵.** فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. اگر $V$ یك $K$-مدول آزاد با $n$ مولد باشد، آنگاه رتبهٔ $V$ برابر $n$ است.

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم که $V$ نمی‌تواند توسط تعدادی کمتر از $n$ عنصر از خودش پدید آید. چون $V$ با $K^n$ یکریخت است، باید نشان دهیم که اگر $m<n$، مدول $K^n$ توسط $n$تاییهای $\alpha_1، \ldots، \alpha_m$ پدید نمی‌آید. ماتریس $A$ با سطرهای $\alpha_1، \ldots، \alpha_n$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم هر یك از بردارهای $\epsilon_1، \ldots، \epsilon_n$ از پایهٔ استانده ترکیبی خطی از $\alpha_1، \ldots، \alpha_m$ باشد. در این صورت ماتریسی چون $P$ در $K^{n\times m}$ وجود دارد که

$$PA=I.$$

دراینجا $I$ ماتریس همانی $n\times n$ است. گیریم $\tilde{A}$ ماتریس $n\times n$ حاصل ازافزودن $n-m$ سطر ۰ درزیرسطرهای $A$ باشد و $\tilde{P}$ ماتریس $n\times n$ دلخواهی که ستونهای $P$ را به‌عنوان $n$ ستون اول خود دارد. در این صورت

$$\tilde{P}\tilde{A}=I.$$

بنابراین، $\det \tilde{A}\neq 0$. اما چون $m<n$ درایه‌های اقلاً یك سطر $\tilde{A}$ همه صفرند. این تناقض نشان می‌دهد که $\alpha_1، \ldots، \alpha_m$ مدول $K^n$ را پدید نمی‌آورند. □

توجه به این نکته مهم است که قضیهٔ ۵ یکتایی بعد هر فضای برداری (با بعدمتناهی)

را ثابت می‌کند. این اثبات که بر وجود تابع دترمینان استوار است با اثباتی که در فصل ۲ عرضه کردیم کاملاً متفاوت است. از قضیهٔ ۵ بر می‌آید که «مدول آزاد از رتبهٔ $n$» با «مدول آزاد با $n$ مولد» یکی است.

اگر $V$ مدولی بر روی $K$ باشد، **مدول دوگان** $V^*$ متشکل است ازهمهٔ توابع خطی $f$ از $V$ در $K$. اگر $V$ مدول آزادی از رتبهٔ $n$ باشد، آنگاه $V^*$ نیز مدولی آزاد از رتبهٔ $n$ است. اثبات این مطلب عیناً همان اثبات درموردفضاهای برداری است. اگر $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد، **پایهٔ دوگان** وابسته‌ای چون $\{f_1,\cdots,f_n\}$ برای مدول $V^*$ وجود دارد. تابع $f_i$ به‌هر $\alpha$ از $V$، $i$مین مختصش نسبت به $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ را تخصیص می‌دهد:

$$\alpha=f_1(\alpha)\beta_1+\cdots+f_n(\alpha)\beta_n$$

اگر $f$ تابعی خطی روی $V$ باشد، آنگاه

$$f=f(\beta_1)f_1+\cdots+f(\beta_n)f_n.$$

## ۶.۵. تابع چند خطی

هدف این بخش بیان بحث دترمینان درقالبی است که به‌اعتقاد ما چهرهٔ واقعی دترمینان را می‌نمایاند. برای این منظور، فرمهای چند خطی متناوب روی مدولها را مورد بحث قرار می‌دهیم. این فرمها تعمیم طبیعی دترمینان، آن طور که ما آن را عرضه کردیم، هستند. خواننده‌ای هم که شرح مختصر مدولها در بخش ۵.۵ را نخوانده باشد (یا مایل نباشد که بخواند) نیزمی‌تواند این بخش را با بهره‌وری مطالعه کند مشروط براین که «فضای برداری بر روی $F$ با بعد $n$» را همواره به‌جای «مدول آزاد بر روی $K$ از رتبهٔ $n$» منظور کند.

فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی و $V$ مدولی بر روی $K$ باشد. اگر $r$ عدد صحیح مثبتی باشد، تابع $L$ از $V^r=V\times V\times\cdots\times V$ در $K$ **چند خطی** نامیده می‌شود، هرگاه $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ به‌عنوان تابعی از هر $\alpha_i$، وقتی $\alpha_j$های دیگر ثابت نگه داشته شوند، خطی باشد؛ یعنی، هرگاه به‌ازای هر $i$

$$L(\alpha_1,\cdots,c\alpha_i+\beta_i,\cdots,\alpha_r)=cL(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_r)+L(\alpha_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\alpha_r).$$

یك تابع چند خطی روی $V^r$ یك **فرم $r$ خطی** روی $V$، یا یك **فرم چند خطی از درجهٔ $r$** روی $V$ نیز نامیده می‌شود. به‌چنین تابعی گاهی یك **$r$ـ تانسور** روی $V$ نیز گفته می‌شود. دستهٔ همهٔ توابع چند خطی روی $V^r$ با $M^r(V)$ نشان داده می‌شود. اگر $L$ و $M$ در $M^r(V)$ باشند، آنگاه مجموع $L+M$، که به‌این صورت تعریف می‌شود:

$$(L+M)(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+M(\alpha_1,\cdots,\alpha_r),$$

نیز چند خطی است؛ و اگر $c$ عنصری از $K$ باشد، حاصل ضرب $cL$، که به‌این صورت

تعریف می‌شود:

$$(cL)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \cdots, \alpha_r),$$

نیزچندخطی‌است. بنابراین، $M^r(V)$ یك $K$-مدول (زیرمدولی ازمدول همهٔ توابع از $V^r$ در $K$) است.

اگر $r=1$، داریم $M^1(V)=V^*$ که همان مدول دوگان توابع خطی روی $V$ است. از توابع خطی نیز می‌توان برای ساختن مثالهایی از فرمهای چندخطی از مراتب بالاتراستفاده کرد. اگر $f_1$، ...، $f_r$ توابعی خطی روی $V$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2) \cdots f_r(\alpha_r).$$

واضح است که $L$ فرمی $r$خطی روی $V$ است.

**مثال ۹.** اگر $V$ مدول باشد، یك فرم ۲خطی روی $V$ معمولاً یك **فرم دوخطی** روی $V$ نامیده می‌شود. فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به $K$ باشد. در این‌صورت

$$L(X, Y) = Y^t AX$$

فرم دوخطی $L$ را روی مدول $K^{n\times 1}$ تعریف می‌کند. به‌طور مشابه

$$M(\alpha, \beta) = \alpha A \beta^t$$

فرم دوخطی $M$ را روی $K^n$ تعریف می‌کند.

**مثال ۱۰.** تابع دترمینان به‌هرماتریس $A$ی $n\times n$ عنصر $\det A$ از $K$ را مربوط می‌سازد. اگر $\det A$ به‌عنوان تابعی ازسطرهای $A$ درنظر گرفته شود:

$$\det A = D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

آنگاه $D$فرمی $n$خطی روی $K^n$ است.

**مثال ۱۱.** به‌دست‌آوردن عبارتی جبری برای فرم $r$خطی نوعی، روی مدول $K^n$ آسان است. اگر $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ بردارهایی از $V$ و $A$ ماتریسی $r\times n$ با سطرهای $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ باشد، آنگاه به‌ازای هرتابع $L$ از $M^r(K^n)$

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = L\left(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}\epsilon_j, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} A_{1j} L(\epsilon_j, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} A_{1j} L\left(\epsilon_j, \sum_{k=1}^{n} A_{2k}\epsilon_k, \cdots, \alpha_r\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{1j}A_{2k} L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \cdots, \alpha_r)$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} A_{1j}A_{2k} L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \cdots, \alpha_r).$$

اگر به‌جای $\alpha_3$، ...، $\alpha_r$ به‌نوبت برابرهایشان برحسب ترکیبات خطی بردارهای پایهٔ استانده را قراردهیم و $A(i, j)$ را به‌جای $A_{ij}$ بنویسیم، فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \sum_{j_1, \cdots, j_r = 1}^{n} A(1, j_1) \cdots A(r, j_r) L(\epsilon_{j_1}, \cdots, \epsilon_{j_r}). \tag{۵-۲۶}$$

در (۵-۲۶) به‌ازای هر $r$تایی مانند $J = (j_1, \cdots, j_r)$ از اعداد صحیح مثبت بین ۱ و $n$، یك جمله وجود دارد. تعداد این نوع $r$تایی‌ها برابر $n^r$ است. پس، $L$ کاملاً توسط (۵-۲۶) و مقادیرخاص:

$$c_J = L(\epsilon_{j_1}, \cdots, \epsilon_{j_r})$$

تخصیص یافته به $n^r$ عنصر $(\epsilon_{j_1}, \cdots, \epsilon_{j_r})$ تعیین می‌شود. همچنین بآسانی دیده می‌شود که اگر به‌ازای هر $r$تایی مانند $J$ عنصری چون $c_J$ از $K$ را انتخاب کنیم، آنگاه

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \sum_J A(1, j_1) \cdots A(r, j_r) c_J \tag{۵-۲۷}$$

فرمی $r$خطی روی $K^n$ تعریف می‌کند.

فرض کنیم $L$ تابعی چندخطی روی $V^r$ باشد و $M$ تابعی چند خطی روی $V^s$. تابع $L \otimes M$ روی $V^{r+s}$ را با

$$(L\otimes M)(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r+s}) = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) M(\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_{r+s}) \tag{۵-۲۸}$$

تعریف می‌کنیم. اگر تصورمان از $V^{r+s}$ همان $V^r \times V^s$ باشد، آنگاه به‌ازای $\alpha$ در $V^r$ و $\beta$ در $V^s$

$$(L\otimes M)(\alpha, \beta)=L(\alpha)M(\beta).$$

واضح است که $L\otimes M$ روی $V^{r+s}$ چندخطی است. تابع $L\otimes M$ **ضرب تانسوری** $L$ و $M$ نامیده می‌شود. ضرب تانسوری جابجایی نیست. درواقع، $M\otimes L\neq L\otimes M$ مگرآنکه $L=0$ یا $M=0$؛ با این وجود، ضرب تانسوری به‌طور مطلوبی با اعمال مدولی در $M^r$ و $M^s$ مربوط است.

**لم.** فرض کنیم $L$ و $L_1$ فرمهایی $r$خطی روی $V$، $M$ و $M_1$ فرمهایی $s$ خطی روی $V$، و $c$ عنصری از $K$ باشد.

(الف) $(cL+L_1)\otimes M=c(L\otimes M)+L_1\otimes M$

(ب) $L\otimes(cM+M_1)=c(L\otimes M)+L\otimes M_1$.

اثبات. تمرین.

ضرب تانسوری شرکت‌پذیراست؛ یعنی، اگر $L$، $M$، و $N$ (بترتیب) فرمهایی $r$، $s$، و $t$خطی روی $V$ باشند، آنگاه

$$(L\otimes M)\otimes N=L\otimes(M\otimes N).$$

این مطلب نتیجه‌ای آنی از این واقعیت است که عمل ضرب در $K$ شرکت‌پذیر است. بنابراین، اگر $L_1$، $L_2$، ...، $L_k$ توابعی چندخطی روی $V^{r_1}$، ...، $V^{r_k}$ باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L=L_1\otimes \cdots \otimes L_k$$

به‌عنوان تابعی چندخطی روی $V^r$ که درآن $r=r_1+\cdots+r_k$، بدون ابهام تعریف می‌شود. قبلاً حالت خاصی از این را ذکر کردیم. اگر $f_1$، ...، $f_r$ توابعی خطی‌روی $V$ باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L=f_1\otimes \cdots \otimes f_r$$

توسط

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)=f_1(\alpha_1) \cdots f_r(\alpha_r)$$

تعریف می‌شود.

**قضیهٔ ۶.** فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. اگر $V$ یك $K$-مدول‌آزاد از رتبهٔ $n$ باشد، آنگاه $M^r(V)$ یك $K$-مدول آزاد از رتبهٔ $n^r$ است؛ درواقع، اگر $\{f_1, \cdots, f_n\}$ پایه‌ای برای مدول دوگان $V^*$ باشد، آنگاه $n^r$ ضرب تانسوری

$$f_{j_1}\otimes \cdots \otimes f_{j_r}, \quad 2\leqslant j_1\leqslant n, \cdots, 1\leqslant j_r\leqslant n$$

پایه‌ای برای $M^r(V)$ تشکیل می‌دهند.

اثبات. فرض‌کنیم $\{f_1, \cdots, f_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V^*$ باشدکه دوگان پایهٔ

$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ از $V$ است. به‌ازای هر بردار $\alpha$ از $V$، داریم

$$\alpha = f_1(\alpha)\beta_1 + \cdots + f_n(\alpha)\beta_n.$$

اکنون به‌محاسبه‌ای نظیر آنچه در مثال ۱۱ انجام شد می‌پردازیم. اگر $L$ فرمی $r$خطی روی $V$ و $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ عناصری از $V$ باشند، آنگاه بنابر (۵-۲۶)

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \sum_{j_1, \cdots, j_r} f_{j_1}(\alpha_1) \cdots f_{j_r}(\alpha_r) L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}).$$

به‌بیان دیگر،

$$L = \sum_{j_1, \cdots, j_r} L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}) f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r}. \tag{۵-۲۹}$$

این رابطه نشان می‌دهد که $n^r$ ضرب تانسوری

$$E_J = f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r} \tag{۵-۳۰}$$

که با $r$تاییهای $J = (j_1, \cdots, j_r)$ معین می‌شوند مدول $M^r(V)$ را پدید می‌آورند. بنابه‌دلیل زیر، $r$ فرمهای مختلف $E_J$ مستقل هستند. فرض‌کنیم به‌ازای هر $J$، عنصری‌چون $c_J$ در $K$ وجود داشته باشد و تابع چندخطی

$$L = \sum_J c_J E_J \tag{۵-۳۱}$$

را تشکیل داده باشیم. توجه‌کنید که اگر $I = (i_1, \cdots, i_r)$، آنگاه

$$E_J(\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}) = \begin{cases} 0, & I \neq J \\ 1, & I = J. \end{cases}$$

بنابراین از (۵-۳۱) مشاهده می‌شود که

$$c_I = L(\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}). \tag{۵-۳۲}$$

بخصوص، اگر $L = 0$، آنگاه به‌ازای هر $r$تایی $I$، $c_I = 0$. □

**تعریف.** فرض کنیم $L$ فرمی $r$خطی روی $K$-مدول $V$ باشد. گوییم $L$ **متناوب** است، درصورتی که وقتی $\alpha_i = \alpha_j$، به‌ازای $i \neq j$، آنگاه $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = 0$.

اگر $L$ تابع چندخطی‌متناوبی روی $V^r$ باشد، آنگاه

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_r) = -L(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_r).$$

به‌بیان دیگر، اگرجای دوبردار (با نمایه‌های مختلف) را در $r$تایی $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ تعویض کنیم، مقدار $L$ تغییر علامت می‌دهد. چون هرجایگشت $\sigma$ حاصل‌ضربی از ترانهشهاست، می‌بینیم که $L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r}) = (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$.

دستهٔ همهٔ فرمهای $r$خطی متناوب روی $V$ را با $\Lambda^r(V)$ نشان می‌دهیم. باید روشن باشدکه $\Lambda^r(V)$ زیرمدولی از $M^r(V)$ است.

**مثال۱۲.** قبلاً در این فصل نشان دادیم که روی مدول $K^n$، دقیقاً یك فرم $n$خطی متناوب $D$ باخاصیت $D(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = 1$ وجود دارد. همچنین درقضیهٔ ۲ نشان دادیم که اگر $L$ فرم دلخواهی از $\Lambda^n(K^n)$ باشد، آنگاه

$$L = L(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)D.$$

به‌عبارت دیگر، $\Lambda^n(K^n)$، $K$-مدولی آزاد از رتبهٔ ۱ است. گذشته از این، فرمول صریح (۵-۱۵) را برای $D$ به‌دست آوردیم. برحسب نمادی که جدیداً به‌کار می‌بریم، این‌فرمول را می‌توان به‌صورت

$$D = \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) f_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma n} \tag{۵-۳۳}$$

هم نوشت. دراینجا $f_1$، $\cdots$، $f_n$ توابع مختصی استانده روی $K^n$ هستند ومجموع برروی $n!$ جایگشت مختلف $\sigma$ ازمجموعهٔ $\{1, \cdots, n\}$ گسترش دارد. اگر دترمینان ماتریس $A$ را به‌صورت

$$\det A = \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) A(\sigma 1, 1) \cdots A(\sigma n, n)$$

بنویسیم، آنگاه عبارت متفاوتی برای $D$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) f_1(\alpha_{\sigma 1}) \cdots f_n(\alpha_{\sigma n}) \\ &= \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma n}) \end{aligned} \tag{۵-۳۴}$$

که در آن $L = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$.

یك روش عمومی برای مربوط ساختن فرمی متناوب به‌فرمی چندخطی وجوددارد. اگر $L$ فرمی $r$خطی روی مدول $V$ باشد و $\sigma$ جایگشتی از $\{1, \cdots, r\}$، با تعریف

$$L_\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r})$$

تابع $r$خطی دیگر $L_\sigma$ به‌دست می‌آید. اگر برحسب اتفاق $L$ متناوب باشد، آنگاه $L_\sigma = (\operatorname{sgn} \sigma)L$. اکنون، به‌ازای هر $L$ از $M^r(V)$ تابع $\pi_r L$ از $M^r(V)$ را بنابر

$$\pi_r L = \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) L_\sigma \tag{۵-۳۵}$$

تعریف می‌کنیم، بدین معنی که

$$(\pi_r L)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r}). \tag{۵-۳۶}$$

**لم.** $\pi_r$ تبدیلی خطی از $M^r(V)$ در $\Lambda^r(V)$ است. اگر $L$ در $\Lambda^r(V)$ باشد، آنگاه $\pi_r L = r!L$.

**اثبات.** فرض کنیم $\tau$ جایگشت دلخواهی از $\{1, \cdots, r\}$ باشد. دراین‌صورت

$$(\pi_r L)(\alpha_{\tau 1}, \cdots, \alpha_{\tau r}) = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) L(\alpha_{\tau\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\tau\sigma r})$$
$$= (\operatorname{sgn}\tau)\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\tau\sigma) L(\alpha_{\tau\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\tau\sigma r}).$$

اگر $\sigma$ همهٔ جایگشتهای $\{1, \cdots, r\}$ را (یکبار) احراز کند، $\tau\sigma$ نیز چنین می‌کند. بنابراین،

$$(\pi_r L)(\alpha_{\tau 1}, \cdots, \alpha_{\tau r}) = (\operatorname{sgn}\tau)(\pi_r L)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r),$$

و لذا، $\pi_r L$ فرمی متناوب است.

اگر $L$ در $\Lambda^r(V)$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $\sigma$ داریم

$$L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r}) = (\operatorname{sgn}\sigma) L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r);$$

از این‌رو، $\pi_r L = r!L$. □

در (۵-۳۳) نشان دادیم که تابع دترمینان $D$ از $\Lambda^n(K^n)$ عبارت است از

$$D = \pi_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n).$$

دراینجا $f_1$، ...، $f_n$ توابع مختصی استانده روی $K^n$ هستند. دربارهٔ آخرین لم، نکتهٔ مهمی هست که باید آن را متذکر شویم. اگر $K$ هیأتی با سرشت‌نمای صفر و $r!$ در $K$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $\pi$ فضای $M^r(V)$ را به‌روی $\Lambda^r(V)$ می‌نگارد. در واقع، دراین حالت به‌کاربردن نگاشت $\pi_1 = (1/r!)\pi$ به‌جای $\pi$ ازیك دیدگاه، طبیعی‌تر است، زیرا $\pi_1$ نگاشتی تصویری از $M^r(V)$ به‌روی $\Lambda^r(V)$ است؛ یعنی، نگاشتی است خطی از $M^r(V)$ به‌روی $\Lambda^r(V)$ با این خاصیت که $\pi_1(L) = L$ اگروتنها اگر $L$ در $\Lambda^r(V)$ باشد.

**قضیهٔ ۷.** فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی و $V$، $K$-مدول‌آزادی از رتبهٔ $n$ باشد. اگر $r > n$، آنگاه $\Lambda^r(V) = \{0\}$. اگر $1 \leqslant r \leqslant n$، آنگاه $\Lambda^r(V)$، $K$-مدول آزادی از رتبهٔ $\binom{n}{r}$ است.

**اثبات.** فرض کنیم $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ با پایهٔ دوگان $\{f_1, \cdots, f_n\}$ باشد. اگر $L$ در $M^r(V)$ باشد، داریم

$$L = \sum_J L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}) f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r} \qquad (۵\text{-}۳۷)$$

که درآن مجموع به‌ازای همهٔ $r$تاییهای $J = (j_1, \cdots, j_r)$ از اعداد صحیح بین ۱ و $n$ محاسبه می‌شود. اگر $L$ متناوب و دوتا از نمایه‌های $j_i$ مساوی باشند، آنگاه

$$L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}) = 0.$$

اگر $r>n$، آنگاه در هر $r$تایی مانند $J$ عددی صحیح باید تکرار بشود. از این‌رو، اگر $r>n$ آنگاه $\Lambda^r(V)=\{0\}$.

حال فرض می‌کنیم $1\leqslant r\leqslant n$. اگر $L$ در $\Lambda^r(V)$ باشد، مجموع در (۵-۳۷) لازم است تنها به‌ازای آن $r$تاییهای $J$ محاسبه شود که به‌ازای آنها $j_1$، ...، $j_r$ متمایز هستند؛ زیرا همهٔ جملات دیگر ۰ می‌باشند. هر $r$تایی از اعداد صحیح متمایز بین ۱ و $n$ جایگشتی از یك $r$ تایی $J=(j_1,\cdots,j_r)$، است کــه $j_1<\cdots<j_r$. این نوع خاص از $r$تاییها یك $r$-بُر از $\{1,\cdots,n\}$ نامیده می‌شود. تعداد چنین برهایی

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

است.

$r$-بر ثابت $J$ را درنظرمی گیریم. فرض‌کنیم $L_J$ مجموع همهٔ جملاتی از (۵-۳۷) باشد که با جایگشتهای بر $J$ متناظر هستند. اگــر $\sigma$ جایگشتی از $\{1,\cdots,r\}$ باشد، آنگاه

$$L(\beta_{j\sigma 1},\cdots,\beta_{j\sigma r})=(\operatorname{sgn}\sigma)L(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r}).$$

پس

$$L_J=L(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r})D_J \tag{۵-۳۸}$$

که در آن

$$D_J=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)f_{j\sigma 1}\otimes\cdots\otimes f_{j\sigma r} \tag{۵-۳۹}$$
$$=\pi_r(f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_r}).$$

از (۵-۳۹) درمی‌یابیم که همهٔ $D_J$ها متناوب هستند و به‌ازای هر $L$ در $\Lambda^r(V)$

$$L=\sum_{J\text{ برهای}}L(\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_r})D_J. \tag{۵-۴۰}$$

ادعا این است که $\binom{n}{r}$ فرم $D_J$ پایه‌ای برای $\Lambda^r(V)$ تشکیل می‌دهند. قبلاً دیده‌ایم کــه اینها $\Lambda^r(V)$ راپدید می‌آورند. بآسانی دیده می‌شود که این فرمها مستقل خطی هم‌هستند؛ زیرا، اگر برهای $I=(i_1,\cdots,i_r)$ و $J=(j_1,\cdots,j_r)$ داده شده باشند، آنگاه

$$D_J(\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r})=\begin{cases}1, & I=J\\ 0, & I\neq J\end{cases}. \tag{۵-۴۱}$$

حال فرض‌کنیم به‌ازای هربر، اسکالری چون $c_J$ داشته باشیم و

$$L=\sum_J c_J D_J$$

را تعریف کنیم. از (۵-۴۰) و (۵-۴۱) نتیجه می گیریم

$$c_I=L(\beta_{i_1},\ \cdots,\ \beta_{i_r}).$$

بخصوص، اگر $L=0$، آنگاه به‌ازای هر $I$ داریم $c_I=0$. □

**نتیجه.** اگر $V$، $K$-مدول آزادی از رتبهٔ $n$ باشد، آنگاه $\Lambda^n(V)$، $K$-مدولی آزاد از رتبهٔ ۱ است. اگر $T$ عملگری خطی $V$ باشد، عنصر یکتایی چون $c$ در $K$ یافت می‌شود که به‌ازای هرفرم $n$خطی متناوب $L$ روی $V$

$$L(T\alpha_1,\ \cdots,\ T\alpha_n)=cL(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

اثبات. اگر $L$ در $\Lambda^n(V)$ باشد، آنگاه بوضوح ضابطهٔ

$$L_T(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)=L(T\alpha_1,\ \cdots,\ T\alpha_n)$$

فرم $n$خطی متناوب $L_T$ راتعریف می کند. فرض کنیم $M$ مولدی برای $\Lambda^n(V)$،که مدولی از رتبهٔ یك است، باشد. هر $L$ در $\Lambda^n(V)$، به‌طور یکتا به‌صورت $L=aM$، به‌ازای یك $a$ در $K$، قابل بیان است. بویژه، به‌ازای $c$ معینی $M_T=cM$. برای $L=aM$ داریم

$$\begin{aligned}L_T&=(aM)_T\\&=aM_T\\&=a(cM)\\&=c(aM)\\&=cL.\ \square\end{aligned}$$

طبیعی‌است که‌عنصر $c$در نتیجهٔ اخیررا **دترمینان** $T$ بنامیم. در حالت $n=r$ (وقتی که تنها یك بـر $J=(1,\ \cdots,\ n)$ وجود دارد) از (۵-۳۹) نتیجه می‌شود که دترمینان $T$ برابر دترمینان ماتریسی است که $T$ را در هرپایهٔ مرتب $\{\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n\}$ نمایش دهد. ببینیم چرا. درایهٔ $i,\ j$ این ماتریس نمایش برابراست با

$$A_{ij}=f_j(T\beta_i),$$

ولذا

$$\begin{aligned}D_J(T\beta_1,\ \cdots,\ T\beta_n)&=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)A(1,\ \sigma1)\ \cdots\ A(n,\ \sigma n)\\&=\det A.\end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}D_J(T\beta_1,\ \cdots,\ T\beta_n)&=(\det T)D_J(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n)\\&=\det T.\end{aligned}$$

اهمیت این تذکرها دراین است که باکمك قضیهٔ ۷ ونتیجهٔ آن، تعریفی برای دترمینان عملگرهای خطی به‌دست می‌آوریم که بستگی به‌شناخت دترمینان ماتریسها ندارد. سپس می‌توانیم دترمینان ماتریسها را برحسب دترمینان عملگرها، به‌جای عکس این طریق، تعریف کنیم.

حال می‌خواهیم قدری بیشتر درمورد فرمهای $r$خطی متناوب خاص $D_J$، که در (۵-۳۹) آنها را به‌پایهٔ $\{f_1, \cdots, f_n\}$ برای $V^*$ مربوط ساختیم، گفتگو کنیم. درك این نکته مهم است که $D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ دترمینان ماتریس $r\times r$ معینی است. اگر

$$A_{ij}=f_j(\alpha_i), \qquad 1\leqslant i\leqslant r, \qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

یعنی، اگر

$$\alpha_i=A_{i1}\beta_1+\cdots+A_{in}\beta_n, \qquad 1\leqslant i\leqslant r$$

و $J$ بر $r$تایی $(j_1, \cdots, j_r)$ باشد، آنگاه

$$D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)A(1, j_{\sigma1})\cdots A(r, j_{\sigma r}) \tag{۵-۴۲}$$

$$=\det\begin{bmatrix}A(1, j_1) & \cdots & A(1, j_r)\\ A(r, j_1) & \cdots & A(r, j_r)\end{bmatrix}.$$

پس، $D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ برابر دترمینان ماتریسی $r\times r$ است که از ستونهای $j_1$، $\cdots$، $j_r$ ماتریسی $r\times n$ که ($n$تاییهای مختصات) $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_r$ را به‌عنوان سطرهای خود دارد، شکل می‌گیرد. نماد دیگری که گاهی برای این دترمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد، عبارت است از

$$D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)=\frac{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})}. \tag{۵-۴۳}$$

برمبنای این نماد، اثبات قضیهٔ ۷ نشان می‌دهد که هرفرم $r$خطی متناوب $L$ می‌تواند نسبت به‌پایه‌ای چون $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ توسط معادلهٔ

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)= \tag{۵-۴۴}$$

$$\sum_{j_1<\cdots<j_r}\frac{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})}L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})$$

بیان شود.

## ۷.۵. حلقهٔ گراسمان[1]

بسیاری از خواص مهم دترمینانها و فرمهای چندخطی متناوب، به‌بهترین‌وجه برحسب یك عمل ضرب روی فرمها، به‌نام ضرب خارجی، تشریح می‌شوند. اگر $L$ و $M$، بترتیب، فرمهای $r$ و $s$خطی متناوبی روی مدول $V$ باشند، آنگاه ضربی وابسته به $L$ و $M$، یعنی ضرب تانسوری $L\otimes M$، وجود دارد. ولی، این ضرب فرمی متناوب نیست، مگر آنکه $L=0$ یا $M=0$؛ با این وجود، راهی طبیعی برای تصویر این ضرب در $\Lambda^{r+s}(V)$ در دست هست. به‌نظرمی‌رسد که

$$L\cdot M=\pi_{r+s}(L\otimes M) \tag{۴۵-۵}$$

ضرب «طبیعی» فرمهای متناوب باشد. ولی، آیا این‌طور است؟

بیایید مثال خاصی را درنظر بگیریم. فرض‌کنیم $V$ مدول $K^n$، و $f_1$، ...، $f_n$ توابع مختصی استانده روی $K^n$ باشند. اگر $i\neq j$، آنگاه

$$f_i\cdot f_j=\pi_2(f_i\otimes f_j)$$

تابع (دترمینان)

$$D_{ij}=f_i\otimes f_j-f_j\otimes f_i$$

است که با (۵-۳۹) تعریف می‌شود. حال فرض‌کنیم $k$ نمایه‌ای متفاوت با $i$ و $j$ باشد.در این صورت

$$\begin{aligned} D_{ij}\cdot f_k&=\pi_3[(f_i\otimes f_j-f_j\otimes f_i)\otimes f_k]\\ &=\pi_3(f_j\otimes f_j\otimes f_k)-\pi_3(f_j\otimes f_i\otimes f_k). \end{aligned}$$

اثبات لم بعدازمعادلهٔ (۵-۳۶) نشان می‌دهد که به‌ازای هرفرم$r$خطی مانند $L$ وهرجایگشت $\sigma$ از $\{1, \ldots, r\}$،

$$\pi_r(L_\sigma)=\operatorname{sgn}\sigma\ \pi_r(L).$$

از این‌رو، $D_{ij}\cdot f_k=2\pi_3(f_i\otimes f_j\otimes f_k)$. با محاسبه‌ای مشابه

$$f_i\cdot D_{jk}=2\pi_3(f_i\otimes f_j\otimes f_k).$$

بنابراین داریم

$$(f_i\cdot f_j)\cdot f_k=f_i\cdot(f_j\cdot f_k).$$

تمام این مطالب بسیار نویددهنده به‌نظرمی‌رسند. اما گیری هم وجود دارد. با وجود محاسبه‌ای که هم‌اکنون به‌انجام رساندیم، به‌اصطلاح ضرب داده شده در(۵-۴۵) شرکت‌پذیر نیست. درواقع، اگر $l$ نمایه‌ای متفاوت با $i$، $j$ و $k$ باشد، آنگاه می‌توان با

---

1. Grassman

محاسبه‌ای نشان داد که

$$D_{ij} \cdot D_{kl} = 4\pi_4(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l)$$

و نیز

$$(D_{ij} \cdot f_k) \cdot f_l = 6\pi_4(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l).$$

پس عموماً

$$(f_i \cdot f_j) \cdot (f_k \cdot f_l) \neq [(f_i \cdot f_j) \cdot f_k] \cdot f_l$$

و می‌بینیم که اولین تلاش ما برای یافتن ضرب به‌عملی شرکت‌ناپذیر منجر شد.

اگر خواننده برای نشان‌دادن شرکت‌ناپذیری، ارائهٔ اثبات مستقیم دومعادله راامری نسبتاً ملال‌آور یابد نباید متعجب شود. خصلت موضوع این است، و اینکه وجود دستوری عمومی کار را به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند هم نمونه است.

فرض کنیم $L$ فرمی $r$خطی و $M$ فرمی $s$خطی روی مدول $V$ باشد. در این صورت

$$\pi_{r+s}((\pi_r L) \otimes (\pi_s M)) = \pi_{r+s}(\sum_{\sigma,\tau} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) L_\sigma \otimes M_\tau)$$
$$= \sum_{\sigma,\tau} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) \pi_{r+s}(L_\sigma \otimes M_\tau)$$

که‌درآن $\sigma$ برروی گروه متقارن $S_r$ متشکل‌ازهمهٔ‌جایگشتهای $\{1, \cdots, r\}$، و $\tau$ برروی $S_s$ تغییر می‌کند. هرجفت $\sigma$ و $\tau$، عنصر $(\sigma, \tau)$ از $S_{r+s}$ را به‌دست می‌دهد که $r$ عنصر اول $\{1, \cdots, r+s\}$ را طبق $\sigma$ و $s$ عنصرآخرآن را طبق $\tau$ جای می‌گرداند. روشن است که

$$\operatorname{sgn}(\sigma, \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau)$$

و

$$(L \otimes M)_{(\sigma,\tau)} = L_\sigma \otimes M_\tau.$$

بنابراین

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = \sum_{\sigma,\tau} \operatorname{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma,\tau)}].$$

اما، قبلا مشاهده کرده‌ایم که

$$\operatorname{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma,\tau)}] = \pi_{r+s}(L \otimes M).$$

از این‌رو، نتیجه می‌گیریم که

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = r!s! \pi_{r+s}(L \otimes M). \qquad (۴۶\text{-}۵)$$

این فرمول محاسبات چندی را ساده می‌کند. مثلاً، فرض کنیم یک $r$-بُر مانند $I = (i_1, \cdots, i_r)$، ویک $s$-بر مانند $J = (j_1, \cdots, j_s)$ در دست باشد. برای‌سادگی کار، همچنین فرض کنیم

www.riazisara.ir



$$i_1 < \cdots < i_r < j_1 < \cdots < j_s.$$

در این صورت توابع دترمینان وابسته

$$D_I = \pi_r(E_I)$$
$$D_J = \pi_s(E_J)$$

را که درآنها $E_I$ و $E_J$ توسط (۵-۳۰) تعیین می‌شوند، خواهیم داشت. با استفاده از (۵-۴۶) بلافاصله می بینیم که

$$D_I \cdot D_J = \pi_{r+s}[\pi_r(E_I) \otimes \pi_s(E_J)]$$
$$= r!s!\pi_{r+s}(E_I \otimes E_J).$$

چون $E_I \otimes E_J = E_{I \cup J}$، نتیجه می گیریم که

$$D_I \cdot D_J = r!s!D_{I \cup J}.$$

این فرمول حاکی است که شرکت‌ناپذیری ضرب (۵-۴۵)، از این واقعیت ناشی می‌شود که $D_I \cdot D_J \neq D_{I \cup J}$. گذشته‌ازهمهٔ اینها، حاصل‌ضرب $D_I$ و $D_J$ باید $D_{I \cup J}$ باشد. برای اصلاح وضع، لازم است ضرب جدیدی به‌نام **ضرب خارجی** (یا **ضرب گوه‌ای**) فرم $r$خطی متناوب $L$ و فرم $s$ خطی متناوب $M$ را به‌صورت

$$L \wedge M = \frac{1}{r!s!}\pi_{r+s}(L \otimes M) \qquad (۵\text{-}۴۷)$$

تعریف کنیم. در این صورت، برای توابع دترمینان روی $K^n$ داریم

$$D_I \wedge D_J = D_{I \cup J}$$

وانصاف این‌است که به‌ضرب صحیح فرمهای چندخطی متناوب دست یافته باشیم. متأسفانه، (۵-۴۷) برای عمومی‌ترین حالت تحت بررسی فاقد معنی است، چرا که ممکن است در حلقهٔ $K$ قادر به‌تقسیم بر $r!s!$ نباشیم. اگر $K$ هیأتی با سرشت نمای صفر باشد، آنگاه (۵-۴۷) بامعنی است و خیلی سریع می‌توان نشان داد که ضرب گوه‌ای شرکت‌پذیر است.

**قضیهٔ ۸.** فرض کنیم $K$ هیأتی با سرشت نمای صفرو $V$ فضایی برداری بر روی $K$ باشد. در این صورت ضرب خارجی عملی شرکت‌پذیر روی فرمهای چند خطی متناوب روی $V$ است. به‌بیان دیگر، اگر $L$، $M$، و $N$ فرمهای چند خطی متناوبی روی $V$، بترتیب از درجات $r$، $s$، و $t$ باشند، آنگاه

$$(L \wedge M) \wedge N = L \wedge (M \wedge N).$$

اثبات. از (۵-۴۷) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر دو اسکالر دلخواه $c$ و $d$، $cd(L \wedge M) = cL \wedge dM$. از این‌رو

$$r!s!t![(L\wedge M)\wedge N]=r!s!(L\wedge M)\wedge t!N$$

و چون $\pi_t(N)=t!N$ ، داریم

$$r!s!t![(L\wedge M)\wedge N]=\pi_{r+s}(L\otimes M)\wedge\pi_t(N)$$
$$=\frac{1}{(r+s)!}\,\frac{1}{t!}\pi_{r+s+t}[\pi_{r+s}(L\otimes M)\otimes\pi_t(N)].$$

اکنون از (۵-۴۶) مشهود است که

$$r!s!t![(L\wedge M)\wedge N]=\pi_{r+s+t}(L\otimes M\otimes N).$$

با محاسبه‌ای مشابه

$$r!s!t![L\wedge(M\wedge N)]=\pi_{r+s+t}(L\otimes M\otimes N)$$

و بنابراین، $(L\wedge M)\wedge N=L\wedge(M\wedge N)$. □

اکنون به‌حالت عمومی که درآن تنها فرض می‌شود $K$ یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی است، بازمی‌گردیم. مسألهٔ اول ما این است که (۵-۴۷) را با تعریفی هم‌ارز که در حالت عمومی هم‌کار کند، عوض کنیم. اگر $L$ و $M$ فرمهای چندخطی متناوبی، بترتیب از درجات $r$ و $s$ ، باشند می‌خواهیم فرم چند خطی متناوب متعارف $L\wedge M$ از درجهٔ $r+s$ را که

$$r!s!(L\wedge M)=\pi_{r+s}(L\otimes M)$$

بسازیم.

اکنون به‌یادآوری چگونگی تعریف $\pi_{r+s}(L\otimes M)$ می‌پردازیم. به‌هر جایگشت $\sigma$ از $\{1,\cdots,r+s\}$ تابع چند خطی

$$(\operatorname{sgn}\sigma)(L\otimes M)_\sigma \tag{۵-۴۸}$$

را که درآن

$$(L\otimes M)_\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r+s})=(L\otimes M)(\alpha_{\sigma1},\cdots,\alpha_{\sigma(r+s)})$$

مربوط می‌سازیم وتوابع (۵-۴۸) را به‌ازای همهٔ جایگشتهای $\sigma$ جمع می کنیم. $(r+s)!$ جایگشت وجود دارد؛ اما، به‌علت متناوب بودن $L$ و $M$ بسیاری از توابع (۵-۴۸) مساوی‌اند. در واقع، حداکثر

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

تابع متمایز (۵-۴۸) وجود دارد. ببینیم چرا. فرض‌کنیم $S_{r+s}$ مجموعهٔ جایگشتهای $\{1,\cdots,r+s\}$، یعنی گروه متقارن از درجهٔ $r+s$ باشد. نظیر اثبات (۵-۴۶) زیر-

مجموعهٔ $G$ متشکل از جایگشتهای $\sigma$ را که مجموعه‌های $\{1, \ldots, r\}$ و $\{r+1, \ldots, r+s\}$ را در داخل خودشان جای می‌گردانند، جدا می‌کنیم. به‌بیان دیگر، $\sigma$ در $G$ است، هرگاه بـه‌ازای هر $i$ بین ۱ و $r$ داشته باشیم $1 \leqslant \sigma i \leqslant r$. (لزوماً نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $j$ بین $r+1$ و $r+s$، $r+1 \leqslant \sigma j \leqslant r+s$.) حال $G$ زیر-گروهی از $S_{r+s}$ است، پس اگر $\sigma$ و $\tau$ در $G$ باشند، آنگاه $\sigma\tau^{-1}$ نیز در $G$ است. آشکار است که $G$، $r!s!$ عضو دارد.

حال نگاشت

$$S_{r+s} \xrightarrow{\psi} M^{r+s}(V)$$

تعریف شده توسط

$$\psi(\sigma) = (\operatorname{sgn} \sigma)(L \otimes M)_\sigma$$

در دست است. چون $L$ و $M$ متناوب هستند، به‌ازای هر $\gamma$ در $G$

$$\psi(\gamma) = L \otimes M.$$

بنابراین، چون هر فرم $r+s$ خطی $N$ روی $V$، $(N_\sigma)_\tau = N_{\tau\sigma}$،

به‌ازای هر $\gamma$ در $G$ و $\tau$ در $S_{r+s}$ داریم $\psi(\tau\gamma) = \psi(\tau)$.

این مطلب نشان می‌دهد کـه نگاشت $\psi$ روی هـر **هم‌مجموعه** (چپ) $\tau G$ از زیرگروه $G$ ثابت است. اگر $\tau_1$ و $\tau_2$ در $S_{r+s}$ باشند، بـرحسب اینکـه $\tau_2^{-1}\tau_1$ در $G$ باشد یا نباشد هم‌مجموعه‌های $\tau_1 G$ و $\tau_2 G$ یا مساوی‌اند یا مجزا. هرهم‌مجموعه‌شامل $r!s!$ عنصر است، از این‌رو

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

هم‌مجموعهٔ متمایز وجود دارد. اگر $S_{r+s}/G$ دستهٔ هم‌مجموعه‌ها را نشان دهد، آنگاه $\psi$ تابعی روی $S_{r+s}/G$ تعریف می‌کند؛ بدین معنی که، بنابرآنچه نشان داده‌ایم، تابعی چون $\tilde{\psi}$ روی‌آن مجموعه وجود دارد که به‌ازای هر $\tau$ در $S_{r+s}$

$$\psi(\tau) = \tilde{\psi}(\tau G).$$

اگر $H$ هم‌مجموعهٔ چپی از $G$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $\tau$ در $H$، $\tilde{\psi}(H) = \psi(\tau)$.

اکنون **ضرب خارجی** فرمهای چندخطی متناوب $L$ و $M$ از درجه‌های $r$ و $s$ را با قرار دادن

$$L \wedge M = \sum_H \tilde{\psi}(H) \tag{۵-۴۹}$$

که در آن $H$ روی $S_{r+s}/G$ تغییر می‌کند، تعریف مـی‌کنیم. روش دیگـر بیان تعریف $L \wedge M$ چنین است. فرض‌کنیم $S$ مجموعهٔ دلخواهی ازجایگشتهای $\{1, \ldots, r+s\}$

باشد که از هر هم‌ـمجموعهٔ چپ $G$ دقیقاً یك عنصر را شامل است. دراین صورت

$$L\wedge M=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)(L\otimes M)_{\sigma} \qquad (۵۰\text{-}۵)$$

که درآن $\sigma$ بر روی $S$ تغییر می‌کند. واضح است که

$$r!s!L\wedge M=\pi_{r+s}(L\otimes M)$$

و از این رو، تعریف جدید وقتی $K$ هیأتی با سرشت نمای صفر باشد با (۵-۴۷) هم ارز است.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و $V$ مدولی روی $K$ باشد. در این صورت ضرب خارجی عملی شرکت پذیر روی فرمهای چند خطی متناوب روی $V$ است. به بیان دیگر، اگر $L$، $M$، و $N$ فرمهای چند خطی متناوبی روی $V$، بترتیب از درجات $r$، $s$، و $t$ باشند، آنگاه

$$(L\wedge M)\wedge N=L\wedge(M\wedge N).$$

اثبات. گرچه اثبات قضیهٔ ۸ دراینجا به‌کار نمی‌آید، اما در چگونگی اثبات‌حالت عمومی الهام بخش است. فرض‌کنیم $G(r, s, t)$ زیر گروهی از $S_{r+s+t}$ متشکل از جایگشتهایی باشد که مجموعه‌های

$$\{۱,\cdots,r\},\quad \{r+۱,\cdots,r+s\},\quad \{r+s+۱,\cdots,r+s+t\}$$

را داخل خودشان جای می‌گردانند. دراین‌صورت به‌ازای‌همهٔ $\mu$های واقع درهم‌ـمجموعهٔ چپ‌مفروضی از $G(r, s, t)$، توابع چند خطی $(\operatorname{sgn}\mu)(L\otimes M\otimes N)_{\mu}$ مساوی‌اند. از هر هم‌ـمجموعهٔ چپ $G(r, s, t)$ عنصری انتخاب می‌کنیم و $E$ را مجموع جملات متناظر $(\operatorname{sgn}\mu)(L\otimes M\otimes N)_{\mu}$ می‌گیریم. آنگاه $E$ مستقل از نحوهٔ انتخاب نمایشگرهای $\mu$ است و

$$r!s!t!E=\pi_{r+s+t}(L\otimes M\otimes N).$$

نشان خواهیم داد که $L\wedge(M\wedge N)$ و $(L\wedge M)\wedge N$ هر دو با $E$ متساوی هستند.

فرض‌کنیم $G(r+s, t)$ زیر گروهی از $S_{r+s+t}$ باشد که مجموعه‌های

$$\{۱,\cdots,r+s\},\quad \{r+s+۱,\cdots,r+s+t\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گرداند. فرض کنیم $T$ مجموعه‌ای از جایگشتهای $\{۱,\cdots,r+s+t\}$ باشد، که شامل دقیقاً یك عنصر ازهر هم‌ـمجموعهٔ چپ $G(r+s,t)$ است. بنا بر (۵-۵۰)

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\tau}(\operatorname{sgn}\tau)[(L\wedge M)\otimes N]_{\tau}$$

که درآن مجموع بر روی همهٔ جایگشتهای $\tau$ در $T$ نوشته می‌شود. حال فرض کنیم $G(r, s)$ زیرگروهی از $S_{r+s}$ باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \cdots, r\}, \quad \{r+1, \cdots, r+s\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گرداند. گیریم $S$ مجموعهٔ دلخواهی از جایگشتهای $\{1, \cdots, r+s\}$ باشد که شامل دقیقاً یك عنصر از هر هم‌-مجموعهٔ چپ $G(r, s)$ است. از (۵-۵۰) وآنچه در بالا نشان دادیم، نتیجه می‌شود که

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\sigma,\tau}(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)[(L\otimes M)_{\sigma}\otimes N]_{\tau}$$

که درآن مجموع بەازای همهٔ جفتهای $\tau$ ، $\sigma$ در $S\times T$ محاسبه می‌شود. اگر توافق کنیم که هر $\sigma$ در $S_{r+s}$ را با عنصری از $S_{r+s+t}$، که روی $\{1, \cdots, r+s\}$ با $\sigma$ توافق داشته و روی $\{r+s+1, \cdots, r+s+t\}$ برابر عنصر همانی باشد یکی بگیریم، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\sigma,\tau}\operatorname{sgn}(\sigma\tau)[(L\otimes M\otimes N)_{\sigma}]_{\tau}.$$

اما

$$[(L\otimes M\otimes N)_{\sigma}]_{\tau}=(L\otimes M\otimes N)_{\tau\sigma}.$$

بنابراین

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\sigma,\tau}\operatorname{sgn}(\tau\sigma)(L\otimes M\otimes N)_{\tau\sigma}.$$

حال فرض کنیم بەازای $\sigma_i$ در $S$، $\tau_i$ در $T$، و $\gamma$ در $G(r, s, t)$ داشته باشیم

$$\tau_1\sigma_1=\tau_2\sigma_2\gamma.$$

دراین صورت $\tau_2^{-1}\tau_1=\sigma_2\gamma\sigma_1^{-1}$ وچون $\sigma_2\gamma\sigma_1^{-1}$ در $G(r+s, t)$ است نتیجه می‌شود که $\tau_1$ و $\tau_2$ در یك هم‌-مجموعهٔ چپ $G(r+s, t)$ قرار دارند. بنابراین $\tau_1=\tau_2$ و $\sigma_1=\sigma_2\gamma$. اما این مطلب ایجاب می‌کند که $\sigma_1$ و $\sigma_2$ (بەعنوان عناصری از $S_{r+s}$) در یکی از هم‌-مجموعه‌های $G(r, s)$ واقع شوند؛ از این‌رو، $\sigma_1=\sigma_2$. پس، حاصل ضربهای $\tau\sigma$ که با

$$\frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!}\;\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

جفت $(\tau, \sigma)$ در $T\times S$ متناظرند، همگی متمایز هستند و در هم‌-مجموعه‌های متمایزی‌از $G(r, s, t)$ قرار می‌گیرند. چون دقیقاً

$$\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}$$

هم‌ـمجموعهٔ‌چپ $G(r,s,t)$ در $S_{r+s+t}$ وجود دارد، نتیجه‌می‌شود که $E = (L \wedge M) \wedge N$.
با استدلال مشابهی، همچنین $E = L\wedge(M \wedge N)$. □

**مثال ۱۳.** ضرب خارجی با فرمولهای معین مربوط به‌محاسبهٔ دترمینان، مشهور به **بسطهای لاپلاس**، ارتباط نزدیك دارد. گیریم $K$ حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و $n$ عدد صحیح مثبتی باشد. فرض کنیم $1 \leqslant r < n$ و $L$ فرم $r$ خطی متناوب روی $K^n$ تعریف شده توسط

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

باشد. اگر $s = n - r$، و $M$ فرم $S$ خطی متناوب

$$M(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = \det \begin{bmatrix} A_{1(r+1)} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s(r+1)} & \cdots & A_{sn} \end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه $L \wedge M = D$ تابع دترمینان $K^n$ است. این امر نتیجه‌ای فوری از این حکم است که $L \wedge M$ فرم $n$ خطی متناوبی است و (چنانکه می‌توان دید)

$$(L \wedge M)(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = 1.$$

حال اگر $L \wedge M$ را به‌طرز صحیح توصیف کنیم، یکی از بسطهای لاپلاس برای دترمینان هر ماتریس $n \times n$ بر روی $K$ را به‌دست می‌آوریم.

در گروه‌جایگشتی $S_n$، فرض کنیم $G$ زیرگروهی باشد که مجموعه‌های $\{1, \cdots, r\}$ و $\{r+1, \cdots, n\}$ را در داخل خودشان جای بگرداند. هر هم‌ـمجموعهٔ چپ $G$ شامل دقیقاً یك‌جایگشت $\sigma$ است که $\sigma 1 < \sigma 2 < \cdots < \sigma r$ و $\sigma(r+1) < \cdots < \sigma n$. علامت این جایگشت توسط

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\sigma 1 + \cdots + \sigma r - \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)}$$

مشخص می‌شود[1]. ضرب گوه‌ای $L \wedge M$ با

---

۱. فرمولی که در متن اصلی آمده چنین است:

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\sigma 1 + \cdots + \sigma r + \left(\frac{r(r-1)}{2}\right)}$$

که صحیح نیست، زیرا اگر $r$ عددی فرد بین ۱ و $n$، و $\epsilon$ جایگشت همانی باشد، برای هم‌ـمجموعهٔ
←

$$(L\wedge M)(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum(\operatorname{sgn}\sigma)L(\alpha_{\sigma1},\cdots,\alpha_{\sigma r})M(\alpha_{\sigma(r+1)},\cdots,\alpha_{\sigma n})$$

معین می‌شود که در آن مجموع بر روی دسته‌ای از σها، از هرهم‌ـمجموعهٔ $G$ یکی، محاسبه می‌شود. بنابراین

$$(L\wedge M)(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j_1<\cdots<j_r}e_J L(\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r})M(\alpha_{k_1},\cdots,\alpha_{k_s})$$

و در آن

$$e_J=(-1)^{j_1+\cdots+j_r-(r(r+1)/2)}$$
$$k_i=\sigma(r+i).$$

به‌بیان دیگر

$$\det A=\sum_{j_1<\cdots<j_r}e_J\begin{vmatrix}A_{j_1,1} & \cdots & A_{j_1,r}\\ \vdots & & \\ A_{j_r,1} & \cdots & A_{j_r,r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_{k_1,r+1} & \cdots & A_{k_1,n}\\ \vdots & & \\ A_{k_r,r+1} & \cdots & A_{k_r,n}\end{vmatrix}.$$

این یك بسط لاپلاس است. بسطهای دیگر را می‌توان با عوض‌کردن مجموعه‌های $\{1,\cdots,r\}$ و $\{r+1,\cdots,n\}$ با دو مجموعهٔ مکمل متفاوتی از نمایه‌ها به دست آورد.

---

$\epsilon G=\overrightarrow{G}$، تنها جایگشتی‌که می‌تواند دارای خاصیت مذکور باشد، جایگشت همانی $\epsilon$ است. اما مطابق این فرمول

$$\operatorname{sgn}\epsilon=(-1)^{r^2}=-1.$$

فرمول صحیح باید

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{\sigma1+\cdots+\sigma r-\frac{r(r+1)}{2}}$$

باشد، که به‌طریق زیر اثبات می‌شود. برای چنین σیی تعداد $(\sigma1-1)$ تعویض لازم است که $\sigma1$ عنصر ابتدای جایگشت باشد. و نیز $\sigma2-2$ تعویض لازم است که $\sigma2$ عنصر دوم جایگشت باشد. و به‌همین منوال $\sigma r-r$ تعویض لازم است که $\sigma r$ عنصر $r$م جایگشت باشد. پس ازاین تعویضها $\sigma(r+1)،\cdots،\sigma(n)$ بدون تغییر و با ترتیب درست درجای خودقرار می‌گیرد. بدین‌سان

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{\sigma1-1}\cdot(-1)^{\sigma2-2}\cdots(-1)^{\sigma r-r}$$
$$=(-1)^{\sigma1+\cdots+\sigma r-\frac{r(r+1)}{2}}.$$

درترجمه صورت صحیح این‌فرمول، ونیز صورت تصحیح شدهٔ نتایج‌مربوط به‌آن‌آمده است.ـم.

اگر $V$ یك $K$-مدول باشد، می‌توانیم مدولهای‌فرمی گوناگون $\bigwedge^r(V)$ را پهلوی هم قرار دهیم و با استفاده ازضرب خارجی حلقه‌ای تعریف کنیم. برای سادگی، این‌کار را تنها برای حالت $K$-مدول‌آزادی از رتبهٔ $n$ انجام می‌دهیم. در این صورت، به‌ازای $r>n$ مدولهای $\bigwedge^r(V)$ بدیهی هستند. حال

$$\bigwedge(V)=\bigwedge^0(V)\oplus\bigwedge^1(V)\oplus\cdots\oplus\bigwedge^n(V)$$

را تعریف می‌کنیم. این یك مجموع مستقیم خارجی است ــ مفهومی‌که قبلاً ازآن صحبت نشده‌است. عناصر $\bigwedge(V)$ عبارتند از $n+1$تاییهای $(L_0,\cdots,L_n)$ با $L_r$ در $\bigwedge^r(V)$. جمع، و ضرب در $K$، به‌همان صورت‌که برای $n+1$تاییها انتظار می‌رود، تعریف می‌شوند. ضمناً $K=\bigwedge^0(V)$. اگر $\bigwedge^r(K)$ را با $n+1$ تاییهای $(0,\cdots,0,L,0,\cdots,0)$ که در آن $L$ از $\bigwedge^r(K)$ است، یکی بگیریم، آنگاه $\bigwedge^r(K)$ زیر مدولی از $\bigwedge(V)$ می‌باشد و تجزیه به‌مجموع مستقیم

$$\bigwedge(V)=\bigwedge^0(V)\oplus\cdots\oplus\bigwedge^n(V)$$

به مفهوم معمولی آن، بر قرار است. چون $\bigwedge^r(V)$، $K$-مدول آزادی از رتبهٔ $\binom{n}{r}$است، می‌بینیم‌که $\bigwedge(V)$ نیز یك $K$-مدول آزاد است و

$$\text{رتبهٔ}\,(\bigwedge(V))=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$$
$$=2^n.$$

ضرب خارجی یك عمل ضرب در $\bigwedge(V)$ تعریف می‌کند: از ضرب خارجی روی فرمها استفاده می‌کنیم وآن را به‌طور خطی به $\bigwedge(V)$ سرایت می‌دهیم. این عمل، نسبت به عمل جمع روی $\bigwedge(V)$ پخش‌پذیر است و به $\bigwedge(V)$ ساختار حلقه می‌بخشد. این حلقه، **حلقهٔ گراسمان** روی $V^*$ است. این حلقه جابجایی نیست؛ مثلاً اگر $L$ و $M$ بترتیب در $\bigwedge^r$ و $\bigwedge^s$ باشند،آنگاه

$$L\wedge M=(-1)^{rs}M\wedge L.$$

با این وجود، حلقهٔ گراسمان در چندین شاخهٔ ریاضیات حائز اهمیت است.

# ۶

# فرمهای متعارف مقدماتی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

## ۱.۶ مقدمه

قبلاً اشاره کرده‌ایم که هدف اصلی ما مطالعهٔ تبدیلهای خطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی است. تا اینجا، مثالهای خاص بسیاری از تبدیلهای خطی دیدیم و قضایایی چند دربارهٔ تبدیل خطی کلی اثبات کردیم. درحالت فضاهای با بعد متناهی، از پایه‌های مرتب برای نمایش ماتریسی این گونه تبدیلها استفاده کردیم و این نمایش مسلماً به بینش ما در مورد رفتار آنها افزود. فضای برداری $L(V, W)$ متشکل از تبدیلهای خطی از یك فضا در فضایی دیگر و نیز جبر خطی $L(V, V)$ متشکل از تبدیلهای خطی از یك فضا درخودش را مورد بررسی قرار دادیم.

در دو فصل آتی، به بررسی عملگرهای خطی مشغول می‌شویم. برنامهٔ ما این است که تنها یك عملگر خطی $T$ روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ را برگزینیم و «آن را تفکیك کنیم تا بفهمیم در درون آن چه می گذرد.» دراین مرحلهٔ اولیه، ساده‌ترین راه آن است که هدف خود را به زبان ماتریسی بیان کنیم: برای عملگر خطی دادهٔ شدهٔ $T$ پایهٔ مرتبی برای $V$ بیابید که نسبت به آن، ماتریس $T$ شکل سادهٔ منتخبی را به خود بگیرد.

دراینجا تصویری از آنچه که در ذهن داریم، آورده شده است. شاید از نظر انجام کار ساده‌ترین ماتریسها، بعد از مضربهای اسکالری ماتریس همانی، ماتریسهای قطری

$$D=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots c_n \end{bmatrix} \qquad (۱-۶)$$

باشند. فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی یك فضای $n$بعدی $V$ باشد. اگر می‌توانستیم پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای $V$ بیابیم که در آن $T$ توسط ماتریس قطری $D$ در (۱-۶) نمایش داده شود، مسلماً اطلاعات قابل‌ملاحظه‌ای دربارهٔ $T$ کسب می‌کردیم. به‌عنوان نمونه، برخی ازاعداد سادهٔ وابسته به $T$، مثل رتبهٔ $T$ یادترمینان $T$ رامی‌توانستیم با اندك کوششی فراتر از یك نگاه به‌ماتریس $D$، تعیین کنیم. همچنین می‌توانستیم به‌طور آشکار برد وفضای پوچ $T$ را توصیف کنیم. چون $[T]_{\mathcal{B}}=D$ اگر وتنها اگر

$$T\alpha_k=c_k\alpha_k, \qquad k=1, \cdots, n \qquad (۲-۶)$$

برد برابر زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_k$هایی است که به‌ازای آنها $c_k\neq 0$، وفضای پوچ زیرفضای پدیدآمده توسط بقیهٔ $\alpha_k$هااست. درواقع، به‌نظرمنصفانه می‌آیدکه‌بگوییم، اگر پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ و ماتریسی قطری چون $D$ را می‌شناختیم که $[T]_{\mathcal{B}}=D$،می‌توانستیم به‌هر سؤال احتمالی در مورد $T$ بآسانی پاسخ دهیم.

آیا هرعملگرخطی $T$ می‌تواند توسط ماتریسی قطری درپایه‌ای مرتب، نمایش‌داده شود؟ اگرچنین نیست، برای‌کدام عملگرهای $T$چنین پایه‌ای وجود دارد؟ درصورت‌وجود چگونه می‌توانیم چنین پایه‌ای را بیابیم؟ اگر چنین پایه‌ای وجود نداشته باشد، ساده‌ترین نوع ماتریسی که توسط آن می‌توانیم $T$ را نمایش دهیم، کدام است؟ اینها برخی از سؤالاتی هستندکه دراین فصل (وفصل بعدی) به‌آنهاخواهیم پرداخت. همچنان‌که‌ازبرخی از مشکلات آگاهی می‌یابیم، شکل سؤالات ما نیز پیچیده‌تر و ظریفتر خواهد شد.

## ۲.۶. مقادیر سرشت‌نما

تذکرات مقدماتی بخش قبل، نقطهٔ شروعی برای تلاش جهت تجزیه و تحلیل عملگرخطی عمومی $T$ به‌دست می‌دهد. ما مطلب‌کلیدی خود را از (۲-۶) می‌گیریم که پیشنهادمی‌کند بردارهایی را مورد مطالعه قرار دهیم که توسط $T$ به‌مضربهای اسکالری خودشان‌فرستاده می‌شوند.

**تعریف.** فرض کنیم $V$ فضایی برداری برروی هیأت $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. یك **مقدار سرشت‌نمای** $T$ اسکالری چون $c$ در $F$ است که برای آن بردار غیرصفری چون $\alpha$ در $V$ با خاصیت $T\alpha=c\alpha$ وجود داشته باشد. اگر $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$

باشد، آنگاه

(الف) هر $\alpha$ با خاصیت $T\alpha = c\alpha$ یک **بردار سرشت‌نمای** $T$ وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c$ نامیده می‌شود.
(ب) دستهٔ همهٔ $\alpha$ها که $T\alpha = c\alpha$ **فضای سرشت‌نمای** وابسته به $c$ نامیده می‌شود.

مقادیر سرشت‌نما درمواردی ریشه‌های سرشت‌نما، ریشه‌های راکد، مقادیر ویژه، مقادیر سره، یا مقادیر طیفی هم‌نامیده می‌شوند. دراین کتاب تنها از نام «مقادیر سرشت‌نما» استفاده خواهیم کرد.

اگر $T$ عملگری خطی و $c$ اسکالری دلخواه باشد، مجموعهٔ بردارهای $\alpha$ به‌طوری که $T\alpha = c\alpha$، زیرفضایی از $V$ است. این زیرفضا، فضای پوچ تبدیل خطی $(T - cI)$ است. $c$ را یک مقدار سرشت‌نمای $T$ می‌نامیم، هرگاه این زیرفضا، زیرفضای صفر نباشد؛ یعنی، هرگاه $(T - cI)$ یك به‌یك نباشد. درصورتی‌که فضای زمینهٔ $V$ با بعد متناهی باشد، $(T - cI)$ دقیقاً زمانی یك به‌یك نیست‌که دترمینان آن ۰ باشد. حال مطالب فوق را خلاصه می‌کنیم.

**قضیهٔ ۱.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ و $c$ اسکالر دلخواهی باشد. احکام زیر هم‌ارزند.

(۱) $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$ است.
(۲) عملگر $(T - cI)$ منفرد (معکوس‌ناپذیر) است.
(۳) $\det(T - cI) = 0$.

معیاردترمینانی (۳) بسیار مهم است، زیرا به ما می گوید که کجا مقادیرسرشت‌نمای $T$ را جستجو کنیم. چون $\det(T - cI)$ نسبت به‌متغیر $c$ یك چندجمله‌ای درجهٔ $n$ است، مقادیر سرشت‌نما را به‌صورت ریشه‌های این چندجمله‌ای به‌دست می‌آوریم. اجازه بدهید این مطلب را با دقت بیان کنیم.

اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد و $A = [T]_{\mathcal{B}}$، آنگاه $(T - cI)$ معکوس‌پذیراست اگروتنها اگرماتریس $(A - cI)$ معکوس‌پذیر باشد. درنتیجه، تعریف زیرمصداق دارد.

**تعریف.** اگر $A$ ماتریسی $n \times n$ برروی هیأت $F$ باشد، یک **مقدار سرشت‌نمای** $A$ در $F$، اسکالری چون $c$ از $F$ است که ماتریس $(A - cI)$ منفرد (معکوس‌ناپذیر) باشد.

چون $c$ یک مقدار سرشت‌نمای $A$ است اگروتنها اگر $\det(A - cI) = 0$، یا به‌طور هم‌ارز، اگروتنها اگر $\det(cI - A) = 0$، پس ماتریس $(xI - A)$ با درایه‌های چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهیم و چندجمله‌ای $f = \det(xI - A)$ را درنظر می‌گیریم. بوضوح مقادیرسرشت‌نمای $A$ در $F$ دقیقاً اسکالرهایی چون $c$ در $F$ هستند که $f(c) = 0$.

بدین‌دلیل، $f$ **چندجمله‌ای سرشت‌نمای** $A$ نامیده می‌شود. توجه به‌این نکته مهم است که $f$ چندجمله‌ای تکینی است که دقیقاً از درجهٔ $n$ است. این مطلب بسادگی از فرمول‌دترمینان ماتریس برحسب درایه‌هایش قابل مشاهده است.

**لم.** ماتریسهای متشابه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند.

اثبات. اگر $B=P^{-1}AP$، آنگاه

$$\begin{aligned}\det(xI-B)&=\det(xI-P^{-1}AP)\\&=\det(P^{-1}(xI-A)P)\\&=\det P^{-1}\cdot\det(xI-A)\quad\det P\\&=\det(xI-A)\cdot\ \square\end{aligned}$$

این لم ما را قادر می‌سازد که آگاهانه چندجمله‌ای سرشت نمای عملگر $T$ را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای هرماتریس $n\times n$ دلخواهی که $T$ را درپایهٔ مرتبی از $V$ نمایش دهد تعریف کنیم. عیناً همچـون درمورد ماتریسها، مقادیـرسرشت‌نمای $T$ ریشه‌های چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ هستند. بخصوص، این مطلب نشان می‌دهد که $T$ نمی‌تواند بیش‌از $n$ مقـدار سرشت‌نمای متمایز داشته باشد. توجه به‌این نکته مهم است کـه ممکن است $T$ هیچ مقدار سرشت‌نما نداشته باشد.

**مثال ۱.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی $R^2$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}.$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ (یا $A$) عبارت است از

$$\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x&1\\-1&x\end{vmatrix}=x^2+1.$$

چون این چندجمله‌ای دارای ریشهٔ حقیقی نیست، $T$ هیچ مقدار سرشت‌نما ندارد. اگر $U$ عملگری خطی‌روی $C^2$ باشد که درپایهٔ‌مرتب استانده‌توسط $A$ نمایش‌داده‌می‌شود، آنگاه $U$ دارای دومقدار سرشت‌نمای $i$ و $-i$ است. دراینجا نکته‌ای ظریف دیده می‌شود. دربحث مربوط به‌مقادیرسرشت‌نمای ماتریس مفروض $A$ باید مواظب باشیم که هیأت موردنظر را تصریح کنیم. دراین مثال ماتریس $A$ دارای هیچ مقدار سرشت‌نما در $R$ نیست، امادومقدار سرشت‌نمای $i$ و $-i$ در $C$ دارد.

**مثال ۲.** گیریم $A$ ماتریس ۳×۳ (حقیقی)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. دراین‌صورت چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

از این‌رو، مقادیر سرشت‌نمای $A$ عبارتند از ۱ و ۲.

فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی $R^3$ باشد که درپایهٔ استانده توسط $A$ نمایش‌داده می‌شود. بردارهای سرشت‌نمای $T$ وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای ۱ و ۲ را می‌یابیم. داریم

$$A-I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

با یک‌نظر روشن است که $A-I$ دارای رتبهٔ ۲ است (و لذا پوچی $T-I$ برابر ۱ است). از این‌رو، فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای ۱ یک‌ـبعدی است. بردار $\alpha_1 = (1, 0, 2)$ فضای پوچ $T-I$ را پدید می‌آورد. پس، $T\alpha = \alpha$ اگر و تنها اگر $\alpha$ مضربی اسکالری از $\alpha_1$ باشد. اکنون

$$A-2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

را درنظرمی‌گیریم. آشکار است که رتبهٔ $A-2I$ نیز ۲ است، بنابراین فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای ۲ دارای بعد ۱ است. بدیهی است که $T\alpha = 2\alpha$ اگروتنها اگر $\alpha$ مضربی اسکالری از $\alpha_2 = (1, 1, 2)$ باشد.

**تعریف.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ باشد. گوییم $T$ **قطری شدنی** است، هرگاه پایه‌ای برای $V$ وجود داشته باشد که هر بردار آن یک بردار سرشت‌نمای $T$ باشد.

دلیل این نام‌گذاری باید روشن باشد؛ زیرا، اگر پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای $V$ وجود داشته باشد که‌درآن هر $\alpha_i$ یك بردارسرشت‌نمای $T$ باشد، آنگاه ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ قطری است. اگر $T\alpha_i=c_i\alpha_i$، داریم

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} c_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & c_2 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots c_n \end{bmatrix}$$

حتماً لازم نیست که اسکالرهای $c_1$، $\cdots$، $c_n$ متمایز باشند؛ در واقع، ممکن است همگی یك اسکالر باشند (وقتی که $T$ مضربی اسکالری از عملگرهمانی است).

همچنین می‌توان تعریف کرد که $T$قطری شدنی است هرگاه بردارهای سرشت‌نمای $T$ فضای $V$ را پدید آورند. این تعریف تنها ازنظر ظاهر با تعریف قبلی متفاوت است، چراکه می‌توان بین هرمجموعهٔ پدیدآورنده‌ای از بردارها، پایه‌ای انتخاب کرد.

درمثالهای ۱ و ۲ عمداً عملگرهایی خطی روی $R^n$ برگزیدیم که قطری شدنی نباشند. در مثال ۱، عملگری خطی روی $R^2$ داریم که قطری شدنی نیست، چراکه مقادیر سرشت‌نما ندارد. درمثال ۲، عملگر $T$ مقادیر سرشت‌نما دارد؛ درواقع، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$، به‌طور کامل برروی هیأت اعداد حقیقی تجزیه می‌شود: $f=(x-1)(x-2)^2$. با این‌حال، $T$ قطری شدنی نیست. به‌هریك از دومقدار سرشت‌نمای $T$، تنها یك فضای یك‌بعدی از بردارهای سرشت‌نما وابسته است. از این‌رو، ممکن نیست بتوانیم پایه‌ای برای $R^2$ تشکیل دهیم که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای $T$ باشد.

فرض کنیم عملگرخطی $T$ قطری‌شدنی باشد. بعلاوه فرض کنیم $c_1$، $\cdots$، $c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ باشند. در این صورت، پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}$ وجود داردکه در آن $T$ توسط ماتریسی قطری با درایه‌های قطری $c_i$ نمایش داده می‌شود و هریك از $c_i$ها به‌تعداد دفعات معینی تکرار می‌شوند. اگرتعداد دفعات تکرار $c_i$ برابر $d_i$ باشد، آنگاه (باانتخاب ترتیبی درست) ماتریس شکل بلوکی

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} c_1I_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & c_2I_2 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots c_kI_k \end{bmatrix} \tag{۳-۶}$$

دارد که در آن $I_j$ ماتریس همانی $d_j \times d_j$ است. ازاین ماتریس دومطلب مشاهده می‌شود. اول اینکه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$، حاصل ضربی ازسازه‌های خطی (احتمالاً مکرر) است:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k} .$$

اگر هیأت اسکالری $F$ بستهٔ جبری، مثلاً هیأت اعداد مختلط باشد، هر چند جمله‌ای بر روی $F$ را می‌توان بدین صورت به سازه‌ها تجزیه کرد (ر. ک. بخش ۵.۴)؛ اما، اگر $F$ بستهٔ جبری نباشد، وقتی‌که بگوییم چند جمله‌ای سرشت نمای $T$ دارای چنین تجزیه‌ای به سازه‌هاست، داریم ویژگی خاصی ازآن را ذکر می‌کنیم. دومین مطلبی که از (۶-۳) مشاهده می‌شود. این است که $d_i$، تعداد دفعاتی که $c_i$ به‌عنوان ریشهٔ $f$ تکرار می‌شود، برابر با بعد فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به‌مقدار سرشت نمای $c_i$ است. علت آن است‌که پوچی هر ماتریس قطری برابر است با تعداد صفرهایی‌که روی قطر اصلی خود دارد، و ماتریس $[T - c_i I]_{\mathcal{B}}$ هم $d_i$ صفر روی قطر اصلیش دارد. هرچند این رابطهٔ بین بعد فضای سرشت نما و چندگانگی مقدار سرشت‌نما به‌عنوان ریشه‌ای از $f$ در ابتدا جالب به‌نظر نمی‌آید، اما راه‌ساده‌ای است برای تعیین اینکه آیا عملگرمفروضی قطری‌شدنی است یا خیر.

**لم.** فرض کنیم $T\alpha = c\alpha$. اگر $f$ چند جمله‌ای دلخواهی باشد، آنگاه $f(T)\alpha = f(c)\alpha$.

**اثبات.** تمرین.

**لم.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ باشد. گیریم $c_1, \ldots, c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ و $W_i$ فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای $c_i$ باشد. اگر $W = W_1 + \cdots + W_k$، آنگاه

$$\dim W = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k .$$

در واقع، اگر $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای $W_i$ باشد، آنگاه $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ پایهٔ مرتبی برای $W$ است.

**اثبات.** فضای $W = W_1 + \cdots + W_k$ زیرفضای پدیدآمده‌توسط‌همهٔ بردارهای سرشت‌نمای $T$ است. معمولاً وقتی‌که مجموع $W$ از زیرفضاهای $W_i$ راتشکیل می‌دهیم، به‌دلیل روابطی خطی‌که ممکن است بین بردارهای فضاهای گوناگون موجود باشد، انتظار داریم که $\dim W < \dim W_1 + \cdots + \dim W_k$. این لم بیان می‌کند که فضاهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای متفاوت مستقل از یکدیگرند.

فرض‌کنیم‌که (به‌ازای هر $i$) برداری چون $\beta_i$ از $W_i$ در دست باشد و نیز فرض کنیم $\beta_1 + \cdots + \beta_k = 0$. نشان می‌دهیم که به‌ازای هر $i$، $\beta_i = 0$. گیریم $f$ چندجمله‌ای

دلخواهی باشد. چون $T\beta_i = c_i\beta_i$، لم قبل می‌گوید که

$$0 = f(T)0 = f(T)\beta_1 + \cdots + f(T)\beta_k$$
$$= f(c_1)\beta_1 + \cdots + f(c_k)\beta_k.$$

چندجمله‌ایهای $f_1, \ldots, f_k$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$f_i(c_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

در این صورت

$$0 = f_i(T)0 = \sum_j \delta_{ij}\beta_j$$
$$= \beta_i.$$

حال، فرض کنیم $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای $W_i$ و $\mathcal{B}$ دنبالهٔ $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ باشد. در این صورت $\mathcal{B}$ زیرفضای $W = W_1 + \cdots + W_k$ را پدید می‌آورد. بعلاوه، به‌دلیل زیر $\mathcal{B}$ یك دنبالهٔ مستقل خطی از بردارهاست. هر رابطهٔ خطی بین بردارهای $\mathcal{B}$ شکل $\beta_1 + \cdots + \beta_k = 0$ را که درآن $\beta_i$ ترکیبی خطی از بردارهای $\mathcal{B}_i$ است، خواهد داشت. بنابرآنچه‌که هم اکنون انجام دادیم،می‌دانیم که به‌ازای‌هر $i$، $\beta_i = 0$. چون‌هر $\mathcal{B}_i$ مستقل خطی است، مشاهده می‌کنیم که تنها رابطهٔ خطی بین بردارهای $\mathcal{B}$، رابطهٔ خطی بدیهی است. □

**قضیهٔ ۲.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ باشد. گیریم $c_1, \ldots, c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ و $W_i$ فضای پوچ $(T - c_iI)$ باشد. مطالب ذیل هم ارزند.

(۱) $T$ قطری شدنی است.

(۲) چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ عبارت است از

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و $\dim W_i = d_i$، $i = 1, \ldots, k$.

(۳) $\dim W_1 + \cdots + \dim W_k = \dim V$.

**اثبات.** قبلاً دیده‌ایم که (۲) از (۱) نتیجه می‌شود. اگرچندجمله‌ای سرشت‌نمای $f$ حاصل ضرب سازه‌های خطی باشد، چنانکه در (۲) هم هست، آنگاه $d_1 + \cdots + d_k = \dim V$. زیرا مجموع $d_i$ها برابر درجهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نماست، و این درجه همان $\dim V$ است. بنابراین (۳) از(۲) نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم (۳) برقرار باشد. بنا بر لم، باید داشته باشیم $V = W_1 + \cdots + W_k$. پس، بردارهای

سرشت‌نمای $T$ فضای $V$ را پدید می‌آورند. □

نظیر ماتریسی قضیهٔ ۲ را می‌توان به‌صورت زیر تنظیم کرد. فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت $F$، و $c_1, \cdots, c_k$ مقادیر سرشت نمای متمایز $A$ در $F$ باشند. به‌ازای هر $i$، گیریم $W_i$ فضای ماتریسهای ستونی $X$ (با درایه‌های متعلق به $F$) باشد که

$$(A-c_iI)X=0$$

و فرض کنیم $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای $W_i$ باشد. اگر پایه‌های $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_k$ به‌طور دسته جمعی به‌دنبال هم بیایند، دنبالهٔ ستونهای ماتریسی چون $P$

$$P=[P_1, P_2, \cdots]=(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_k).$$

را تشکیل می‌دهند. ماتریس $A$ روی $F$ متشابه ماتریسی قطری است اگر و تنها اگر $P$ ماتریسی مربعی باشد. وقتی $P$ مربعی باشد، معکوس‌پذیر هم هست و $P^{-1}AP$ قطری است.

**مثال ۳.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی $R^3$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. می‌خواهیم با استفاده از اعمال مختلف سطری و ستونی چگونگی محاسبهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نما را نشان دهیم.

$$\begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & x-2 & -2 \\ -3 & 2-x & x+4 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-۲)\begin{vmatrix} x-۵ & ۶ \\ -۲ & x+۲ \end{vmatrix}$$

$$=(x-۲)(x^{۲}-۳x+۲)$$

$$=(x-۲)^{۲}(x-۱).$$

ابعاد فضاهای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌این دو مقدار سرشت‌نما چیستند؟ داریم

$$A-\ \ I=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$A-۲I=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۶ \end{bmatrix}.$$

می‌دانیم که $A-I$ منفرد است و بوضوح ۲ $\geqslant$ رتبهٔ $(A-I)$. بنابراین، ۲ = رتبهٔ $(A-I)$. بدیهی است که ۱ = رتبهٔ $(A-۲I)$.

فرض کنیم $W_۱$ و $W_۲$ فضاهای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای ۱ و ۲ باشند. می‌دانیم که $\dim W_۱=۱$ و $\dim W_۲=۲$. بنا بر قضیهٔ ۲، $T$ قطری‌شدنی است. ارائهٔ پایه‌ای برای $R^۳$ که در آن $T$ توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود، آسان است. فضای پوچ $(T-I)$ توسط بردار $\alpha_۱=(۳,\ -۱,\ ۳)$ پدید می‌آید، ولذا $\{\alpha_۱\}$ پایه‌ای برای $W_۱$ است. فضای پوچ $T-۲I$ (یعنی فضای $W_۲$) متشکل است از بردارهای $(x_۱,\ x_۲,\ x_۳)$ با شرط $x_۱=۲x_۲+۲x_۳$. از این رو، به‌عنوان پایه‌ای برای $W_۲$ مثلاً می‌توانیم این دو بردار را برگزینیم:

$$\alpha_۲=(۲,\ ۱,\ ۰)$$

$$\alpha_۳=(۲,\ ۰,۱).$$

اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_۱,\ \alpha_۲,\ \alpha_۳\}$، آنگاه $[T]_{\mathcal{B}}$ عبارت است از ماتریس قطری

$$D=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

این واقعیت که $T$ قطری شدنی است، بدین معنی است که ماتریس اولیهٔ $A$ با ماتریس قطری $D$ (بر روی $R$) متشابه است. ماتریس $P$ که ما را قادر به‌تغییر مختصات از پایهٔ $\mathcal{B}$ به پایهٔ استانده می‌سازد (مسلماً) ماتریسی است که ترانهاده‌های $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ را به‌عنوان

بردارهای ستونی خود دارد:

$$P=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بعلاوه، $AP=PD$، بنابراین

$$P^{-۱}Ap=D.$$

## تمرین

۰۱ در هر یك از حالات زیر فرض‌کنیم $T$ و $U$ دو عملگر خطی بترتیب روی $R^۲$ و $C^۲$ باشندکه هر دو بترتیب در پایهٔ مرتب استاندهٔ $R^۲$ و پایهٔ مرتب استاندهٔ $C^۲$ توسط $A$ نمایش‌داده می‌شوند. چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای $T$ و $U$، همچنین مقادیر سرشت‌نمای هر عملگر را بیابید، و نیز بـه‌ازای هر مقدار سرشت‌نما چون $c$ پایه‌ای برای فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌آن بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

۰۲ فضای برداری $n$بعدی $V$ بر روی $F$ داده شده است. چندجمله‌ای سرشت‌نمای عملگر همانی روی $V$ چیست؟ چندجمله‌ای سرشت‌نمای عملگر صفر چیست؟

۰۳ ماتریس مثلثی شکل $A$ ی $n\times n$ بر روی هیأت $F$ مفروض است. ثابت‌کنیدکه مقادیر سرشت‌نمای $A$ درایه‌های قطری $A$، یعنی اسکالرهای $A_{ii}$ می‌باشند.

۰۴ فرض‌کنید $T$ عملگر خطی روی $R^۳$ باشدکه در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} -۹ & ۴ & ۴ \\ -۸ & ۳ & ۴ \\ -۱۶ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. با ارائهٔ پایه‌ای برای $R^۳$ که هر بردارآن یك بردارسرشت‌نمای $T$ باشد، ثابت‌کنید $T$ قطری شدنی است.

۰۵ فرض‌کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ & -۲ \\ ۱۰ & -۵ & -۳ \end{bmatrix}.$$

آیا $A$ بر روی هیأت $R$ با ماتریسی قطری متشابه است؟ آیا $A$ بر روی هیأت $C$ با ماتریسی قطری متشابه است؟

۶ . فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $R^۴$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. تحت چه شرایطی روی $a$، $b$، و $c$ عملگر $T$ قطری شدنی‌است؟

۷ . $T$ را عملگری خطی روی فضای برداری $n$ بعدی $V$ بگیرید و فرض کنید $n$ مقدار سرشت‌نمای متمایز داشته باشد. ثابت کنید $T$ قطری شدنی است.

۸ . فرض کنید $A$ و $B$ دو ماتریس $n\times n$ بر روی هیأت $F$ باشند. ثابت کنید که اگر $(I-AB)$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $I-BA$ نیز معکوس‌پذیر است و

$$(I-BA)^{-۱}=I+B(I-AB)^{-۱}A.$$

۹ . از نتیجهٔ تمرین ۸ استفاده و ثابت کنید که اگر $A$ و $B$ دو ماتریس $n\times n$ بر روی هیأت $F$ باشند، آنگاه مقادیر سرشت‌نمای $AB$ و $BA$ در $F$ مساوی هستند.

۱۰. فرض کنید $A$ ماتریس ۲ × ۲ متقارنی $(A^t=A)$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید $A$ بر روی $R$ با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. ماتریس ۲ × ۲ مختلط $N$ را که $N^۲=۰$ در نظر بگیرید. ثابت کنید یا $N=۰$ یا $N$ بر روی $C$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

متشابه است.

۱۲. از نتیجهٔ تمرین ۱۱ برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید: اگر $A$ ماتریسی $۲ \times ۲$ با درایه‌های مختلط باشد، آنگاه $A$ بر روی $C$ با ماتریسی از یکی از دو نوع

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

متشابه است.

۱۳. فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ توابع پیوستهٔ از $R$ در $R$، یعنی فضای توابع حقیقی (مقدار) پیوسته روی خط حقیقی، باشد. فرض کنید $T$ عملگر خطی روی $V$ تعریف شده توسط

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

باشد. ثابت کنید که $T$ دارای هیچ مقدار سرشت‌نما نیست.

۱۴. ماتریس قطری $n \times n$ ی $A$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$(x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

را که در آن $c_1, \ldots, c_k$ متمایزهستند، درنظر بگیرید. فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای $n \times n$ ی $B$ با شرط $AB = BA$ باشد. ثابت کنید که بعد $V$ برابر $d_1^2 + \cdots + d_k^2$ است.

۱۵. فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی $F$ و $A$ ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی $F$ باشد. فرض کنید $T$ عملگر خطی «ضرب از چپ در $A$» روی $V$ باشد. آیا این درست است که $A$ و $T$ مقادیر سرشت‌نمای مساوی دارند؟

## ۶.۳. چندجمله‌ایهای پوچساز

در تلاش برای تحلیل عملگر خطی $T$ یکی از مفیدترین مقولاتی که باید بدانیم، ردهٔ چندجمله‌ایهایی است که $T$ را پوچ می‌سازند. به‌بیان دقیقتر، فرض کنیم $V$ فضایی برداری بر روی هیأت $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. اگر $p$ یك چندجمله‌ای بر روی $F$ باشد، آنگاه $p(T)$ نیز عملگری خطی روی $V$ است. اگر $q$ چندجمله‌ای دیگری بر روی $F$ باشد، آنگاه

$$(p+q)(T) = p(T) + q(T)$$
$$(pq)(T) = p(T)q(T).$$

از این‌رو، دستهٔ چندجمله‌ایهای $p$ که $T$ را پوچ می‌سازند، بدین معنی که

$$p(T) = 0$$

یك ایدآل در جبر چندجمله‌ای $F[x]$ است. ایـن ایدآل ممکن است ایدآل صفر باشد، بدین معنی که ممکن است $T$ توسط هیچ چندجمله‌ای غیر صفری پوچ نشود. اما، اگر بعد فضای $V$ متناهی باشد، این امر نمی‌تواند روی دهد.

فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای $n$ بعدی $V$ باشد. $n^2+1$ تواناول $T$ را مورد نظر قرار می‌دهیم:

$$I, T, T^2, \cdots, T^{n^2}.$$

این دنباله، از $n^2+1$ عملگـر در $L(V, V)$، فضای عملگـرهای خطی روی $V$، تشکیل می‌شود. بعد فضای $L(V, V)$ برابر $n^2$ است. بنابراین، این دنباله از $n^2+1$ عملگر باید وابسته خطی باشد؛ یعنی، به‌ازای چند اسکالر $c_i$ که همگی صفر نباشند، داریم

$$c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} = 0.$$

از این رو، ایدآل چندجمله‌ایهایی که $T$ را پوچ می‌سازند شامل چندجمله‌ای غیر صفری از درجهٔ $n^2$ یا کمتر هم هست.

بنا بر قضیهٔ ۵ از فصل ۴، هـر ایدآل چندجمله‌ایها متشکل از همهٔ مضربهای چندجمله‌ای تکین ثابتی است که مولد آن ایدآل است. پس، عملگر $T$ با چندجمله‌ای تکین $p$ با خاصیت زیـر در تناظر است: اگر $f$ چندجملـه‌ای مفروضی بر روی $F$ باشد، آنگاه $f(T) = 0$ اگرو تنها اگر $f = pg$ باشد، که در آن $g$ نیز یك چندجمله‌ای برروی $F$ است.

**تعریف.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ برروی هیأت $F$ باشد. **چندجمله‌ای مینیمال** $T$ عبارت است از (یکتا) مـولـد تکین ایدآل چندجمله‌ایهایی بر روی $F$ که $T$ را پوچ می‌سازند.

نام «چندجمله‌ای مینیمال» از این واقعیت ریشه می‌گیرد که مولد هر ایدآل چندجمله‌ایها با چندجمله‌ای تکین از درجهٔ مینیمم در آن ایدآل مشخص می‌شود. ایـن بدان معنی است که چندجمله‌ای مینیمال $p$ برای عملگر خطی $T$ به‌طور یکتا با سه خاصیت زیر معین می‌شود:

(۱) $p$ چندجمله‌ای تکینی بر روی هیأت اسکالری $F$ است.

(۲) $p(T) = 0$.

(۳) درجهٔ هیچ چندجمله‌ای برروی $F$ که $T$ را پوچ می‌سازد کمتر از درجهٔ $p$ نیست.

اگر $A$ مـاتـریسی $n \times n$ بر روی $F$ باشد، **چندجمله‌ای مینیمال** $A$ را به طریقی مشابه، بـه عنوان یکتا مولد تکین ایدآل همهٔ چندجمله‌ایهای بر روی $F$ کـه $A$ را پوچ می‌سازند، تعریف می‌کنیم. اگر عملگر $T$ در پایـهٔ مرتبی توسط ماتریس $A$ نمایش داده

شود، آنگاه $T$ و $A$ چندجمله‌ای مینیمال مساوی دارند. این بدان خاطراست که $f(T)$ در آن پایه بـا ماتریس $f(A)$ نمایش داده می‌شود وبنابراین، $f(T)=0$ اگـر وتنها اگر $f(A)=0$.

ازتذکراخیردرمورد عملگرها وماتریسها نتیجه‌می‌گیریم که ماتریسهای متشابه‌دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی هستند. این حکم ازتعاریف نیز روشن است، زیرا به‌ازای هرچندجمله‌ای $f$

$$f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P.$$

نکتهٔ اساسی دیگری هـم درمورد چندجمله‌ایهای مینیمال ماتریسها هست کـه باید متذکرشویم. فرض‌کنیم $A$ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت $F$ باشد. فرض‌کنیم $F_1$ هیأتی باشدکه $F$ را به‌عنوان یك زیرهیأت شامل است. (مثلاً، $A$ ممکن است‌ماتریسی با درایه‌های گویا باشد، درحالی‌که $F_1$ هیأت اعداد حقیقی. یا $A$ ممکن است ماتریسی با درایه‌هـای حقیقی باشد، درحالی‌کـه $F_1$ هیأت اعداد مختلط.) می‌توان $A$ را به‌عنـوان ماتریسی $n\times n$ برروی $F$، یابه‌عنوان ماتریسی $n\times n$ برروی $F_1$ محسوب کرد. درظاهر، ممکن‌است به‌نظررسدکه برای $A$دوچندجمله‌ای مینیمال متفاوت به‌دست می‌آید. خوشبختانه این‌طور نیست؛ وباید ببینیم چرا. تعریف چندجمله‌ای مینیمال $A$، درصورتی‌کـه به‌عنوان ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت $F$محسوب شود،چیست؟ همهٔ‌چندجمله‌ایهای تکین باضرایب متعلق به $F$ که $A$ را پوچ می‌سازند درنظر می‌گیریم وآن راکـه باکوچکترین درجه‌است انتخاب می‌کنیم. اگر $f$ چندجمله‌ای تکینی برروی $F$ باشد:

$$f=x^k+\sum_{j=0}^{k-1}a_jx^j \tag{۶-۴}$$

آنگاه $f(A)=0$ صرفاً بیان می‌کندکه رابطه‌ای خطی بین توانهای $A$ در دست است:

$$A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0. \tag{۶-۵}$$

درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال، کـوچکترین عدد صحیح مثبت $k$ است کـه یك رابطهٔ خطی به‌صورت (۶-۵) بین توانهای $I$، $A$، ...، $A^k$ وجـود داشته باشد. بعلاوه، بنابر یکتایی چندجمله‌ای مینیمال به ازای این $k$ یـك وتنها یك رابطه به‌صورت (۶-۵) برقرار است؛ بدین معنی که، وقتی درجهٔ این چندجمله‌ای مینیمال، $k$، تعیین شود، اسکالرهایی یکتا چون $a_0$، ...، $a_{k-1}$ در $F$ یافت می‌شوندکه در(۶-۵) صدق‌کنند. اینها، ضرایب چندجمله‌ای مینیمال هستند.

حال (به‌ازای هر$k$) در(۶-۵) دستگاهی متشکل‌از $n^2$ معادلهٔ‌خطی برای«مجهولهای» $a_0$، ...، $a_{k-1}$ داریم. چون درایه‌های $A$ در $F$ قرار دارند، ضرایب دستگاه معادلات (۶-۵) هم در$F$ هستند. بنابراین، اگردستگاه به‌ازای $a_0$،...،$a_{k-1}$ در $F_1$ جوابی‌داشته باشد، به ازای $a_0$،...،$a_{k-1}$ در $F$ نیز دارای جوابی است. (ر. ك. انتهای بخش۱.۴.) اکنون باید روشن باشدکه دوچندجمله‌ای مینیمال مساوی هستند.

تااینجا چه مطالبی دربارهٔ چندجمله‌ای مینیمال عملگری خطی روی فضایی $n$ بعدی آموخته‌ایم؟ تنها چیزی که می‌دانیم این است که درجهٔ آن از $n^{2}$ تجاوز نمی‌کند. معلوم می‌شود که این تخمین نسبتاً ضعیف است، چراکه این درجه نمی‌تواند بیش از $n$ باشد. بزودی ثابت می‌کنیم که این عملگر به وسیلهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نمایش پوچ می‌شود. ابتدا، به‌مشاهدهٔ حکمی مقدماتی‌تر می‌پردازیم.

**قضیهٔ ۳.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری $n$بعدی $V$ باشد [یا، $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد]. چندجمله‌ایهای سرشت‌نما ومینیمال $T$[یا $A$]، دارای ریشه‌های مساوی ولی احتمالاً با چندگانگیهای متفاوت هستند.

اثبات. گیریم $p$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ و $c$ یك اسکالر باشد. آنچه راکه‌می‌خواهیم نشان بدهیم این است که $p(c)=0$، اگر و تنها اگر $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$ باشد.

ابتدا فرض کنیم $p(c)=0$. دراین صورت

$$p=(x-c)q$$

که درآن $q$ یك‌چندجمله‌ای است. چون $\deg q<\deg p$، تعریف چندجمله‌ای مینیمال $p$ تصریح می‌کند که $q(T)\neq 0$. برداری‌چون $\beta$ انتخاب می‌کنیم که $q(T)\beta\neq 0$. گیریم $\alpha=q(T)\beta$. دراین صورت

$$\begin{aligned}0&=p(T)\beta\\&=(T-cI)q(T)\beta\\&=(T-cI)\alpha\end{aligned}$$

و بنابراین، $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$ است.

حال، فرض کنیم $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$، مثلاً $T\alpha=c\alpha$ و $\alpha\neq 0$، باشد. همان‌طورکه دریکی از لمهای پیش متذکرشدیم

$$p(T)\alpha=p(c)\alpha.$$

چون $p(T)=0$ و $\alpha\neq 0$، داریم $p(c)=0$. □

فرض‌کنیم $T$ یك عملگرخطی قطری‌شدنی و $c_1$، . . . ، $c_k$ مقادیرسرشت‌نمای‌متمایز $T$ باشند. در این صورت بآسانی دیده می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال $T$ عبارت است از چندجمله‌ای

$$p=(x-c_1)\cdots(x-c_k).$$

اگر $\alpha$ یك بردار سرشت‌نما باشد، آنگاه یکی از عملگرهای $T-c_1I$، . . . ، $T-c_kI$ بردار $\alpha$ را به $0$ می‌فرستد. بنابراین به‌ازای هر بردار سرشت‌نمای $\alpha$

$$(T-c_1I)\cdots(T-c_kI)\alpha=0.$$

پایه‌ای برای فضای زمینه وجود دارد که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای $T$ است؛ ازاین‌رو

$$p(T)=(T-c_1I)\cdots(T-c_kI)=0.$$

ماحصل کارمان چنین است. اگر $T$ یك عملگر خطی قطری شدنی باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال $T$ حاصلضربی ازسازه‌های خطی متمایزاست. به‌طوری‌که بزودی خواهیم دید، این خاصیت مشخص‌کننده عملگرهای قطری شدنی است.

**مثال ۴.** سعی مـی‌کنیم چندجمله‌ایهای مینیمال عملگرهای مثالهای ۱، ۲، و ۳ را بیابیم. ما آنها را به‌عکس ترتیب فوق مورد بحث قرارمی‌دهیم. قبلاً معلوم شدکه‌عملگر مثال ۳ قطری‌شدنی و با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-1)(x-2)^2$$

است. از بند قبل بر می‌آید که چندجمله‌ای مینیمال $T$ عبارت است از

$$P=(x-1)(x-2).$$

خواننده می‌تواند با بررسی مستقیم کاملاً اطمینان یابد که

$$(A-I)(A-2I)=0.$$

درمثال ۲، عملگر $T$ نیزچندجمله‌ای سرشت‌نمای $f=(x-1)(x-2)^2$ را دارد. اما، این $T$ قطری‌شدنی نیست ولذا نمی‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال آن $(x-1)(x-2)$ است. در این حالت دربارهٔ چندجمله‌ای مینیمال چه می‌دانیم؟ به واسطهٔ قضیهٔ ۳ می‌دانیم که ریشه‌های این چندجمله‌ای همان ۱ و ۲ هستند، البته احتمالاً باچندگانگیهایی دیگر. پس $p$ رامیان چندجمله‌ایهایی به‌صورت $(x-1)^k(x-2)^l$، $k\geqslant 1$، $l\geqslant 1$ جستجومی کنیم. چندجمله‌ای $(x-1)(x-2)$ را آزمایش می کنیم:

$$(A-I)(A-2I)=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

از این‌رو، درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال اقلاً ۳ است. پس، باید $(x-1)^2(x-2)$ یا $(x-1)(x-2)^2$ را بیازماییم. دومی که چندجمله‌ای سرشت‌نما است، انتخابی محتمل به‌نظرمی‌رسد. بآسانی‌می‌توان محاسبه‌کردکه $(A-I)(A-2I)^2=0$. پس، چندجمله‌ای مینیمال $T$ همان چندجمله‌ای سرشت‌نمای آن است.

در مثال ۱، عملگرخطی $T$ روی $R^2$ راکه درپایهٔ استانده توسط ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود مورد بحث قرار دادیم. چندجمله‌ای سرشت‌نما، $x^2+1$ است که هیچ ریشهٔ حقیقی ندارد. برای تعیین چندجمله‌ای مینیمال $T$، را کنار می گذاریم و حواس خود را روی $A$ متمرکز می کنیم. به‌عنوان ماتریسی مختلط، $A$ دارای مقادیر سرشت‌نمای $i$ و $-i$ است. هر دو ریشه باید در چندجمله‌ای مینیمال ظاهر شوند. پس چندجمله‌ای مینیمال بر $x^2+1$ تقسیم‌پذیر است. بآسانی می‌توان نشان داد که $A^2+I=0$. بنابراین، چندجمله‌ای مینیمال $x^2+1$ است.

**قضیهٔ ۴ (کیلی-همیلتن)**[1]. عملگر خطی $T$ روی فضای برداری بعد متناهی $V$ داده شده است. اگر $f$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ باشد، آنگاه $f(T)=0$؛ به بیان دیگر، چندجمله‌ای مینیمال $T$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ را عاد می‌کند.

اثبات. بعدها دو اثبات دیگر از این قضیه، مستقل از اثبات ارائه شده در اینجا، عرضه خواهیم کرد. اثبات حاضر هرچند کوتاه، ولی احتمالاً فهم آن مشکل است. گذشته از اختصار، این اثبات این حسن را هم دارد که کاربردی آموزنده و کاملاً غیربدیهی از نظریهٔ عمومی دترمینانها که در فصل ۵ گسترش یافت، عرضه می کند.

فرض کنیم $K$ حلقهٔ جابجایی با عنصرهمانی متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای از $T$ باشد. بدیهی است که $K$ در واقع جبری جابجایی با عنصرهمانی برروی هیأت اسکالری است. پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای $V$ انتخاب می‌کنیم و $A$ را ماتریسی می گیریم که $T$ را در آن پایه نمایش می‌دهد. دراین صورت

$$T\alpha_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j, \qquad 1\leqslant i\leqslant n .$$

این معادلات را می‌توان به‌صورت هم‌ارز

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ji}T-A_{ji}I)\alpha_j=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

نیز نوشت. فرض کنیم $B$ عنصری از $K^{n\times n}$ با درایه‌های

$$B_{ij}=\delta_{ij}T-A_{ji}I$$

باشد. وقتی $n=2$

$$B=\begin{bmatrix} T-A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T-A_{22}I \end{bmatrix}$$

---

1. Cayley-Hamilton

و

$$\det B = (T - A_{11}I)(T - A_{22}I) - A_{12}A_{21}I$$
$$= T^2 - (A_{11} + A_{22})T + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})I$$
$$= f(T)$$

که در آن $f$ چندجمله‌ای سرشت‌نما است:

$$f = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A.$$

درحالت $n > 2$ نیز روشن است که

$$\det B = f(T)$$

چراکه $f$ دترمینان ماتریس $xI - A$ است که درایه‌هایش چندجمله‌ایهای

$$(xI - A)_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ij}$$

می‌باشند.[1]

می‌خواهیم نشان دهیم کــه $f(T) = 0$. برای‌اینکه $f(T)$ عملگر صفر باشد لازم و کافی است کــه به‌ازای $k = 1, \cdots, n$، $(\det B)\alpha_k = 0$. طبــق تعریف $B$، بردارهای $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_n$ درمعادلات

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{۶-۶}$$

صدق می‌کنند. وقتی $n = 2$ ، نوشتن (۶-۶) به‌صورت

$$\begin{bmatrix} T - A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T - A_{22}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الهام‌بخش است. دراین حالت، الحاقی کــلاسیك، یعنی $\operatorname{adj} B$، عبارت است ازماتریس

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} T - A_{22}I & A_{21}I \\ A_{12}I & T - A_{11}I \end{bmatrix}$$

و

---

۱. این قسمت از اثبات اندکی تصحیح شده است درمتن اصلی دراین رابطه بجای $A_{ij}$، $A_{ji}$ آمده است که با تصحیح این اشتباه، شکافی در اثبات به‌وجود می‌آید. خوشبختانه با استفاده از

$$f = \det(xI - A) = \det(xI - A)^t \quad \text{و} \quad (xI - A)^t_{ij} = xI_{ji} - A_{ji}$$

نتیجه‌مطلوب؛یعنی، $\det(B) = \det(TI - A)^t = \det(TI - A) = f(T)$ به‌دست‌می‌آید.ـم.

www.riazisara.ir



$$\tilde{B}B=\begin{bmatrix}\det B & \circ\\ \circ & \det B\end{bmatrix}.$$

از این‌رو، داریم

$$(\det B)\begin{bmatrix}\alpha_۱\\ \alpha_۲\end{bmatrix}=(\tilde{B}B)\begin{bmatrix}\alpha_۱\\ \alpha_۲\end{bmatrix}$$
$$=\tilde{B}\left(B\begin{bmatrix}\alpha_۱\\ \alpha_۲\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}\circ\\ \circ\end{bmatrix}.$$

درحالت کلی، فرض کنیم $\tilde{B}=\operatorname{adj} B$. دراین صورت بنابر (۶-۶) به‌ازای هرجفت $k$ ، $i$

$$\sum_{j=۱}^{n}\tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j=\circ,$$

وبا مجموع گیری روی $i$، داریم

$$\circ=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j$$
$$=\sum_{j=۱}^{n}\Big(\sum_{i=۱}^{n}\tilde{B}_{ki}B_{ij}\Big)\alpha_j.$$

حال $\tilde{B}B=(\det B)I$، و ازاین‌رو

$$\sum_{i=۱}^{n}\tilde{B}_{ki}B_{ij}=\delta_{kj}\det B\ .$$

پس

$$\circ=\sum_{j=۱}^{n}\delta_{kj}(\det B)\alpha_j$$
$$=(\det B)\alpha_k,\qquad ۱\leqslant k\leqslant n\ .\ \square$$

قضیهٔ کیلی-همیلتن، عمدتاً بدین‌خاطر دراین مرحله مفید است که حیطهٔ جستجو برای چندجمله‌ایهای مینیمال عملگرهای گوناگون را محدود می‌سازد. اگر ماتریس $A$ را که نمایشگر $T$ درپایهٔ مرتبی است بشناسیم، آنگاه می‌توانیم چندجمله‌ای سرشت‌نمای آن، $f$، را محاسبه کنیم. می‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال $p$ چندجمله‌ای $f$ را عاد می‌کند و هردو

ریشه‌های مساوی دارند. هیچ روش خاصی برای محاسبهٔ دقیق ریشه‌های چندجمله‌ایها (مگردرصورت کوچك بودن درجه) در دست نیست؛ اما، اگر $f$ به‌سازه‌ها تجزیه شود:

$$f=(x-c_۱)^{d_۱}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$ ، با فرض متمایز بودن $c_۱$، ...، $c_k$، $d_i\geqslant ۱$ (۶-۷)

آنگاه

$$p=(x-c_۱)^{r_۱}\cdots(x-c_k)^{r_k}, \qquad ۱\leqslant r_j\leqslant d_j. \qquad (۶\text{-}۸)$$

این تنها چیزی است که درحالت عمومی می‌توان ابراز کرد. اگر $f$ چندجمله‌ای (۶-۷) با درجهٔ $n$ باشد، آنگاه به‌ازای هرچندجمله‌ای $p$ نظیر (۶-۸) می‌توانیم ماتریسی $n\times n$ بیابیم که $f$ را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای خود و $p$ را به‌عنوان چندجمله‌ای‌مینیمال خود دارا باشد. این مطلب را حالا اثبات نمی‌کنیم. ولی، می‌خواهیم این واقعیت را تأکید کنیم که علم به‌اینکه چندجمله‌ای سرشت‌نما شکل (۶-۷) را دارد، تصریح می‌کند که چندجمله‌ای مینیمال به‌شکل (۶-۸) است وهیچ چیزدیگری درمورد $p$ ابراز نمی‌کند.

**مثال ۵.** گیریم $A$ ماتریس (گویای) ۴ × ۴

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

باشد. توانهای $A$ بسادگی قابل محاسبه‌اند:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۰ & ۴ \\ ۴ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۴ \\ ۴ & ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}.$$

پس $A^۳ = ۴A$؛ یعنی، اگر $p = x^۳ - ۴x = x(x+۲)(x-۲)$، آنگاه $p(A) = ۰$ چندجمله‌ای مینیمال $A$ باید $p$ را تقسیم کند. این چندجمله‌ای مینیمال بوضوح از درجهٔ ۱ نیست، چرا که این مطلب بدان معنی است که $A$ مضربی اسکالری از عنصرهمانی است. از این‌رو، نامزدهای چندجمله‌ای مینیمال عبارتند از: $p$، $x(x+۲)$، $x(x-۲)$، و $x^۲ - ۴$. سه چندجمله‌ای درجهٔ دوم را می‌توان حذف کرد، زیرا با یك‌نظر آشکار است که $A^۲ \neq -۲A$، $A^۲ \neq ۲A$، و $A^۲ \neq ۴A$. بنابراین $p$ چندجمله‌ای‌مینیمال $A$ است. بخصوص ۰، ۲ و ۲ــ مقادیر سرشت‌نمای $A$ هستند. یکی از سازه‌های $x$، $x-۲$، و $x+۲$ باید دوبار درچندجمله‌ای سرشت‌نما تکرار شود. آشکار است که رتبهٔ $(A) = ۲$. درنتیجه، فضایی دوبعدی از بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای ۰ وجود دارد. اکنون ازقضیهٔ ۲ باید روشن باشد که چندجمله‌ای‌سرشت‌نما $x^۲(x^۲ - ۴)$ است، ونیزاینکه $A$ برروی هیأت اعداد گویا با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

متشابه است.

## تمرین

۱. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی باشد. چندجمله‌ای مینیمال عملگر همانی روی $V$ کدام است؟ چندجمله‌ای مینیمال عملگرصفرچیست؟

۲. فرض کنید $a$، $b$، و $c$ عناصرهیأت $F$ و $A$ ماتریس ۳×۳ زیربرروی $F$ باشد:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & c \\ ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۱ & a \end{bmatrix}.$$

ثابت کنید چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ عبارت است از $x^۳ - ax^۲ - bx - c$ و این، چندجمله‌ای مینیمال $A$ نیزهست.

۳. فرض کنید $A$ ماتریس حقیقی ۴×۴

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$، $x^2(x-1)^2$ است که چندجمله‌ای مینیمال آن نیز هست.

**۴. آیا ماتریس $A$ از تمرین ۳ برروی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است؟**

۵. فضای برداری $n$بعدی $V$ و عملگر خطی $T$ روی $V$ داده شده‌اند. فرض کنید عدد صحیح مثبتی چون $k$ موجود است که $T^k=0$. ثابت کنید $T^n=0$.

۶. ماتریسی $3\times 3$ بیابید که چندجمله‌ای مینیمال آن $x^2$ باشد.

۷. فرض کنید $n$ عددی صحیح مثبت و $V$ فضای چندجمله‌ایهای برروی $R$ که درجهٔ آنها حداکثر $n$ است باشد (چندجمله‌ای $0$ را نیز در $V$ قرار دهید). فرض کنید $D$ عملگر مشتق‌گیری روی $V$ باشد. چندجمله‌ای مینیمال $D$ کدام است؟

۸. فرض کنید $P$ عملگری روی $R^2$ باشد که هر بردار را به‌موازات محور $y$ها بروی محور $x$ها تصویرکند: $P(x, y)=(x, 0)$. نشان دهید که $P$ خطی است. چندجمله‌ای مینیمال $P$ چیست؟

۹. فرض کنید $A$ ماتریسی $n\times n$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

باشد. نشان دهید که

$$c_1d_1+\cdots+c_kd_k=\operatorname{tr}(A).$$

۱۰. فرض کنید $V$ فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشد. فرض کنید $A$ یك ماتریس $n\times n$ ثابت و $T$ عملگر خطی روی $V$ تعریف شده توسط

$$T(B)=AB$$

باشد. نشان دهید که چندجمله‌ای مینیمال $T$ برابر چندجمله‌ای مینیمال $A$ است.

۱۱. ماتریسهای $A$ و $B$ی $n\times n$ برروی هیأت $F$ داده شده‌اند. بنابر تمرین ۹ در بخش

۱.۶ دوماتریس $AB$ و $BA$ دارای مقادیرسرشت‌نمای مساوی‌اند. آیا چندجمله‌ایهای سرشت نمای آنها هم مساوی‌اند؟ آیا چند جمله‌ایها مینیمال آنها مساوی‌اند؟

## ۴.۶. زیرفضاهای پایا

دراین بخش به‌معرفی چند مفهوم می‌پردازیم که در تحلیل عملگرهای خطی مفید واقع خواهند شد. از این ایده‌ها برای به‌دست آوردن سرشت‌نمایی عملگرهای قطری شدنی (و مثلثی شونده) برحسب چندجمله‌ایهای مینیمالشان، استفاده خواهیم کرد.

**تعریف.** فرض کنیم $V$ فضایی برداری و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. اگر $W$ زیرفضایی از $V$ باشد، گوییم $W$ **تحت $T$ پایا** است، هرگاه به‌ازای هر بردار $\alpha$ در $W$، بردار $T\alpha$ هم در $W$ باشد؛ یعنی، هرگاه $T(W)$ مشمول $W$ باشد.

**مثال ۶.** اگر $T$ عملگر خطی دلخواهی روی $V$ باشد، آنگاه $V$ تحت $T$ پایاست، همین‌طور است زیرفضای صفر. برد $T$ وفضای پوچ $T$ نیز تحت $T$ پایا هستند.

**مثال ۷.** هیأت $F$ وعملگرمشتق‌گیری $D$روی‌فضای $F[x]$ متشکل ازچندجمله‌ایهای برروی $F$ مفروض‌اند. فرض کنیم $n$عددی صحیح مثبت و $W$ زیرفضای چندجمله‌ایهای از درجهٔ حداکثر $n$ باشد. دراین صورت $W$ تحت $D$ پایاست. این امردقیقاً طریق دیگربیان این مطلب است که $D$ «کاهش‌دهندهٔ درجه» است.

**مثال ۸.** دراینجا به‌تعمیمی بسیار مفید ازمثال ۶ می‌پردازیم. عملگرخطی $T$ روی $V$ مفروض است. فرض کنیم $U$عملگرخطی‌دلخواهی روی $V$ باشدکه با $T$ جابجامی‌شود؛ یعنی $TU=UT$. همچنین فرض کنیم $W$ برد $U$ و $N$ فضای پوچ $U$ باشد. $W$ و $N$ هردو تحت $T$پایا هستند. اگر $\alpha$ دربرد $U$باشد، مثلاً $\alpha=U\beta$، آنگاه $T\alpha=T(U\beta)=U(T\beta)$ و ازاین‌رو، $T\alpha$ در برد $U$ قرارد دارد. اگر $\alpha$ در $N$ باشد، آنگاه

$$U(T\alpha)=T(U\alpha)=T(0)=0\ ;$$

پس، $T\alpha$ متعلق به $N$ است.

نوع خاصی از عملگرهایی‌که با $T$ جابجا می‌شوند، عملگری چون $U=g(T)$ است‌که درآن $g$ یك‌چندجمله‌ای است. مثلاً، ممکن است داشته باشیم $U=T-cI$ که درآن $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$ است، فضای پوچ $U$ برای ما آشناست. می‌بینیم که‌این مثال، این حکم (بدیهی) را شامل است‌که فضای‌بردارهای سرشت‌نمای $T$وابسته‌به‌مقدار سرشت‌نمای $c$ تحت $T$ پایا است.

**مثال ۹.** فرض‌کنیم $T$عملگری‌خطی‌روی$R^2$ باشدکه درپایهٔ مرتب‌استانده باماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. دراین صورت تنها زیرفضاهایی از $R^۲$ که تحت $T$ پایا هستند، عبارتند از $R^۲$ و زیرفضای صفر. هرزیرفضای پایای دیگری لزوماً باید دارای بعد یك باشد. اما، اگر $W$ زیرفضایی باشد که توسط بردار غیرصفر $\alpha$ پدید می‌آید، این حکم که $W$ تحت $T$ پایاست به‌معنی این است که $\alpha$ یك بردار سرشت‌نماست، ولی $A$ هیچ مقدار سرشت‌نمای حقیقیِ ندارد.

هرگاه زیرفضای $W$ تحت عملگر $T$ پایا باشد، $T$ عملگری خطی چون $T_W$ روی فضای $W$ القا می‌کند. عملگر خطی $T_W$ طبق $T_W(\alpha)=T(\alpha)$، به‌ازای هر $\alpha$ در $W$، تعریف می‌شود، ولی $T_W$ با $T$ کاملاً متفاوت است، زیرا دامنه آن $W$ است نه $V$.

وقتی بعد $V$ متناهی باشد، پایایی $W$ تحت $T$ تعبیرماتریسی ساده‌ای دارد و شاید بهتر باشد که آن را در اینجا ذکرکنیم. فرض‌کنیم پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_۱,\dots,\alpha_n\}$ را برای $V$ چنان انتخاب کرده باشیم که $\mathcal{B}'=\{\alpha_۱,\dots,\alpha_r\}$ پایهٔ مرتبی برای $W$ باشد $(r=\dim W)$. گیریم $A=[T]_{\mathcal{B}}$ وازآنجا

$$T\alpha_j=\sum_{i=۱}^{n}A_{ij}\alpha_i\,.$$

چون $W$ تحت $T$ پایاست، به‌ازای $j\leqslant r$ بردار $T\alpha_j$ به $W$ تعلق دارد. این بدان معنی است که

$$T\alpha_j=\sum_{i=۱}^{r}A_{ij}\alpha_i,\qquad j\leqslant r. \tag{۹-۶}$$

به‌عبارت دیگر، هرگاه $j\leqslant r$ و $i>r$، $A_{ij}=۰$.

از نظرظاهر، $A$ به‌صورت بلوکی

$$A=\begin{bmatrix} B & C \\ ۰ & D \end{bmatrix} \tag{۱۰-۶}$$

است، که‌درآن $B$ماتریسی $r\times r$، $C$ماتریسی $r\times(n-r)$، و$D$ماتریسی $(n-r)\times(n-r)$ است. خواننده توجه داردکه بنابر (۶-۹)، ماتریس $B$ دقیقاً ماتریس عملگر القا شدهٔ $T_W$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ است.

اکثر اوقات، بحث در خصوص $T$ و $T_W$ را بدون استفاده از صورت بلوکی ماتریس $A$ در (۶-۱۰) انجام می‌دهیم. اما، به‌این نکته‌که روابط معین بین $T_W$ و $T$ چگونه از این صورت بلوکی دیده می‌شوند باید توجه‌کرد.

**لم.** فرض کنیم $W$ زیرفضایی پایا از $T$ باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای عملگر

تحدیدی $T_W$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ را عاد می‌کند، و نیزچندجمله‌ای مینیمال $T_W$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ را.

اثبات. داریم

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

که در آن $A = [T]$ و $B = [T_W]_{\mathcal{B}}$. به واسطهٔ صورت بلوکی این ماتریس

$$\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D).$$

این تساوی، حکم در خصوص چندجمله‌ایهای سرشت‌نما را اثبات می‌کند. توجه داشته باشیدکه $I$ برای نمایش ماتریسهای همانی با سه‌اندازهٔ مختلف، به‌کار رفته است.

$k$مین توان ماتریس $A$ دارای صورت بلوکی

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

است که در آن $C_k$ ماتریسی $r \times (n-r)$ است. بنابراین، هرچند جمله‌ای که $A$ را پوچ سازد $B$ را نیز (و ایضاً $D$ را) پوچ می‌سازد. از این‌رو، چندجمله‌ای مینیمال $B$ چندجمله‌ای مینیمال $A$ را عاد می‌کند. □

**مثال ۱۰.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای بابعد متناهی $V$، $W$ زیرفضای پدیدآمده توسط همهٔ بردارهای سرشت‌نمای $T$ و $c_1$، ...، $c_k$ مقادیرسرشت‌نمای متمایز $T$ باشند. به‌ازای هر $i$، گیریم $W_i$ فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c_i$ و $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای $W_i$ باشد. لم پیش از قضیهٔ ۲ می‌گویدکه $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \cdots, B_k)$ پایهٔ مرتبی برای $W$ است. بویژه

$$\dim W = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k.$$

فرض کنیم $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ به صورتی باشدکه چند $\alpha$ی نخست آن پایه $\mathcal{B}_1$، چندتای بعدی پایهٔ $\mathcal{B}_2$، و به‌همین نحوبقیه را تشکیل دهند. با این قرار

$$T\alpha_i = t_i\alpha_i, \qquad i = 1, \cdots, r$$

که‌درآن $(t_1, \cdots, t_r) = (c_1, c_1, \cdots, c_1, \cdots, c_k, c_k, \cdots, c_k)$ واین‌درحالی است که $c_i$ به‌تعداد $\dim W_i$ بار تکرار شده باشد.

حال $W$ تحت $T$ پایاست، چراکه به‌ازای هر $\alpha$ در $W$ داریم

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r$$

$$T\alpha = t_1 x_1 \alpha_1 + \cdots + t_r x_r \alpha_r.$$

بردارهای دیگری چون $\alpha_{r+1}$، $\cdots$، $\alpha_n$ را در $V$ به‌نحوی انتخاب می‌کنیم که $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. ماتریس $T$ نسبت به $\mathscr{B}$ صورت بلوکی (۶-۱۰) را دارد وماتریس عملگر تحدیدی $T_W$ نسبت به‌پایهٔ $\mathscr{B}'$ برابر با

$$B = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & t_r \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای سرشت‌نمای $B$ (یعنی، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T_W$) عبارت است از

$$g = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_k)^{e_k}$$

که درآن $e_i = \dim W_i$. از این گذشته، $g$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $f$ از $T$ را عاد می‌کند. بنابراین، چندگانگی $c_i$، به‌عنوان ریشه‌ای از $f$، حداقل برابر $\dim W_i$ است.

این مطالب باید قضیهٔ ۲ را روشن‌کرده باشند. قضیهٔ مذکور صرفاً بیان می‌کند که $T$ قطری شدنی است اگر و تنها اگر $r = n$ یا اگروتنها اگر $e_1 + \cdots + e_k = n$. در حالت قطری نشدنی این مطالب کمك زیادی نمی‌کنند، چراکه ماتریسهای $C$ و $D$ در (۶-۱۰) را نمی‌شناسیم.

**تعریف.** فرض کنیم $W$ زیرفضایی پایا از $T$ و $\alpha$ برداری از $V$ باشد. **$T$ـ هادی $\alpha$ در $W$** عبارت است از مجموعهٔ $S_T(\alpha; W)$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای $g$ (بررویِ هیأت اسکالری) که $g(T)\alpha$ متعلق به $W$ باشد.

چون عملگر $T$ در بیشتر مباحث ثابت است، معمولاً زیرنمایهٔ $T$ را حذف‌می‌کنیم و می‌نویسیم $S(\alpha; W)$. مؤلفین معمولاً این دسته از چندجمله‌ایها را «پرکننده» (ایدال پرکننده) می‌نامند. «هادی» اصطلاح متداول‌تری است که مورد ترجیح کسانی است که عملگر نه‌چندان مهاجم $g(T)$ را در تصور دارندکه با ملایمت بردار $\alpha$ را به $W$ سوق می‌دهد. درحالت خاص $W = \{0\}$، هادی را **$T$ـ پوچساز $\alpha$** می‌نامیم.

**لم.** اگر $W$ زیرفضای پایایی برای $T$ باشد، آنگاه $W$ تحت هرچندجمله‌ای در $T$ پایاست. پس، به ازای هر $\alpha$ در $V$، هادی $S(\alpha; W)$ ایدآلی در جبرچندجمله‌ای $F[x]$ است.

اثبات. اگر $\beta$ در $W$ باشد، آنگاه $T\beta$ متعلق به $W$ است. در نتیجه،

$T(T\beta)=T^2\beta$ هم در $W$ است. به‌استقرا، به‌ازای هر $k$، بردار $T^k\beta$ در $W$ است. با در نظر گرفتن ترکیبات خطی، دیده می‌شود که به‌ازای هرچندجمله‌ای $f$، $f(T)\beta$ متعلق به $W$ است.

اگر $W$ زیر مجموعهٔ دلخواهی از $V$ باشد، تعریف $S(\alpha; W)$ بامعنی است. اگر $W$ یك زیرفضا باشد، آنگاه $S(\alpha; W)$ هم زیرفضایی از $F[x]$ است، زیرا

$$(cf+g)(T)=cf(T)+g(T).$$

درصورتی که $W$ تحت $T$ نیز پایا باشد، $g$ را یك چندجمله‌ای در $S(\alpha; W)$ می گیریم؛ یعنی، فرض می‌کنیم $g(T)\alpha$ در $W$ باشد. اگر $f$ یك چندجمله‌ای دلخـواه باشد، آنگاه $f(T)[g(T)\alpha]$ در $W$ است. چون

$$(fg)(T)=f(T)g(T)$$

$fg$ متعلق به $S(\alpha; W)$ است. پس مجموعهٔ هادی، عمل ضرب در هرچندجمله‌ای دلخواه را پذیراست. □

یکتا مولـد تکین ایدآل $S(\alpha; W)$، **$T$- هادی $\alpha$ در $W$** ($T$- **پوچساز**، در حـالت $W=\{0\}$) نیز نامیده می‌شود. $T$- هادی $\alpha$ در $W$ چندجمله‌ای تکینی مانند $g$ با کمترین درجه است که $g(T)\alpha$ در $W$ باشد. چندجمله‌ای $f$ در $S(\alpha; W)$ است اگروتنها اگر $g$ چندجمله‌ای $f$ را عاد کند. توجه کنید که هادی $S(\alpha; W)$ همواره چندجمله‌ای مینیمال $T$ را شامل است؛ از این‌رو، هر $T$- هادی چندجمله‌ای مینیمال $T$ را عاد می کند.

به‌عنوان اولین مثال از چگونگی استفاده از هـادی $S(\alpha; W)$، عملگرهای مثلثی شونده را سرشت‌نمایی می کنیم. عملگر خطی $T$ **مثلثی‌شونده** نامیده می‌شود، هرگاه پایـهٔ مرتبی وجود داشته باشد که درآن $T$ با ماتریسی مثلثی نمایش داده شود.

**لم.** فرض کنیم $V$ فضایی برداری بـا بعد متناهی برروی هیأت $F$ و $T$ عملگـری خطی روی $V$ باشد که چندجمله‌ای مینیمال $T$ حاصل‌ضربی از سازه‌های خطی به‌صورت

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k} \quad \text{با فرض } c_i \text{ در } F$$

باشد. همچنین فرض کنیم $W$ زیرفضایی سره $(W\neq V)$ از $V$ باشد که تحت $T$ پایاست. برداری چون $\alpha$ در $V$ وجود دارد که

(الف) $\alpha$ در $W$ نیست؛

(ب) به‌ازای یك مقـدار سرشت‌نمای $c$ از عملگر $T$، بردار $(T-cI)\alpha$ متعلق به $W$ است.

اثبات. آنچه راکه (الف) و (ب) بیان می کنند این است که $T$- هـادی $\alpha$ در $W$ یك چندجمله‌ای خطـی است. گیریم $\beta$ برداری در $V$ باشد کـه در $W$ نباشد و $g$ برابر $T$- هادی $\beta$ در $W$ باشد. در این صورت $g$ چندجمله‌ای مینیمال $p$ از $T$ را عاد می کند.

چون $\beta$ در $W$ قرار ندارد، چندجمله‌ای $g$ ثابت نیست. بنابراین،

$$g=(x-c_1)^{e_1}\cdots(x-c_k)^{e_k}$$

که در آن حداقل یکی از اعداد صحیح $e_i$ مثبت است. $j$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $e_j>0$. دراین صورت $(x-c_j)$ چندجمله‌ای $g$ را عاد می‌کند:

$$g=(x-c_j)h.$$

بنا بر تعریف $g$، بردار $\alpha=h(T)\beta$ نمی‌تواند در $W$ باشد. اما

$$\begin{aligned}(T-c_jI)\alpha&=(T-c_jI)h(T)\beta\\&=g(T)\beta\end{aligned}$$

متعلق به $W$ است. □

**قضیهٔ ۵.** فرض کنیم $V$ فضایی برداری با بعدمتناهی برروی هیأت $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. در این صورت $T$ مثلثی شونده است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال $T$ حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای خطی برروی $F$ باشد.

اثبات. فرض کنیم چندجمله‌ای مینیمال، به‌صورت

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$$

به‌سازه‌ها تجزیه شود. با به‌کاربستن مکرر لم بالا، به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ دست می‌یابیم که در آن نمایش ماتریسی $T$ بالامثلثی است:

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}. \qquad (۶-۱۱)$$

(۶-۱۱) صرفاً بیان می‌کند که

$$T\alpha_j=a_{1j}\alpha_1+\cdots+a_{jj}\alpha_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant n \qquad (۶-۱۲)$$

یعنی، $T\alpha_j$ در زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_j$ قرار دارد. برای یافتن $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_n$ با به‌کاربردن لم درمورد زیرفضای $W=\{0\}$اول $\alpha_1$ را به‌دست‌می‌آوریم. آنگاه لم را درمورد $W_1$، فضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$، به‌کار می‌بندیم تا $\alpha_2$ را به‌دست آوریم. سپس لم را درمورد $W_2$، فضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$ و $\alpha_2$، به کار می‌بندیم، و

به‌همین طریق ادامه می‌دهیم. یك نکته را هم باید متذکر شویم. پس از اینکه $\alpha_1$، ۰۰۰، $\alpha_n$ را یافتیم، این روابط مثلث گونهٔ (۶ — ۱۲)، به‌ازای $j=1, \ldots, i$، هستند که متضمن پایا بودن زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$،۰۰۰،$\alpha_i$ تحت عملگر $T$ هستند.

اگر $T$ مثلثی شونده باشد، بدیهی است که چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ به‌صورت

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k} \text{، } c_i \text{ در } F$$

است. اکنون به‌ماتریس‌مثلثی (۶-۱۱) توجه کنید. درایه‌های قطری $\alpha_{11}$،۰۰۰،$\alpha_{nn}$ مقادیر سرشت‌نما هستند که $c_i$ بــه تعداد $d_i$ بار تکرار می‌شود. اما، اگر $f$ بتواند بدین صورت تجزیه شود، چندجمله‌ای مینیمال $p$ نیز این طور تجزیه می‌شود، چرا که $p$ چندجمله‌ای $f$ را عاد می‌کند. □

**نتیجه.** فرض کنیم $F$ یك هیأت بستهٔ جبری، چـون هیأت اعداد مختلط باشد. هر ماتریس $n\times n$ بر روی $F$، با یك ماتریس مثلثی بر روی $F$ متشابه است.

**قضیهٔ ۶.** فضای برداری با بعد متناهی $V$ بر روی هیأت $F$ و عملگرخطی $T$ روی $V$ داده شده‌اند. $T$ قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال $T$ به‌صورت

$$p=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$$

باشد که در آن $c_1$،۰۰۰،$c_k$ عناصری متمایز از $F$ هستند.

اثبات. قبلاً گفته‌ایم که اگر $T$ قطری شدنی باشد، چندجمله‌ای مینیمال آن حاصل‌ضربی از سازه‌های خطی متمایز است (ر. ك. بحث پیش از مثال ۴). برای اثبات حالت عکس، $W$ را زیر فضای پـدیـدآمده توسط همهٔ بردارهای سرشت‌نمای $T$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W\neq V$. بنا بر لمی که در اثبات قضیهٔ ۵ به‌کار رفت، برداری چون $\alpha$ که در $W$ نیست و نیز مقدار سرشت‌نمایی چون $c_j$ از $T$ وجود دارند که بردار

$$\beta=(T-c_jI)\alpha$$

در $W$ قرار می‌گیرد. چون $\beta$ در $W$ است،

$$\beta=\beta_1+\cdots+\beta_k$$

که در آن $T\beta_i=c_i\beta_i$، $1\leqslant i\leqslant k$ و بنابراین به‌ازای هر چندجمله‌ای $h$، بردار

$$h(T)\beta=h(c_1)\beta_1+\cdots+h(c_k)\beta_k$$

در $W$ قرار دارد.

حال، یك چندجمله‌ای چون $q$ وجود دارد که $p=(x-c_j)q$. همچنین

$$q-q(c_j)=(x-c_j)h.$$

پس، داریم

$$q(T)\alpha-q(c_j)\alpha=h(T)(T-c_jI)\alpha=h(T)\beta.$$

اما $h(T)\beta$ متعلق به $W$ است و چون

$$0=p(T)\alpha=(T-c_jI)q(T)\alpha$$

بردار $q(T)\alpha$ در $W$ قرار دارد. بنابراین، $q(c_j)\alpha$ هم در $W$ است. چون $\alpha$ در $W$ نیست، $q(c_j)=0$. این مطلب متناقض با این واقعیت است که $p$ ریشه‌های متمایزی دارد. □

درانتهای بخش ۷.۶، اثبات متفاوتی از قضیهٔ ۶ ارائه خواهیم کرد. قضیهٔ ۶ علاوه بر اینکه نتیجهٔ زیبایی است، از نظر محاسباتی نیز مفید است. فرض کنیم عملگر خطی $T$ که در پایهٔ مرتبی با ماتریس $A$ نمایش داده می‌شود در دست باشد و بخواهیم بدانیم که آیا $T$ قطری شدنی است یا نه. چند جمله‌ای سرشت‌نمای $f$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بتوانیم $f$ را به‌سازه‌ها تجزیه کنیم:

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

دو روش متفاوت برای تعیین اینکه آیا $T$ قطری شدنی است یا نه، در اختیار داریم. یك روش این است که ببینیم آیا می‌توانیم به‌ازای هر $i$، تعداد $d_i$ بردار سرشت نمای مستقل، وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c_i$، بیابیم یا نه. روش دیگر، بررسی این مطلب است که آیا $(T-c_1I)\cdots(T-c_kI)$ عملگرصفرهست یا نه.

قضیهٔ ۵، اثبات متفاوتی از قضیهٔ کیلی-همیلتن به‌دست می‌دهد. قضیهٔ اخیر درمورد ماتریسهای مثلثی آسان است. از این‌رو، به واسطهٔ قضیهٔ ۵، نتیجه را برای هر ماتریس دلخواه بر روی هیأتی بستهٔ جبری، به‌دست می‌آوریم. هر هیأت، زیرهیأتی از یك هیأت بستهٔ جبری است. با دانستن این قضیه، اثباتی برای قضیهٔ کیلی-همیلتن برای ماتریسهای‌بر روی هیأتی دلخواه به‌دست می‌آید. اگر در این بحث، دست‌کم قضیهٔ بنیادی جبر (هیأت اعداد مختلط بستهٔ جبری است) را بپذیریم،آنگاه قضیهٔ ۵ اثباتی از قضیهٔ کیلی-همیلتن برای ماتریسهای مختلط هم فراهم می‌آورد و این اثبات مستقل از اثباتی است که قبلاً ارائه کردیم.

## تمرین

۱. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $R^2$ باشد که ماتریس آن در پایهٔ مرتب استانده

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

است.

(الف) ثابت کنید تنها زیرفضاهای $R^2$ که تحت $T$ پایا هستند، $R^2$ و زیرفضای

صفر می‌باشند.

(ب) اگرماتریس عملگر خطی $U$ روی $C^2$ در پایهٔ مرتب استانده $A$ باشد،نشان دهید $U$ دارای زیرفضاهای پایای یك بعدی است.

۲. فرض‌کنید $W$ زیرفضای پایایی برای $T$ باشد. بدون رجوع به‌ماتریسها، ثابت‌کنید که چندجمله‌ای مینیمال عملگر تحدیدی $T_W$، چندجمله‌ای مینیمال $T$ را عاد می‌کند.

۳. $c$ را یك مقدار سرشت‌نمای $T$ و $W$ را فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c$ بگیرید. عملگر تحدیدی $T_W$ چیست؟

۴. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ & ۲ \\ ۲ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}.$$

آیا $A$ بر روی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی مثلثی متشابه است؟ اگر این طورباشد، چنین ماتریس مثلثی را بیابید.

۵. هر ماتریس $A$، با این خاصیت که $A^2=A$، با ماتریسی قطری متشابه است.

۶. فرض‌کنید $T$ یك عملگر خطی قطری شدنی روی فضای برداری $n$ بعدی $V$ باشد. اگر $W$ زیرفضایی باشدکه تحت $T$ پایاست، ثابت‌کنید عملگر تحدیدی $T_W$قطری‌شدنی است.

۷. فرض‌کنید $T$ عملگرخطی روی یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت‌اعداد مختلط باشد. ثابت‌کنید $T$ قطری شدنی است اگروتنها اگر $T$ توسط یك‌چندجمله‌ای بر روی $C$ با ریشه‌های متمایز، پوچ شود.

۸. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. اگر هرزیرفضای $V$ تحت $T$ پایا باشد، آنگاه $T$ مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۹. فرض‌کنید $T$ عملگر انتگرال نامعین

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)dt$$

روی فضای توابع پیوستهٔ روی فاصلهٔ $[۰, ۱]$ باشد.آیا فضای توابع چندجمله‌ای

تحت $T$ پایا است؟ فضای توابع مشتق‌پذیر چطور؟ فضای توابعی که در $x = 1/2$ صفر می‌شوند چطور؟

۱۰. فرض کنید $A$ ماتریسی $3 \times 3$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید که اگر $A$ بر روی $R$ با ماتریسی مثلثی متشابه نباشد، آنگاه $A$ بر روی $C$ با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. این حکم درست است یا غلط: اگر ماتریس مثلثی $A$ با ماتریسی قطری متشابه باشد، آنگاه $A$ خود قطری است.

۱۲. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بستهٔ جبری $F$، و $f$ یك چندجمله‌ای بر روی $F$ باشد. ثابت کنید $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $f(T)$ است اگر و تنها اگر $c = f(t)$. در اینجا $t$ یك مقدار سرشت نمای $T$ است.

۱۳. فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی $F$ و $A$ ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی $F$ باشد. فرض کنید $T$ و $U$ عملگرهای خطی روی $V$ تعریف شده توسط

$$T(B) = AB$$

$$U(B) = AB - BA$$

باشند.

(الف) این حکم درست است یا غلط: اگر $A$ (بر روی $F$) قطری شدنی باشد، آنگاه $T$ قطری شدنی است.

(ب) این حکم درست است یا غلط: اگر $A$ قطری شدنی باشد، آنگاه $U$ نیز قطری شدنی است.

## ۵.۶ مثلث‌بندی همزمان؛ قطری سازی همزمان

فرض کنیم $V$ فضایی با بعد متناهی و $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی $V$ باشد. می‌خواهیم بدانیم کی می‌توانیم عملگرهای واقع در $\mathscr{F}$ را به‌طور همزمان مثلث‌بندی کنیم یا قطری سازیم؛ یعنی، پایه‌ای چون $\mathscr{B}$ بیابیم که همهٔ ماتریسهای $[T]_{\mathscr{B}}$، $T$ در $\mathscr{F}$، مثلثی (یا قطری) باشند. در مورد قطری سازی، لازم است $\mathscr{F}$ خانواده‌ای ازعملگرهای جابجاشونده باشد: به‌ازای هر $T$ و $U$ در $\mathscr{F}$، $UT = TU$. این مطلب، از این واقعیت ناشی می‌شود که همهٔ ماتریسهای قطری جابجا می‌شوند. البته، این نیز لازم است که هر عملگر در $\mathscr{F}$، عملگری قطری شدنی باشد. برای مثلث‌بندی همزمان، هر عملگر در $\mathscr{F}$ باید مثلثی-

شونده باشد. لازم نیست که $\mathscr{F}$ خانواده‌ای جابجا شونده باشد؛ هرچند، این شرط (که هر $T$ به‌تنهایی می‌تواند مثلث‌بندی شود) برای مثلث‌بندی همزمان کافی است. این نتایج، از تغییراتی جزئی در اثبات قضایای ۵ و ۶ حاصل می‌شوند.

زیرفضای $W$ **تحت** (خانوادهٔ عملگرهای) $\mathscr{F}$ **پایاست**، هرگاه $W$ تحت هر یك از عملگرهای واقع در $\mathscr{F}$ پایا باشد.

**لم.** گیریم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی مثلثی شونده روی $V$ باشد. فرض کنیم $W$ زیرفضایی سره از $V$ باشد که تحت $\mathscr{F}$ پایاست. برداری چون $\alpha$ در $V$ وجود دارد که

(الف) $\alpha$ در $W$ نیست؛

(ب) به ازای هر $T$ در $\mathscr{F}$، بردار $T\alpha$ در زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha$ و $W$ قرار دارد.

اثبات. به دلیل مشاهدهٔ ذیل هرگاه فرض کنیم $\mathscr{F}$ فقط شامل تعدادی متناهی عملگر باشد از عمومیت مسأله نکاسته‌ایم. گیریم $\{T_1, \ldots, T_r\}$ یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکسیمال $\mathscr{F}$، یعنی پایه‌ای برای زیرفضای پدیدآمده توسط $\mathscr{F}$ باشد. اگر $\alpha$ برداری باشد که برای آن شرط (ب) به‌ازای هر $T_i$ برقرار باشد، آنگاه (ب) به‌ازای هر عملگری که ترکیبی خطی از $T_1، \ldots، T_r$ باشد نیز برقرار است.

بنا بر لم قبل از قضیهٔ ۵ (همین لم برای تنها یك عملگر) می‌توانیم برداری چون $\beta_1$ (که در $W$ نیست) و اسکالری چون $c_1$ بیابیم که $(T_1-c_1I)\beta_1$ متعلق به $W$ باشد. گیریم $V_1$ دستهٔ همهٔ بردارهایی چون $\beta$ در $V$ باشد که $(T_1-c_1I)\beta$ متعلق به $W$ است. در این صورت $V_1$ زیرفضایی از $V$ است که به‌طور سره بزرگتر از $W$ می‌باشد. از این گذشته، $V_1$ تحت $\mathscr{F}$ پایاست؛ زیرا، اگر $T$ با $T_1$ جابجا شود، آنگاه

$$(T_1-c_1I)(T\beta)=T(T_1-c_1I)\beta.$$

اگر $\beta$ در $V_1$ باشد، آنگاه $(T_1-c_1I)\beta$ در $W$ است. چون $W$ تحت هر $T$ در $\mathscr{F}$ پایاست، $T(T_1-c_1I)\beta$ متعلق به $W$ است؛ یعنی، بـه‌ازای هر $\beta$ در $V_1$ و هر $T$ در $\mathscr{F}$، $T\beta$ در $V_1$ قرار دارد.

حال $W$ زیرفضایی سره از $V_1$ است. گیریم $U_2$ عملگر خطی روی $V_1$ باشد که از تحدید $T_2$ به زیرفضای $V_1$ حاصل می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال $U_2$ چندجمله‌ای مینیمال $T_2$ را تقسیم می‌کند. بنابرایـن، می‌توانیم لم قبل از قضیهٔ ۵ را در مورد ایـن عملگر و زیرفضای پایای $W$ به‌کار بندیم. برداری چون $\beta_2$ در $V_1$ (و نه در $W$) و اسکالری چون $c_2$ را به‌دست می‌آوریم که $(T_2-c_2I)\beta_2$ در $W$ باشد. توجه کنید که

(الف) $\beta_2$ متعلق به $W$ نیست؛

(ب) $(T_1-c_1I)\beta_2$ در $W$ است؛

(پ) $(T_2-c_2I)\beta_2$ هم در $W$ است.

فرض کنیم $V_2$ مجموعهٔ همهٔ بردارهای $\beta$ در $V_1$ باشد که $(T_2-c_2I)\beta$ در $W$ است. در این صورت $V_2$ تحت $\mathscr{F}$ پایاست. لم قبل از قضیهٔ ۵ را در مورد $U_3$، تحدید $T_3$ به $V_2$، به‌کار می‌بندیم. اگر بدین طریق ادامه دهیم به برداری چون $\alpha=\beta_r$ (که در $W$ نیست) خواهیم رسید که $(T_j-c_jI)\alpha$، $j=1,\dots,r$، در $W$ است. □

**قضیهٔ ۷.** فرض کنیم $V$ فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت $F$ و $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی مثلثی شونده روی $V$ باشد. پایهٔ مرتبی برای $V$ وجود دارد که درآن پایه، هرعملگر واقع در $\mathscr{F}$ توسط ماتریسی مثلثی نمایش داده می‌شود.

اثبات. با در اختیار داشتن لمی که هم اکنون اثبات شد، چنانچه $\mathscr{F}$ جایگزین $T$ گردد، آنگاه این قضیه همان اثبات قضیهٔ ۵ را خواهد داشت. □

**نتیجه.** گیریم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجاشونده‌ای از ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت بستهٔ جبری $F$ باشد. ماتریس $n\times n$ نامنفردی چون $P$، با درایه‌های متعلق به $F$ وجود داردکه به ازای هر ماتریس $A$ در $\mathscr{F}$، ماتریس $P^{-1}AP$ بالا مثلثی است.

**قضیهٔ ۸.** فرض کنیم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی قطری‌شدنی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ باشد. پایهٔ مرتبی برای $V$ وجود داردکه درآن پایه، هر عملگر واقع در $\mathscr{F}$ توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود.

اثبات. همچنان که قضیهٔ ۶ را با اقتباس از لم قبل از قضیهٔ ۵ برای حالت قطری شدنی ثابت کردیم، می‌توانیم این قضیه را هم با اقتباس لم قبل از قضیهٔ ۷ برای حالت قطری شدنی اثبات کنیم. ولی، در این مرحله ساده‌تر آن است که با استقرار روی بعد $V$ به‌پیش برویم.

اگر ۱ = بعد $(V)$ چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. قضیه را برای فضاهای برداری با ابعاد کمتر از $n$ فرض می‌کنیم و $V$ را فضایی $n$ بعدی می‌گیریم. عنصری چون $T$ از $\mathscr{F}$ انتخاب می‌کنیم که مضربی اسکالری ازعنصرهمانی نباشد. اسکالرهای $c_1,\dots,c_k$ را مقادیر سرشت نمای متمایز $T$، و (به‌ازای هر $i$) $W_i$ را فضای پوچ $T-c_iI$ فرض می‌کنیم. نمایه‌ای چون $i$ را تثبیت می‌کنیم. در این صورت $W_i$ تحت هر عملگری که با $T$ جابجا شود پایاست. $\mathscr{F}_i$ را خانوادهٔ عملگرهای خطی روی $W_i$ می‌گیریم که از تحدید عملگرهای در $\mathscr{F}$ به‌زیر فضاهای (پایای) $W_i$ حاصل بشوند. هرعملگر متعلق به $\mathscr{F}_i$ قطری‌شدنی است، زیرا چندجمله‌ای مینیمال آن، چندجمله‌ای مینیمال عملگر متناظرش در $\mathscr{F}$ را عادمی‌کند. چون $\dim W_i<\dim V$، عملگرهای واقع در $\mathscr{F}_i$ می‌توانند همزمان قطری شوند. به‌بیان‌دیگر، $W_i$ پایه‌ای چون $\mathscr{B}_i$ دارد، متشکل از بردارهایی که همزمان بردارهای سرشت‌نمای هر یك از عملگرهای متعلق به $\mathscr{F}_i$ هستند.

چون $T$ قطری شدنی است، لم قبل از قضیهٔ ۲ می‌گوید که $\mathscr{B}=(\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_k)$ پایه‌ای برای $V$ است. این همان پایه‌ای است که در جستجویش هستیم. □

## تمرین

۱. ماتریس حقیقی معکوس پذیری چون $P$ بیابید که $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ هر دوقطری‌شدنی باشند. در اینجا $A$ و $B$ ماتریسهای حقیقی زیر هستند.

(الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۸ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$.

(ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & a \\ a & ۱ \end{bmatrix}$.

۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانوادهٔ جابجاشونده‌ای از ماتریسهای مختلط $۳\times۳$ باشد. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ چند ماتریس مستقل خطی را می‌تواند شامل باشد؟ در حالت $n\times n$ چه می‌توان گفت؟

۳. $T$ را عملگری خطی روی فضایی $n$ بعدی بگیرید و فرض کنید $T$ دارای $n$ مقدار سرشت‌نمای متمایز باشد. ثابت کنید هر عملگر خطی که با $T$ جابجا شود، یک چندجمله‌ای برحسب $T$ است.

۴. فرض کنید $A$، $B$، $C$، و $D$ چهار ماتریس مختلط $n\times n$ باشند که (با یکدیگر) جابجا می‌شوند. فرض کنید $E$ ماتریس $۲n\times ۲n$

$$E=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید $\det E=\det(AD-BC)$.

۵. فرض کنید $F$ یک هیأت، $n$ عددی صحیح مثبت، و $V$ فضای ماتریسهای $n\times n$ بر روی $F$ باشد. اگر $A$ ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی $F$ باشد، $T_A$ را عملگر خطی روی $V$ تعریف‌شده توسط $T_A(B)=AB-BA$ بگیرید. خانوادهٔ عملگرهای خطی $T_A$ را که با تغییر $A$ روی همهٔ ماتریسهای قطری، حاصل می‌شود در نظر بگیرید. ثابت کنید عملگرهای واقع در این خانواده همزمان قطری شدنی هستند.

## ۶.۶. تجزیه به مجموع مستقیم

همچنانکه به تحلیل خود از یک تک عملگر خطی ادامه می‌دهیم، ایده‌هایمان را به‌طریقی استادانه‌تر ـ کمتر برحسب ماتریسها و بیشتر برحسب زیرفضاها ـ تنظیم می‌کنیم. درآغاز این فصل هدف خود را بدین صورت تشریح کردیم: یافتن پایهٔ مرتبی که درآن ماتریس $T$

شکل سادهٔ خاصی به خود بگیرد. اکنون، هدف خود را به‌صورت زیر تشریح می‌کنیم: تجزیهٔ فضای زمینهٔ $V$ به‌مجموع از زیرفضاهای پایا برای $T$ به‌طوری‌که عملگرهای تحدیدی روی این زیرفضاها ساده باشند.

**تعریف.** گیریم $W_1$، ...، $W_k$ زیرفضاهایی از فضای برداری $V$ باشند. گوییم $W_1$، ...، $W_k$ **مستقل هستند**، هرگاه

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_k=0 \text{،} \quad \alpha_i \text{ در } W_i$$

ایجاب کند که همهٔ $\alpha_i$ها صفر باشند.

به‌ازای $k=2$، معنی استقلال همان $\{0\}$ بودن اشتراک است، به‌عبارت دیگر، $W_1$ و $W_2$ مستقل هستند اگر و تنها اگر $W_1\cap W_2=\{0\}$. اگر $k>2$، استقلال $W_1$، ...، $W_k$ بیانگر مطالب بسیار بیشتری از $W_1\cap\cdots\cap W_k=\{0\}$ است. این استقلال بیان می‌کند که هر $W_j$ با مجموع زیر فضاهای دیگر $W_i$ تنها در بردار صفر شریك است.

اهمیت استقلال در نکتهٔ زیر نهفته است. گیریم $W=W_1+\cdots+W_k$ زیرفضای پدیدآمده توسط $W_1$، ...، $W_k$ باشد. هر بردار $\alpha$ در $W$ را می‌توان به‌صورت مجموعی چون

$$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k \text{،} \quad \alpha_i \text{ در } W_i$$

نوشت. اگر $W_1$، ...، $W_k$ مستقل باشند، آنگاه این عبارت برای $\alpha$ یکتا است؛ زیرا اگر

$$\beta=\beta_1+\cdots+\beta_k \text{،} \quad \beta_i \text{ در } W_i$$

آنگاه $(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+(\alpha_k-\beta_k)=0$، وازاین‌رو $\alpha_i-\beta_i=0$، $i=1,\ldots,k$. پس، وقتی‌که $W_1$، ...، $W_k$ مستقل باشند، به همان طریقی که با بردارهای $R^k$ به‌مثابهٔ $k$ تاییهایی از اعداد رفتار می‌کردیم، می‌توانیم با بردارهای $W$ نیز به‌صورت $k$ تاییهای $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$، $\alpha_i$ در $W_i$، رفتار کنیم.

**لم.** فرض کنیم $V$ فضایی برداری با بعد متناهی باشد. $W_1$، ...، $W_k$ را زیرفضاهایی از $V$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W=W_1+\cdots+W_k$. احکام زیر هم ارزند.

(الف) $W_1$، ...، $W_k$ مستقل هستند.

(ب) به‌ازای هر $j$، $2\leqslant j\leqslant k$، داریم

$$W_j\cap(W_1+\cdots+W_{j-1})=\{0\}.$$

(پ) اگر $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای $W_i$، $1\leqslant i\leqslant k$، باشد آنگاه دنبالهٔ $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)$ پایهٔ مرتبی برای $W$ است.

اثبات. (الف) را فرض می‌گیریم. فرض کنیم $\alpha$ برداری در اشتراك

$W_j \cap (W_1+\cdots+W_{j-1})$ باشد. در این صورت بردارهایی چون $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}$، که $\alpha_i$ در $W_i$ است، وجود دارند که $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}$. چون

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}+(-\alpha)+0+\cdots+0=0$$

وازطرفی $W_1, \ldots, W_k$ مستقل‌هستند، با یدداشته باشیم $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{j-1}=\alpha=0$.

اکنون ثابت می‌کنیم که (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم

$$0=\alpha_1+\cdots+\alpha_k،\quad \alpha_i \text{ در } W_i.$$

$j$ را بزرگترین عدد صحیح $i$ می‌گیریم که $\alpha_i \neq 0$، در این صورت

$$0=\alpha_1+\cdots+\alpha_j,\quad \alpha_j\neq 0.$$

پس $\alpha_j=-\alpha_1-\cdots-\alpha_{j-1}$ بردار غیر صفری در $W_j \cap (W_1+\cdots+W_{j-1})$ است.

تااینجا می‌دانیم که (الف) و(ب) یکی هستند، ببینیم چرا (الف) و(پ) هم‌ارزند. (الف) را فرض می‌گیریم. فرض کنیم $\mathcal{B}_i$ پایه‌ای برای $W_i$، $1\leqslant i\leqslant k$، باشد و $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. هر رابطهٔ خطی بین بردارهای $\mathcal{B}$ صورت

$$\beta_1+\cdots+\beta_k=0$$

را دارد که در آن $\beta_i$ ترکیبی خطی از بردارهای متعلق به $\mathcal{B}_i$ است. چون $W_1, \ldots, W_k$ مستقل هستند، هر $\beta_i$ برابر $0$ است. چون هر $\mathcal{B}_i$ مستقل است، رابطه‌ای که بین بردارهای واقع در $\mathcal{B}$ داریم رابطه‌ای بدیهی است.

اثبات این که (پ) حکم (الف) را ایجاب می‌کند به تمرین (تمرین ۲) ارجاع می‌شود. □

اگر هر یك از (و در نتیجه همهٔ) شرایط لم اخیر برقرار باشد، گوییم مجموع $W=W_1+\cdots+W_k$ **مستقیم** است یا $W$ **مجموع مستقیم** $W_1, \ldots, W_k$ است و می‌نویسیم

$$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_k.$$

خواننده ممکن است درنوشتارهای ریاضی این‌مجموع مستقیم را با عناوین مجموع‌مستقل یا مجموع مستقیم درونی $W_1, \ldots, W_k$ هم بیابد.

**مثال ۱۱.** گیریم $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی‌هیأت $F$ و $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. اگر $W_i$ زیرفضای یك بعدی پدیدآمده توسط $\alpha_i$ باشد، آنگاه $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_n$.

**مثال ۱۲.** فرض کنیم $n$ عددی صحیح مثبت، $F$ زیر هیأتی از اعداد مختلط، و $V$

فضای همهٔ ماتـریسهای $n\times n$ بر روی $F$ باشد. گیریـم $W_1$ زیـرفضای همهٔ ماتریسهای **متقارن**، یعنی ماتریسهایی چون $A$ با شرط $A=A^t$، و $W_2$ زیـرفضای همهٔ ماتـریسهای **متقارن کج**، یعنی مـاتریسهایـی چـون $A$ با شرط $A^t=-A$، باشند. در ایـن صورت $V=W_1\oplus W_2$. اگر $A$ ماتریسی دلخواه در $V$ باشد، عبارت یکتایی که $A$ را بهصورت مجموعی از ماتریسها، یکی در $W_1$ و دیگری در $W_2$، بیان کند عبارت است از

$$A=A_1+A_2$$

$$A_1=\frac{1}{2}(A+A^t)$$

$$A_2=\frac{1}{2}(A-A^t).$$

**مثال ۱۳.** فرض کنیم $T$ عملگر خطی دلخواهی روی فضای با بعد متناهی $V$ باشد. گیریم $c_1,\ldots,c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایـز $T$، و $W_i$ فضای بـردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c_i$ باشند. در این صورت $W_1,\ldots,W_k$ مستقل‌اند. به‌لم قبل از قضیهٔ ۲ مراجعه کنید. بخصوص، اگر $T$ قطری‌شدنی باشد، آنگاه $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$.

**تعریف.** اگر $V$ فضایی برداری باشد، یك **تصویر**[1] $V$ عملگری خطی چون $E$ روی $V$ است که $E^2=E$.

فرض کنیم $E$ یك تصویر باشد. $R$ را برد $E$ و $N$ را فضای پوچ $E$ می‌گیریم.

۱. بردار $\beta$ در برد $R$ است اگر و تنها اگـر $E\beta=\beta$. اگـر $\beta=E\alpha$، آنگاه $E\beta=E^2\alpha=E\alpha=\beta$. بعکس، اگر $\beta=E\beta$، آنگاه (مسلماً) $\beta$ در برد $E$ قراردارد.

۲. $V=R\oplus N$.

۳. عبارت یکتای $\alpha$ به‌صورت مجموعی از بردارهای در $R$ و $N$ عبارت است از $\alpha=E\alpha+(\alpha-E\alpha)$.

از (۱)، (۲)، و (۳) بسادگی دیده می‌شود که اگر $R$ و $N$ دو زیرفضای $V$ باشند و $V=R\oplus N$، یك و تنها یك عملگر تصویر $E$ وجود دارد که بردش $R$ و فضای پوچش $N$ باشد. این عملگر، **تصویر روی $R$ در راستای $N$** نامیده می‌شود.

هر تصویر $E$ (به‌طور بدیهی) قطری شدنی است. اگـر $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ پایه‌ای برای $R$ و $\{\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $N$ باشد، آنگاه پایهٔ $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ ماتریس $E$ را قطری می‌کند:

$$[E]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

۱. این اصطلاح را یك عملگر تصویری یا به‌طور خلاصه یك تصویری می‌نامند.ـم.

در اینجا $I$ ماتریس همانی $r \times r$ است. این موضوع به تفسیر برخی از اصطلاحات دربارهٔ تصویرها کمك می‌کند. خواننده باید حالات گوناگون در صفحهٔ $R^2$ (یا فضای ۳بعدی $R^3$) را بررسی و خود را متقاعد کند که تصویر روی $R$ در راستای $N$، هر بردار را با تصویرکردنش به‌موازات $N$، در $R$ می‌فرستد.

از تصویرها می‌توان در تشریح تجزیه به مجموعهای مستقیم فضای $V$ استفاده کرد. زیرا، گیریم $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. به ازای هر $j$ عملگری چون $E_j$ روی $V$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\alpha$ در $V$ باشد؛ مثلا فرض کنیم $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ و $\alpha_i$ در $W_i$ باشد. بنا به‌تعریف می‌گیریم $E_j\alpha = \alpha_j$. در این صورت $E_j$ قاعده‌ای خوش تعریف است. بسادگی دیده می‌شود که $E_j$ خطی است، برد $E_j$ برابر $W_j$ است و $E_j = E_j^2$. فضای پوچ $E_j$ برابر است با زیرفضای

$$(W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_k)$$

زیرا، حکم $E_j\alpha = 0$، چیزی جز $\alpha_j = 0$ نیست؛ یعنی، $\alpha$ عملاً مجموعی از بردارهای واقع درفضاهای $W_i$ با $i \neq j$ است. برحسب تصویرهای $E_j$ به‌ازای هر $\alpha$ در $V$ داریم

$$\alpha = E_1\alpha + \cdots + E_k\alpha.$$

مطلبی که (۶-۱۳) بیان می‌کند این است

$$I = E_1 + \cdots + E_k.$$

توجه نیزداشته باشید که اگر $i \neq j$، آنگاه $E_iE_j = 0$، زیرا برد $E_j$ زیرفضای $W_j$ است که مشمول در فضای پوچ $E_i$ است. اکنون یافته‌های خود را خلاصه و عکس قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم.

**قضیهٔ ۹.** اگر $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$، آنگاه $k$ عملگرخطی $E_1, \ldots, E_k$ روی $V$ وجود دارند که

(۱) هر $E_i$ یك تصویر است ($E_i^2 = E_i$)؛

(۲) $E_iE_j = 0$، هرگاه $i \neq j$؛

(۳) $I = E_1 + \cdots + E_k$؛

(۴) برد $E_i$ برابر $W_i$ است.

بعکس، اگر $E_1, \ldots, E_k$ عملگرهایی خطی روی $V$ باشند که در شرایط (۱)، (۲)، و (۳) صدق کنند و اگر $W_i$ برد $E_i$ باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

اثبات. تنها باید حکم عکس را اثبات کنیم. فرض کنیم $E_1, \ldots, E_k$ عملگرهایی خطی روی $V$ باشند که سه شرط اول را برمی‌آورند وهمچنین فرض می‌کنیم $W_i$ برد $E_i$ باشد. در این صورت یقیناً

$$V = W_1 + \cdots + W_k \;;$$

زیرا، بنا بر شرط (۳)، به‌ازای هر $\alpha$ در $V$ داریم

$$\alpha = E_1\alpha + \cdots + E_k\alpha$$

و $E_i\alpha$ هم در $W$ قرار دارد. این عبارت برای $\alpha$ یکتاست، زیرا اگر

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$$

و $\alpha_i$ در $W_i$ باشد، مثلاً $\alpha_i = E_i\beta_i$، آنگاه با استفاده از (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned} E_j\alpha &= \sum_{i=1}^{k} E_j\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} E_jE_i\beta_i \\ &= E_j^2\beta_j \\ &= E_j\beta_j \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد که $V$ مجموع مستقیم $W_i$هاست. □

## تمرین

۱. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی و $W_1$ زیرفضایی از $V$ باشد. ثابت کنید زیرفضایی چون $W_2$ از $V$ وجود دارد که $V = W_1 \oplus W_2$.

۲. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی و $W_1$، …، $W_k$ زیرفضاهایی از $V$ باشند که

$V = W_1 + \cdots + W_k$ و بعد$(W_1) + \cdots +$ بعد$(W_k) =$ بعد$(V)$.

ثابت کنید $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

۳. تصویر $E$ را بیابید که $R^2$ را بروی زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, -1)$، در راستای زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, 2)$، تصویر کند.

۴. این حکم درست است یا غلط: اگر $E_1$ و $E_2$ تصویرهایی بروی زیرفضاهایی مستقل باشند، آنگاه $E_1 + E_2$ یك تصویر است.

۵. اگر $E$ یك تصویر و $f$ یك چندجمله‌ای باشد، آنگاه $f(E) = aI + bE$. مقادیر $a$ و $b$ برحسب ضرایب $f$ چه هستند؟

۶. این حکم درست است یا غلط: اگر عملگری قطری شدنی تنها دارای مقادیر سرشت‌

www.riazisara.ir



نمای ۰ و ۱ باشد، یك تصویر است.

۷. ثابت کنید که اگر $E$ تصویر روی $R$ در راستای $N$ باشد، آنگاه $(I-E)$ تصویر روی $N$ در راستای $R$ است.

۸. فرض کنید $E_1$، ...، $E_k$ عملگرهایی خطی روی فضای $V$ باشند و $E_1+\cdots+E_k=I$.

(الف) ثابت کنید که اگر به‌ازای $i\neq j$ داشته باشیم $E_iE_j=0$، آنگاه به‌ازای هر $i$، $E_i^2=E_i$.

(ب) درحالت $k=2$، عکس (الف) را اثبات کنید؛ یعنی، اگر $E_1+E_2=I$، $E_1^2=E_1$، و $E_2^2=E_2$، آنگاه $E_1E_2=0$.

۹. فرض کنید $V$ یك فضای برداری حقیقی و $E$ یك عملگر خطی خود توان روی $V$، یعنی یك تصویر باشد. ثابت کنید $(I+E)$ معکوس‌پذیر است. $(I+E)^{-1}$ را نیز بیابید.

۱۰. فرض کنید $F$ زیرهیأتی از اعداد مختلط (یا، هر هیأتی با سرشت‌نمای صفر) و $V$ یك‌فضای برداری‌با بعدمتناهی برروی $F$ باشد. فرض کنید $E_1$، ...، $E_k$ تصویرهایی از $V$ باشند و $E_1+\cdots+E_k=I$. ثابت کنید به ازای $i\neq j$، $E_iE_j=0$. (راهنمایی: از تابع رد استفاده کنید، و از خود سؤال کنید که رد هر تصویر چیست.)

۱۱. فرض کنید $V$ فضایی برداری و $W_1$، ...، $W_k$ زیرفضاهایی از $V$ باشند. فرض کنید

$$V_j=W_1+\cdots+W_{j-1}+W_{j+1}+\cdots+W_k.$$

همچنین فرض کنید که $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$. ثابت کنید فضای دوگان $V^*$ به مجموع مستقیم $V^*=V_1^0\oplus\cdots\oplus V_k^0$ تجزیه می‌شود.

## ۷.۶. مجموعهای مستقیم پایا

ما در وهلهٔ نخست به‌تجزیه به‌مجموع مستقیم $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$، که در آن هر یك از زیرفضاهای $W_i$ تحت عملگر خطی مفروض $T$ پایا باشد، علاقه‌مندیم. با در دست بودن چنین تجزیه‌ای از $V$، $T$ به‌وسیلهٔ تحدید، عملگری خطی چون $T_i$ روی هر $W_i$ القا می‌کند. پس، کنش $T$ عبارت از این است که اگر $\alpha$ برداری از $V$ باشد بردارهای یکتایی چون $\alpha_1$، ...، $\alpha_k$، با $\alpha_i$ در $W_i$ را داریم که

$$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k.$$

و در این صورت

$$T\alpha = T_1\alpha_1 + \cdots + T_k\alpha_k.$$

این وضعیت را با گفتن اینکه $T$ **مجموع مستقیم** عملگرهای $T_1$، ...، $T_k$ است توصیف می‌کنیم. در استفاده از این اصطلاح، باید به‌خاطرداشت که $T_i$ها عملگرهایی خطی روی فضای $V$ نیستند، بلکه عملگرهایی خطی روی زیرفضاهای مختلف $W_i$ هستند. این حقیقت که $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$، ما را قادر می‌سازد که به‌هر $\alpha$ در $V$، $k$تایی یکتایی چون $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ از بردارهای $\alpha_i$ واقع در $W_i$ (بنابر $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$) را به‌طریقی وابسته سازیم که بتوانیم اعمال خطی در $V$ را با کار روی تك زیرفضاهای $W_i$ انجام دهیم. این‌واقعیت که هر $W_i$ تحت $T$پایاست، اجازه می‌دهدکه به‌کنش $T$به‌صورت کنشهای مستقل عملگرهای $T_i$ روی زیرفضاهای $W_i$ بنگریم. هدف ما مطالعهٔ $T$، با یافتن تجزیه به‌مجموع مستقیم پایایی است که درآن عملگرهای $T_i$ از نوعی ابتدایی باشند.

پیش از ذکریك مثال، اجازه دهید به‌نظیرماتریسی این وضعیت بپردازیم. فرض کنیم پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}_i$ را برای هر$W_i$ انتخاب، وبرای اینکه $\mathcal{B}$ متشکل از اجتماع $\mathcal{B}_i$ها پایهٔ مرتبی برای $V$ باشدآنها را بترتیب $\mathcal{B}_1$، ...، $\mathcal{B}_k$ مرتب کرده باشیم. از بحثی که‌دربارهٔ نظیر ماتریسی یـك زیرفضای پایای تنهاکردیم بسادگی مشهود است که اگر $A = [T]_{\mathcal{B}}$ و $A_i = [T_i]_{\mathcal{B}_i}$، آنگاه $A$ دارای صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

است. در (۶-۱۴)، $A_i$ ماتریسی $d_i \times d_i$ $(d_i = \dim W_i)$ است و ۰ها نمادهایی برای بلوك‌های مستطیلی شکل ازاسکالرهای ۰ با اندازه‌های مختلف هستند. بعلاوه، به‌نظرمناسب می‌رسدکه (۶-۱۴) را با گفتن اینکه $A$ **مجموع مستقیم** ماتریسهای $A_1$، ...، $A_k$ است توصیف کنیم.

بسیاری از اوقات، زیرفضای $W_i$ را با تصویرهای وابستهٔ $E_i$ (قضیهٔ ۹) توصیف خواهیم‌کرد. بنابراین، ضرورت داردکه بتوانیم‌پایایی زیرفضاهای $W_i$ را برحسب $E_i$ها بیان کنیم.

**قضیهٔ ۱۰.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای $V$ و $W_1$، ...، $W_k$ و نیز $E_1$، ...، $E_k$ به‌صورتی‌که در قضیهٔ۹ آمده‌اند، باشند. دراین صورت، شرطی لازم و کافی برای اینکه هرزیرفضای $W_i$ تحت $T$ پایا باشد این است که $T$ با هریك از تصویرهـای $E_i$ جابجا شود؛ یعنی،

$$TE_i = E_iT, \quad i = 1, \cdots, k.$$

اثبات. فرض کنیم $T$ با هر $E_i$ جابجا شود و $\alpha$ در $W_j$ باشد. دراین صورت $E_j\alpha = \alpha$ و

$$\begin{aligned} T\alpha &= T(E_j\alpha) \\ &= E_j(T\alpha) \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $T\alpha$ دربرد $E_j$ قرار دارد؛ یعنی، $W_j$ تحت $T$ پایاست.

اکنون فرض می‌کنیم هر $W_i$ تحت $T$ پایاباشد، نشان‌خواهیم داد که $TE_j = E_jT$. گیریم $\alpha$ برداری در $V$ باشد. دراین صورت

$$\begin{aligned} \alpha &= E_1\alpha + \cdots + E_k\alpha \\ T\alpha &= TE_1\alpha + \cdots + TE_k\alpha. \end{aligned}$$

چون $E_i\alpha$ در $W_i$ که‌تحت $T$ پایاست قراردارد، باید به‌ازای‌برداری چون $\beta_i$ داشته‌باشیم $T(E_i\alpha) = E_i\beta_i$. دراین صورت

$$\begin{aligned} E_jTE_i\alpha &= E_jE_i\beta_i \\ &= \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ E_j\beta_j & \text{اگر } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

وبنابراین

$$\begin{aligned} E_jT\alpha &= E_jTE_1\alpha + \cdots + E_jTE_k\alpha \\ &= E_j\beta_j \\ &= TE_j\alpha. \end{aligned}$$

این رابطه به‌ازای هر $\alpha$ در $V$ برقرار است و از این‌رو، $E_jT = TE_j$. □

اکنون عملگری قطری شدنی چون $T$ را به‌زبان تجزیه به مجموع مستقیم پایا (تصویرهایی که با $T$ جابجا می‌شوند) توصیف می‌کنیم. این مطلب بعدها کمك شایانی‌در فهم چند قضیهٔ عمیق تجزیهٔ فضاها خواهدکرد. خواننده ممکن است تصورکندکه توصیفی که درصددعرضهٔ آن هستیم، درمقایسه با فرمولبندی ماتریسی، یااین بیان ساده‌که‌بردارهای سرشت‌نمای $T$ فضای زمینه را پدید می‌آورند، نسبتاً پیچیده است. ولی، باید درنظرداشته باشدکه این اولین نظراجمالی ما به‌روشی بسیارمؤثراست‌که به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم‌مسائل مختلفی در رابطه با زیرفضاها، پایه‌ها، ماتریسها، و نظایرآنها را به‌محاسبات جبری عملگرهای خطی، تحویل‌کنیم. با اندکی تجربه،کارآیی، و ظرافت این روش استدلال آشکار خواهد شد.

**قضیهٔ ۱۱.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای بعد متناهی $V$ باشد. اگر $T$ قطری شدنی و $c_1$، $\cdots$، $c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ باشند، آنگاه عمگرهایی‌خطی چون $E_1$، $\cdots$، $E_k$ روی $V$ وجود دارند که

(۱) $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$؛

(۲) $I=E_1+\cdots+E_k$؛

(۳) $E_iE_j=0$، $i\neq j$؛

(۴) $E_i^2=E_i$ ($E_i$ یك تصویر است)؛

(۵) برد $E_i$، فضای سرشت‌نمای $T$ وابسته به $c_i$ است.

بعکس، اگر $k$ اسکالرمتمایز $c_1$، $\cdots$، $c_k$ و $k$ عملگرخطی غیرصفر $E_1$، $\cdots$، $E_k$ موجود باشند که شرایط (۱) (۲)، و (۳) را برآورند، آنگاه $T$ قطری شدنی است؛ $c_1$، $\cdots$، $c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ هستند؛ و شرایط (۴) و (۵) نیز برقرارند.

اثبات. فرض‌کنیم $T$ قطری شدنی و با مقادیر سرشت‌نمای متمایز $c_1$، $\cdots$، $c_k$ باشد. گیریم $W_i$ فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c_i$ باشد. همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k.$$

گیریم $E_1$، $\cdots$، $E_k$ همچون درقضیهٔ ۹ تصویرهای وابسته به‌این تجزیه باشند. دراین صورت (۲)، (۳)، (۴)، و (۵) برقرارند. برای اثبات (۱) به‌شرح زیرعمل می‌کنیم. به‌ازای هر $\alpha$ در $V$

$$\alpha=E_1\alpha+\cdots+E_k\alpha$$

و ازاین‌رو

$$T\alpha=TE_1\alpha+\cdots+TE_k\alpha$$
$$=c_1E_1\alpha+\cdots+c_kE_k\alpha.$$

به‌بیان دیگر، $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$.

حال فرض‌کنید عملگری خطی‌چون $T$، همراه با اسکالرهای متمایز $c_i$ وعملگرهای غیرصفر $E_i$ که (۱)، (۲)، و (۳) را برمی‌آورند داده شده باشند. چون به‌ازای $i\neq j$، $E_iE_j=0$، دوطرف $I=E_1+\cdots+E_k$ راکه در $E_i$ ضرب کنیم بلافاصله $E_i^2=E_i$ را به‌دست می‌آوریم. با ضرب $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$ در $E_i$ خواهیم داشت $TE_i=c_iE_i$، که نشان می‌دهد هر بردار در برد $E_i$، درفضای پوچ $(T-c_iI)$ نیز هست. چون فرض‌کرده‌ایم که $E_i\neq 0$، این مطلب ثابت می‌کندکه برداری غیرصفر در فضای پوچ $(T-c_iI)$ وجود دارد؛ بدین معنی‌که $c_i$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$ است. بعلاوه، $c_i$هاکل مقادیرسرشت‌نمای $T$ هستند؛ زیرا، اگر $c$ اسکالری دلخواه باشد، آنگاه

$$T-cI=(c_1-c)E_1+\cdots+(c_k-c)E_k$$

لذا اگر $(T-cI)\alpha=0$ باید داشته باشیم $(c_i-c)E_i\alpha=0$. اگر $\alpha$ بردار صفرنباشد، آنگاه $i$یی هست که $E_i\alpha\neq 0$، و از این‌رو به‌ازای این $i$ داریم $c_i-c=0$.

مطمئناً $T$ قطری‌شدنی است، زیرا نشان داده‌ایم که هر بردار غیرصفردر برد $E_i$، یك بردار سرشت‌نمای $T$ نیزهست و این واقعیت که $I=E_1+\cdots+E_k$ نشان‌می‌دهدکه این بردارهای سرشت‌نما $V$ را پدید می‌آورند. آنچه برای اثبات باقی می‌ماند این‌است که فضای پوچ $(T-c_iI)$ دقیقاً برد $E_i$ است. اما این موضوع واضح است، چراکه‌اگر $T\alpha=c_i\alpha$، آنگاه

$$\sum_{j=1}^{k}(c_j-c_i)E_j\alpha=0.$$

ازاین‌رو

$$(c_j-c_i)E_j\alpha=0 \qquad \text{به‌ازای هر } j،$$

وآنگاه

$$E_j\alpha=0, \qquad j\neq i.$$

چون $\alpha=E_1\alpha+\cdots+E_k\alpha$، و به‌ازای $j\neq i$، $E_j\alpha=0$، پس داریم $\alpha=E_i\alpha$، که خود نشان می‌دهدکه $\alpha$ در برد $E_i$ است. □

بخشی از قضیهٔ ۹ بیان می‌کندکه برای عملگری قطری شدنی چون $T$، اسکالرهای $c_1$، ...، $c_k$ و عملگرهای $E_1$، ...، $E_k$ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ شرایط (۱)، (۲)، (۳)، این شرط که $c_i$ها متمایزند واین شرط که $E_i$ها غیرصفرند، تعیین می‌شوند. یکی ازخواص جالب تجزیهٔ $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$ این است که اگـر $g$ چندجمله‌ای دلخواهی برروی هیأت $F$ باشد، آنگاه

$$g(T)=g(c_1)E_1+\cdots+g(c_k)E_k.$$

جزئیات اثبات را به‌خواننده وامی‌گذاریم. برای مشاهده چگونگی اثبات این مطلب،تنها نیازمند به‌محاسبهٔ $T^r$، به‌ازای هرعدد صحیح $r$، هستیم. به‌عنوان نمونه

$$\begin{aligned}T^2&=\sum_{i=1}^{k}c_iE_i\sum_{j=1}^{k}c_jE_j\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}c_ic_jE_iE_j\\&=\sum_{i=1}^{k}c_i^2E_i^2\\&=\sum_{i=1}^{k}c_i^2E_i\,.\end{aligned}$$

لازم است خواننده این را با $g(A)$ که درآن $A$ ماتریسی قطری است مقایسه کند؛ زیرادر این‌صورت $g(A)$ چیزی جز ماتریسی قطری با درایه‌های‌قطری $g(A_{11})$، ۰۰۰، $g(A_{nn})$ نخواهد بود.

درحالت خاص، مایلیم بدانیم هنگام به‌کار بردن چندجمله‌ایهای لاگرانژ متناظر با اسکالرهای $c_1$، ۰۰۰، $c_k$:

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}$$

چه رخ می‌دهد. داریم $p_j(c_i) = \delta_{ij}$، یعنی

$$p_j(T) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ij} E_i$$
$$= E_j.$$

پس، تصویرهای $E_j$ نه‌تنها با $T$ جابجا می‌شوند، بلکه چندجمله‌ایهای برحسب $T$ هستند.

ازاین‌گونه محاسبات با چندجمله‌ایهای برحسب $T$ می‌توان برای ارائهٔ اثباتی‌دیگر از قضیهٔ ۶ که عملگرهای قطری‌شدنی را برحسب چندجمله‌ایهای مینیمالشان سرشت‌نمایی می‌کند، استفاده‌کرد. این اثبات کاملاً مستقل از اثبات قبلی است.

اگر $T$ قطری شدنی باشد، $T = c_1 E_1 + \cdots + c_k E_k$، آنگاه به‌ازای هرچند-جمله‌ای $g$

$$g(T) = g(c_1) E_1 + \cdots + g(c_k) E_k.$$

پس، $g(T) = 0$ اگر وتنها اگر به‌ازای هر $i$، $g(c_i) = 0$. بخصوص، چندجمله‌ای‌مینیمال $T$ عبارت است از

$$p = (x - c_1) \cdots (x - c_k).$$

حال فرض کنیم $T$ عملگری‌خطی باچندجمله‌ای‌مینیمال $p = (x - c_1) \cdots (x - c_k)$ باشد و $c_1$، ۰۰۰، $c_k$ عناصرمتمایزی ازهیأت اسکالری. چندجمله‌ایهای لاگرانژ راتشکیل می‌دهیم

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}.$$

از فصل ۴ یادآوری می‌کنیم که $P_j(c_i) = \delta_{ij}$ وبه‌ازای هرچندجمله‌ای $g$ با درجهٔ‌حداکثر $(k - 1)$، داریم

$$g = g(c_1) p_1 + \cdots + g(c_k) p_k.$$

اگر $g$ را چندجمله‌ای اسکالری ۱ وسپس چندجمله‌ای $x$ بگیریم، داریم

$$1 = p_1 + \cdots + p_k$$

(۶-۱۵)

$$x = c_1 p_1 + \cdots + c_k p_k.$$

(خوانندهٔ زیرك توجه خواهد کرد که ممکن است استفاده از $x$ درست نباشد، چرا که $k$ ممکن است ۱ باشد. اما اگر $k = 1$، $T$ مضربی اسکالری از عنصرهمانی است و لذا قطری‌شدنی.) حال فرض کنیم $E_j = p_j(T)$. بنا بر (۶-۱۵) داریم

$$I = E_1 + \cdots + E_k$$

(۶-۱۶)

$$T = c_1 E_1 + \cdots + c_k E_k.$$

توجه کنید که اگر $i \neq j$، آنگاه $p_i p_j$ برچندجمله‌ای مینیمال $p$ بخش‌پذیراست، چراکه $p_i p_j$ همهٔ $(x - c_r)$ها را به‌عنوان سازه‌ای شامل است. پس

$$E_i E_j = 0, \qquad i \neq j. \qquad (۶\text{-}۱۷)$$

مطلب دیگری را که باید نشان دهیم این است که به‌ازای هر $i$، $E_i \neq 0$. اما این مطلب‌از این واقعیت نتیجه می‌شود که $p$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ است، و از این‌رو نمی‌توانیم داشته باشیم $p_i(T) = 0$، چراکه درجهٔ $p_i$ از درجهٔ $p$ کمتر است. این نکتهٔ آخر، همراه با (۶-۱۶)، (۶-۱۷)، واین امرکه $c_i$ها متمایزند، ما را قادر می‌سازدکه قضیهٔ ۱۱ را به‌کار بندیم ونتیجه بگیریم که $T$ قطری‌شدنی است. □

## تمرین

۱. فرض کنید $E$ یك تصویر $V$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. ثابت‌کنید که برد $E$ تحت $T$ پایاست اگروتنها اگر $ETE = TE$. همچنین ثابت‌کنیدکه برد وفضای پوچ $E$ هردو تحت $T$ پایا هستند اگروتنها اگر $ET = TE$.

۲. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $R^2$ باشدکه ماتریس آن درپایهٔ مرتب استانده

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

است. فرض کنید $W_1$ زیرفضایی از $R^2$ پدیدآمده توسط بردار $\epsilon_1 = (1, 0)$ باشد.

(الف) ثابت‌کنید $W_1$ تحت $T$ پایاست.

(ب) ثابت کنید هیچ زیرفضایی از $W_2$ وجود ندارد که تحت $T$ پایا و مکمل $W_1$ باشد:

$$R^2 = W_1 \oplus W_2.$$

(با تمرین ۱ از بخش ۶.۵ مقایسه شود.)

۳. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ باشد. فرض‌کنید $R$ برد $T$ و $N$ فضای پوچ $T$ باشد. ثابت‌کنید $R$ و $N$ مستقل هستند اگر وتنها اگر $V = R \oplus N$.

۴. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد ونیز $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ که هر $W_i$ تحت $T$ پایاست. فرض‌کنید $T_i$ عملگر (تحدیدی) القا شده روی $W_i$ باشد.

(الف) ثابت‌کنید $\det(T) = \det(T_1) \cdots \det(T_k)$.

(ب) ثابت‌کنید که‌چندجمله‌ای سرشت‌نمای $f$ عبارت‌است ازحاصلضرب چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای $f_1$، $\cdots$، $f_k$.

(پ) ثابت‌کنیدچندجمله‌ای مینیمال $T$ کوچکترین‌مضرب مشترك چندجمله‌ایهای مینیمال $T_1$، $\cdots$، $T_k$ است. (راهنمایی: احکام متناظر مربوط به‌مجموع مستقیم ماتریسها را اثبات‌کنید وسپس آنها را به‌کار بندید.)

۵. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی قطری‌شدنی روی $R^3$ باشد که در مثال ۳ از بخش ۲.۶ مورد بحث قرارگرفت. چندجمله‌ایهای لاگرانژ را به‌کار گیرید تا ماتریس نمایش $A$ را به‌صورت $A = E_1 + 2E_2$، $E_1 + E_2 = I$ و $E_1E_2 = 0$ بنویسید.

۶. $A$ را ماتریس $4 \times 4$ درمثال ۵ از بخش ۳.۶ بگیرید. ماتریسهایی چون $E_1$، $E_2$، و $E_3$ بیابید که

$$A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 ،\ E_1 + E_2 + E_3 = I ،\ E_iE_j = 0 \text{ و } ،\ i \neq j .$$

۷. در تمرینهای ۵ و ۶ توجه‌کنیدکه (به‌ازای هر $i$) فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c_i$ توسط بردارهای ستونی ماتریسهای مختلف $E_j$ با $j \neq i$ پدید می‌آید. آیا این امر تصادفی است؟

۸. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $V$ باشدکه با هرعملگر تصویری روی $V$ جابجا شود. درمورد $T$ چه می‌توان گفت؟

۹. فرض‌کنید $V$ فضای‌برداری توابع(با مقدار)حقیقی پیوسته روی فاصلهٔ $[-1, +1]$ ازخط‌حقیقی باشد. همچنین‌فرض‌کنید $W_e$ زیرفضای توابع‌زوج، $f(-x) = f(x)$، و $W_o$ زیرفضای توابع فرد، $f(-x) = -f(x)$، باشد.

(الف) نشان دهید $V = W_e \oplus W_o$.

(ب) اگر $T$ عملگر انتگرال نامعین

$$(Tf)(x)=\int_{\circ}^{x} f(t)\,dt$$

باشد، آیا $W_e$ و $W_\circ$ تحت $T$ پایا هستند؟

## ۸.۶ قضیهٔ تجزیهٔ اولیه

کوشش ما دراین بخش این است که عملگرخطی $T$ روی فضای با بعد متناهی $V$ را از طریق تجزیهٔ $T$ به‌مجموعی مستقیم از عملگرهایی که به‌معنایی ابتدایی هستند، مطالعه کنیم. می‌توانیم این‌کار را دربرخی از حالات خاص معین، مثلاً هنگامی که چندجمله‌ای مینیمال $T$ برروی هیأت اسکالری $F$ به‌حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای تکین متمایز از درجهٔ ۱ تجزیه شود، ازطریق بردارها ومقادیرسرشت‌نمای $T$ انجام دهیم. درحالت کلی چه‌می‌توانیم بکنیم؟ درصورتی که سعی کنیم $T$ را با استفاده ازمقادیر سرشت‌نما مطالعه‌کنیم با دومسأله روبرو خواهیم شد. اول آنکه، $T$ ممکن است حتی‌یك مقدارسرشت‌نما هم نداشته باشد؛ این وضع، درواقع نقیصه‌ای است از هیأت اسکالری، بدین معنی که این هیأت بستهٔ جبری نیست. دوم، حتی اگرچندجمله‌ای سرشت‌نما به‌طورکامل برروی $F$ به‌حاصل‌ضربی ازچند-جمله‌ایهای درجهٔ ۱ تجزیه شود، ممکن است برای $T$ به‌اندازهٔ‌کافی بردار سرشت‌نماجهت پدیدآوردن فضای $V$ موجودنباشد؛ واضح است که این‌وضع نقیصه‌ای از $T$ است. وضعیت دوم، با عملگر $T$ روی $F^3$ ($F$ هیأتی دلخواه) که در پایهٔ استانده توسط

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، تشریح می‌گردد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ عبارت است از $(x-2)^2(x+1)$ که بوضوح چندجمله‌ای مینیمال $A$ (یا $T$) نیز هست. پس، $T$ قطری‌شدنی نیست. واضح است که این‌واقعه به‌دلیل اینکه بعد فضای پوچ $(T-2I)$ یك است، رخ می‌دهد. از طرف دیگر، فضای پوچ $(T+I)$ و فضای پوچ $(T-2I)^2$ با هم $V$ را پدید می‌آورند؛ اولی زیرفضای پدیدآمده توسط $\epsilon_3$، و دومی زیرفضای پدیدآمده توسط $\epsilon_1$ و $\epsilon_2$ است.

این روش، کم وبیش روش عمومی درمورد دومین مسأله است. اگر چندجمله‌ای مینیمال $T$ به‌صورت زیر تجزیه شود (به‌خاطرداشته باشید که این فرض است)

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$$

و $c_1$، ...، $c_k$ عناصر متمایز $F$ باشند، آنگاه نشان خواهیم دادکه فضای $V$ مجموع

مستقیم‌فضاهای پوچ عملگرهای $(T-c_iI)^{r_i}$، $k$، ۰۰۰، ۱ = $i$، است. این فرض درمورد $p$ با این حقیقت هم‌ارز است که $T$ مثلثی‌شونده است (قضیه ۵)؛ گرچه، علم به‌این‌واقعیت هم کمکی به‌ما نخواهدکرد.

قضیه‌ای راکه اثبات می کنیم، عمومی‌تر ازمطلبی است که تشریح کردیم، چراکه‌این قضیه به‌تجزیهٔ اولیهٔ چندجمله‌ای مینیمال مربوط است، خـواه سازه‌های اولی کـه در کار وارد می‌شوند همگی از درجهٔ یکم باشند خواه نباشند. برای خواننده مفید است که‌حالت خاصی راکه سازه‌های اول از درجهٔ ۱ باشند وحتی به‌طـور اخص اثبات تصویری‌گونهٔ قضیهٔ ۶ راکه حالت خاصی ازاین قضیه است، به‌تصور آورد.

**قضیهٔ ۱۲. (قضیهٔ تجزیهٔ اولیه).** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری بعدمتناهی $V$ برروی هیأت $F$، و $p$ چندجمله‌ای مینیمال $T$

$$p=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$$

باشد. دراینجا $p_i$ها چندجمله‌ایهای تکین تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی $F$ و $r_i$ها اعداد صحیح مثبتی هستند. گیریم $W_i$ فضای پوچ $p_i(T)^{r_i}$، $i=1,\cdots,k$، باشد. در ایـن صورت

(۱) $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$؛

(۲) همهٔ $W_i$ها تحت $T$ پایا هستند.

(۳) اگر $T_i$ عملگر القا شده توسط $T$ روی $W_i$ باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال $T_i$ عبارت است از $p_i^{r_i}$.

اثبات. طرح اثبات چنین است. اگر تجزیه به‌مجموع مستقیم (۱) معتبر باشد،چگونه می‌توانیم تصویرهای $E_1$، ۰۰۰، $E_k$ وابسته به‌این تجزیه را به‌دست آوریم؟ تصویر $E_i$، روی $W_i$، عنصرهمانی و روی دیگر $W_j$ها صفراست. یك چندجمله‌ای چون $h_i$ می‌یابیم کـه $h_i(T)$ روی $W_i$ عنصـر همانـی و روی $W_j$ های دیگـر صفـر بـاشد و بعـلاوه $h_1(T)+\cdots+h_k(T)=I$ وغیره.

به‌ازای هر $i$، فرض کنیم

$$f_i=\frac{p}{p_i^{r_i}}=\prod_{j\neq i}p_j^{r_j}\cdot$$

چـون $p_1$، ۰۰۰، $p_k$ چندجمله‌ایهای اول متمایزی هستند، چندجمله‌ایهای $f_1$، ۰۰۰، $f_k$ نسبت به‌هم اول می‌باشند (قضیهٔ ۱۰، فصل ۴). پس، چندجمله‌ایهایی چـون $g_1$، ۰۰۰، $g_k$ وجود دارندکه

$$\sum_{i=1}^{n} f_ig_i=1.$$

بعلاوه توجه کنیدکه اگر $i\neq j$، آنگاه $f_if_j$ برچندجمله‌ای $p$ تقسیم‌پذیر است، زیرا $f_if_j$

هر $p_m^{r_m}$ را به‌عنوان سازه‌ای در بردارد. نشان خواهیم داد که چند جمله‌ایهای $h_i = f_i g_i$ هم به‌همان طریقی که در اولین بند اثبات تشریح شد، عمل می‌کنند.

فرض کنیم $E_i = h_i(T) = f_i(T)g_i(T)$. چون $h_1 + \cdots + h_k = 1$ و $p$، به‌ازای $i \neq j$، $f_i f_j$ را عاد می‌کند، داریم

$$E_1 + \cdots + E_k = I$$

$$\text{و هر گاه } i \neq j\text{،} \quad E_i E_j = 0.$$

پس، $E_i$ها تصویرهایی هستند که با تجزیه‌ای به‌مجموع مستقیم از فضای $V$ در تناظر می‌باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که برد $E_i$ دقیقاً همان زیرفضای $W_i$ است. واضح است که هر بردار در برد $E_i$، در $W_i$ نیز هست، زیرا اگر $\alpha$ در برد $E_i$ باشد، آنگاه $\alpha = E_i\alpha$، ولذا

$$\begin{aligned} p_i(T)^{r_i}\alpha &= p_i(T)^{r_i} E_i\alpha \\ &= p_i(T)^{r_i} f_i(T)g_i(T)\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

چرا که $p_i^{r_i} f_i g_i$ بر چندجمله‌ای مینیمال $p$ تقسیم‌پذیر است. بعکس، فرض کنیم $\alpha$ در فضای پوچ $p_i(T)^{r_i}$ باشد. اگر $j \neq i$، آنگاه $f_j g_j$ بر $p_i^{r_i}$ تقسیم‌پذیر است و لذا $f_j(T)g_j(T)\alpha = 0$؛ یعنی، به‌ازای $j \neq i$، $E_j\alpha = 0$. اما دراین صورت، ضروری‌است که $E_i\alpha = \alpha$؛ یعنی، $\alpha$ در برد $E_i$ باشد. این مطلب اثبات حکم (۱) راکامل می‌کند.

به‌طورحتم واضح است که زیرفضاهای $W_i$ تحت $T$ پایا هستند. اگر $T_i$ عملگرالقا شده توسط $T$ روی $W_i$ باشد، آنگاه بدیهی است که $p_i(T_i)^{r_i} = 0$، چراکه بنابر تعریف، $p_i(T)^{r_i}$ روی‌زیرفضای $W_i$ برابر ۰ است. این مطلب نشان می‌دهد که چندجمله‌ای‌مینیمال $T_i$ چندجمله‌ای $p_i^{r_i}$ را عاد می‌کند. بعکس، فرض کنیم $g$ یک چندجمله‌ای باشد که $g(T_i) = 0$. دراین‌صورت $g(T)f_i(T) = 0$. پس، $gf_i$ بر چندجمله‌ای‌مینیمال $T$، یعنی‌$p$، تقسیم‌پذیر است؛ یعنی، $p_i^{r_i} f_i$ چندجمله‌ای $gf_i$ را عاد می‌کند. بسادگی‌دیده می‌شود که $p_i^{r_i}$ هم $g$ را عاد می‌کند. از این‌رو، چندجمله‌ای مینیمال $T_i$ عبارت است از $p_i^{r_i}$. □

**نتیجه.** اگر $E_1, \ldots, E_k$ تصویرهای وابسته به‌تجزیهٔ اولیه $T$ باشند، آنگاه هر $E_i$ یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است و لذا اگر عملگر خطی $U$ با $T$ جابجا شود، آنگاه $U$ با هریك از $E_i$ها جابجا می‌شود، و درنتیجه هرزیرفضای $W_i$ تحت $U$ پایاست.

برحسب نمادگذاری اثبات قضیهٔ ۱۲، نظری می‌کنیم به‌حالت خاصی که در آن چندجمله‌ای مینیمال $T$ حاصلضربی ازچندجمله‌ایهای درجهٔ یکم باشد، یعنی حالتی که در آن هر $p_i$ به‌صورت $p_i = x - c_i$ است. حال برد $E_i$ عبارت است از $W_i$، یعنی فضای پوچ

$(T-c_iI)^{r_i}$. فرض می کنیم $D=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$. بنا بر قضیهٔ ۱۱، $D$ عملگری قطری‌شدنی است که آن را **جزء قطری‌شدنی** $T$ می‌نامیم. به‌عملگر $N=T-D$ توجه کنید. داریم

$$T=TE_1+\cdots+TE_k$$
$$D=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$$

لذا

$$N=(T-c_1I)E_1+\cdots+(T-c_kI)E_k.$$

خواننده باید تاکنون به‌قدرکافی با تصویرها آشنایی پیداکرده باشدکه ببیند

$$N^2=(T-c_1I)^2E_1+\cdots+(T-c_kI)^2E_k$$

ودرحالت کلی

$$N^r=(T-c_1I)^rE_1+\cdots+(T-c_kI)^rE_k.$$

وقتی به‌ازای هر $i$، $r\geqslant r_i$ آنگاه $N^r=0$، چراکه دراین صورت عملگر $(T-c_iI)^r$ روی برد $E_i$ برابر ۰ است.

**تعریف.** فرض کنیم $N$ عملگری خطی روی فضای برداری $V$ باشد. گوییم $N$ **پوچ‌توان** است، هرگاه عدد صحیح مثبتی چون $r$ وجود داشته باشد که $N^r=0$.

**قضیهٔ ۱۳.** گیریم $T$ عملگری‌خطی روی فضای برداری بعدمتناهی $V$ برروی هیأت $F$ باشد. فرض کنیم چندجمله‌ای مینیمال $T$، برروی $F$ به‌حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای خطی تجزیه شود. در این صورت عملگری قطری‌شدنی چون $D$ روی $V$ و عملگر پوچ‌توانی چون $N$ روی $V$ وجود دارد که

(۱) $T=D+N$،

(۲) $DN=ND$.

عملگر قطری‌شدنی $D$ و عملگر پوچ‌توان $N$ توسط (۱) و (۲) به‌طوریکتا تعیین می‌شوند و هریك از آنها یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است.

اثبات. قریباً مشاهده کردیم که می‌توانیم بنویسیم $T=D+N$؛ دراینجا $D$ قطری‌شدنی و $N$ پوچ‌توان است و نیز $D$ و $N$ نه‌تنها جابجا می‌شوند بلکه چندجمله‌ایهایی برحسب $T$ هستند. حال‌فرض کنیم $T=D'+N'$ را هم داریم که درآن $D'$ قطری‌شدنی و $N'$ پوچ‌توان است و $D'N'=N'D'$. ثابت خواهیم کرد که $D=D'$ و $N=N'$.

چون $D'$ و $N'$ با یکدیگرجابجا می‌شوند و $T=D'+N'$، می‌بینیم که $D'$ و $N'$ با $T$ هم جابجا می‌شوند. پس، $D'$ و $N'$ با هرچندجمله‌ای برحسب $T$ جابجا می‌شوند؛ ازاین‌رو، آنها با $D$ و $N$ نیز جابجا می‌شوند. حال داریم

$$D+N=D'+N'$$

یا

$$D-D'=N'-N$$

واین چهارعملگرهمه با هم جابجا می‌شوند. چون $D$ و $D'$ هردو قطری‌شدنی هستند وباهم جابجا می‌شوند، همزمان نیز قطری‌شدنی هستند و $D-D'$ هم قطری‌شدنی است. چون $N$ و $N'$ هردو پوچ‌توان هستند وبا هم جابجا می‌شوند، عملگر $(N'-N)$ پوچ‌توان است؛ زیرا، با استفاده از این حکم که $N$ و $N'$ با هم جابجا می‌شوند

$$(N'-N)^r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(N')^{r-j}(-N)^j$$

ولذا وقتی که $r$ به‌اندازهٔکافی بزرگ باشدهرجمله دراین بسط $(N'-N)^r$ برابر ۰ است. (درواقع، $n$مین توان هرعملگر پوچ‌توان روی فضایی $n$بعدی باید ۰ باشد. دراینجا اگر $r=2n$ فرض شود، $r$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ هست و از اینجا نتیجه می‌شود که $r=n$ هم به‌اندازهٔکافی بزرگ است؛ اما این مطلب از عبارت بالا آشکار نیست.) حال $D-D'$ عملگری قطری‌شدنی‌است که پوچ‌توان نیزهست. چنین عملگری بوضوح عملگرصفراست؛ زیرا به‌علت پوچ‌توان بودن، $r$ی هست که $r\leqslant n$ وچندجمله‌ای مینیمالش به‌صورت $x^r$ باشد. اما در این صورت، چون این عملگرقطری‌شدنی است، چندجمله‌ای مینیمال آن نمی‌تواند ریشه‌ای مکرر داشته باشد؛ ازاین‌رو، $r=1$ وچندجمله‌ای مینیمال چیزی جز $x$ نیست، واین خود حاکی است که این عملگر ۰ است. پس، می‌بینیم که $D=D'$ و $N=N'$. □

**نتیجه.** گیریم $V$ فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بستهٔ جبری $F$، مثلا هیأت اعداد مختلط، باشد. در این صورت هرعملگرخطی $T$ روی $V$ می‌تواند به‌صورت مجموع یك عملگرقطری‌شدنی $D$ ویك عملگر پوچ‌توان $N$ که با یکدیگر جابجامی‌شوند، نوشته شود. این عملگرهای $D$ و $N$ یکتا هستند و هریك از آنها یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است.

ازاین نتایج مشهود است که مطالعهٔ عملگرهای خطی روی فضاهای برداری برروی هیأتی بستهٔ جبری، اساساً به‌مطالعهٔ عملگرهای پوچ‌توان تحویل می‌شود. برای فضاهای برداری برروی هیأتهایی که بستهٔجبری نباشند، هنوزهم لازم است جانشینی برای‌بردارها ومقادیرسرشت‌نما بیابیم. نکتهٔ بسیارجالب در اینجاست که این دومسئله می‌توانند همزمان مورد بررسی قرار گیرند، واین مطلبی است که درفصل بعد به‌انجام آن خواهیم پرداخت.

درخاتمه این بخش، ما یلیم مثالی عرضه‌کنیم که برخی از ایده‌های قضیهٔ تجزیهٔاولیهٔ را تشریح می‌کند. چون این مثال با معادلات دیفرانسیل سروکار دارد، وازاین نظر به‌طور مطلق جبرخطی نیست، ارائهٔ آن را به‌انتهای بخش موکول کردیم.

**مثال ۱۴.** در قضیهٔ تجزیهٔ اولیه‌لازم نیست که فضای برداری $V$ با بعد متناهی باشد، ونیزدرقسمتهای (۱) و(۲) لازم نیست که $p$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ باشد. اگر $T$عملگری خطی روی فضای برداری دلخواهی باشد و اگر چندجمله‌ای تکینی چون $p$ وجود داشته باشدکه $p(T)=0$، آنگاه با اثباتی که ارائه کردیم، قسمتهای (۱) و (۲) قضیهٔ ۱۲ برای $T$ هم معتبرهستند.

گیریم $n$عددی صحیح مثبت و $V$ فضای همهٔ توابع $n$بار به‌طـور پیوسته مشتق‌پذیر $f$ روی خط حقیقی باشدکه در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^n f}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{df}{dt}+a_0 f=0 \qquad (۶-۱۸)$$

صدق می‌کنند. در اینجا $a_0$، ...، $a_{n-1}$ ثابتهای مشخصی هستند. اگر $C_n$ فضای توابع $n$بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیررا نشان دهد،آنگاه$V$، فضای جوابهای این معادلهٔدیفرانسیل، زیرفضایی از $C_n$ است. اگر $D$ عملگرمشتق‌گیری را نشان دهد و $p$ چندجمله‌ای

$$p=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

باشد، آنگاه $V$ فضای پوچ عملگر $p(D)$ است، زیرا (۶-۱۸) بسادگی بیان می‌کند که $p(D)f=0$. بنابراین، $V$ تحت $D$ پایاست. اکنون $D$ را به‌عنوان عملگری خطی روی زیرفضای $V$ محسوب می‌کنیم. دراین صورت $p(D)=0$.

اگر توابع مختلط (مقدار) مشتق‌پذیر مورد بحث باشند، آنگاه $C_n$ و $V$ دو فضای برداری مختلط هستند و $a_0$، ...، $a_{n-1}$ می‌توانند اعداد مختلط دلخواهی باشند. اکنون با فرض اینکه $c_1$، ...، $c_k$ اعداد مختلط متمایزی باشند می‌نویسیم

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}.$$

اگر $W_j$ فضای پوچ $(D-c_jI)^{r_j}$ باشد، آنگاه قضیهٔ ۱۲ بیان می‌کندکه

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k.$$

به‌بیان دیگر، اگر $f$ درمعادلهٔ دیفرانسیل (۶-۱۸) صدق کند،آنگاه $f$ به‌طور یکتا به‌صورت

$$f=f_1+\cdots+f_k$$

قابل توصیف است و هر $f_j$ در معادلهٔ دیفرانسیل $(D-c_jI)^{r_j}f_j=0$ صـدق می‌کند. بنابراین، مطالعهٔ جوابهای معادلهٔ (۶-۱۸)، به‌مطالعهٔ فضای جـوابهای معادلـهٔ دیفرانسیلی به‌صورت

$$(D-cI)^r f=0 \qquad (۶-۱۹)$$

تحویل می‌شود. این تحویل، با روش عمومی جبرخطی، یعنی با قضیهٔ تجزیهٔ اولیه،صورت گرفته است.

برای توصیف فضای جوابهای (۶-۱۹) باید مطالبی درمورد معادلات دیفرانسیل بدانیم؛ یعنی باید درمورد $D$ مطالبی سوای این واقعیت که عملگری خطی است بدانیم. با این وجود، نیازی به‌دانستن‌مطالب‌زیادی نداریم. با استقرا روی $r$ بسیار آسان‌می‌توانیم ثابت کنیم که اگر $f$ در $C_r$ باشد، آنگاه

$$(D-cI)^r f = e^{ct}D^r(e^{-ct}f)$$

یعنی،

$$\frac{df}{dt}-cf(t)=e^{ct}\frac{d}{dt}(e^{-ct}f), \quad \text{و غیره.}$$

پس، $(D-cI)^r f=\circ$ اگر وتنها اگر $D^r(e^{-ct}f)=\circ$. تابعی چون $g$ که $D^r g=\circ$، یعنی $d^r g/dt^r=\circ$، باید تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ $(r-۱)$ یا کمتر باشد:

$$g(t)=b_\circ+b_۱t+\cdots+b_{r-۱}t^{r-۱}.$$

پس $f$ در (۶-۱۹) صدق می‌کند اگر وتنها اگر $f$ به‌صورت

$$f(t)=e^{ct}(b_\circ+b_۱t+\cdots+b_{r-۱}t^{r-۱})$$

باشد. بنابراین، «توابع» $e^{ct}$، $te^{ct}$، ...، $t^{r-۱}e^{ct}$ فضای جوابهای (۶-۱۹) را پدید می‌آورند. چون توابع ۱، $t$، ...، $t^{r-۱}$ مستقل خطی هستند و تابع نمایی صفر ندارد، این $r$ تابع $t^je^{ct}$، $\circ\leqslant j\leqslant r-۱$، پایه‌ای برای فضای جوابها تشکیل می‌دهند.

با بازگشت به‌معادلهٔ دیفرانسیل (۶-۱۸) که همان معادلهٔ

$$p(D)f=\circ$$

$$p=(x-c_۱)^{r_۱}\cdots(x-c_k)^{r_k}$$

است، می‌بینیم که $n$ تابع $t^me^{c_jt}$، $\circ\leqslant m\leqslant r_j-۱$ و $۱\leqslant j\leqslant k$، پایه‌ای برای فضای جوابهای (۶-۱۸) تشکیل می‌دهند. بخصوص، فضای جوابها با بعد متناهی است و بعدش برابر با درجهٔ چندجمله‌ای $p$ است.

## تمرین

۱. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $R^۳$ باشد که درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۶ & -۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ & -۲ \\ ۱\circ & -۵ & -۳ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال $p$ از $T$ را به‌صورت $p=p_۱p_۲$، که در آن

$p_1$ و $p_2$ تکین و برروی هیأت اعداد حقیقی تحویل‌ناپذیر باشند، بیان کنید. گیریم $W_i$ فضای پوچ $p_i(T)$ باشد. پایه‌های $\mathcal{B}_i$ برای فضاهای $W_1$ و $W_2$ را بیابید. اگر $T_i$ عملگر القا شده توسط $T$ روی $W_i$ باشد، ماتریس $T_i$ درپایهٔ $\mathcal{B}_i$ (در بالا) را بیابید.

۲. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $R^3$ باشد که با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

درپایهٔ مرتب استانده نمایش داده می‌شود. نشان دهید عملگری قطری شدنی چون $D$ روی $R^3$ وعملگری پوچ‌توان چون $N$ روی $R^3$ وجود دارد که $T=D+N$ و $DN=ND$. ماتریسهای $D$ و $N$ را درپایهٔ استانده بیابید. (عیناً اثبات قضیهٔ ۱۲ را برای این حالت خاص تکرار کنید.)

۳. اگر $V$ فضای همهٔ چندجمله‌ایهای از درجهٔ $n$ یا کمتر برروی هیأت $F$ باشد، ثابت کنید که عملگرمشتق‌گیری روی $V$ پوچ‌توان است.

۴. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

وچندجمله‌ای مینیمال

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$$

باشد. ونیزفرض کنید $W_i$ فضای پوچ $(T-c_iI)^{r_i}$ باشد.

(الف) ثابت کنید $W_i$ مجموعهٔ همهٔ بردارهای $\alpha$ در $V$ است که به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون $m$ (که ممکن است به $\alpha$ وابسته باشد) $(T-c_iI)^m\alpha=0$.

(ب) ثابت کنید بعد $W_i$ برابر $d_i$ است. (راهنمایی: اگر $T_i$ عملگر القا شده توسط $T$ روی $W_i$ باشد، آنگاه $T_i-c_iI$ پوچ‌توان است. پس، چندجمله‌ای‌سرشت‌نمای $T_i-c_iI$ باید $x^{e_i}$، که درآن $e_i$ بعد $W_i$ است، باشد (اثبات؟). بدین‌سان، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T_i$ عبارت است از $(x-c_i)^{e_i}$. حال این واقعیت را که چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ حاصل‌ضرب چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای $T_i$ است به‌کار گیرید و نشان دهید که $e_i=d_i$.)

۵. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت اعداد مختلط باشد. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $V$، و $D$ جزء قطری‌شدنی $T$ باشد. ثابت کنید که اگر $g$

یك چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد، آنگاه جزء قطری شدنی $g(T)$ عبارت است از $g(D)$.

۶. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد و داشته باشیم ۱ = رتبهٔ $(T)$. ثابت کنید که یا $T$ قطری‌شدنی است یا پوچ‌توان، ولی نه‌هردو.

۷. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. فرض کنید $T$ با هرعملگر خطی قطری‌شدنی روی $V$ جابجا شود. ثابت کنید $T$ مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۸. فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت $F$ و $A$ ماتریس $n\times n$ ثابتی برروی $F$ باشد. عملگر خطی $T$ روی $V$ را طبق $T(B)=AB-BA$ تعریف کنید. ثابت کنیدکه اگر $A$ ماتریسی پوچ‌توان باشد، آنگاه $T$ عملگری پوچ‌توان است.

۹. دو ماتریس پوچ‌توان ۴ $\times$ ۴ مثال بزنید که دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند (لزوماً چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی هم دارند)، اما متشابه نباشند.

۱۰. گیریم $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ و $p=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنید $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ تجزیهٔ اولیه $T$، یعنی $W_j$ فضای پوچ $p_j(T)^{r_j}$، باشد. همچنین فرض کنید $W$ زیرفضایی از $V$ باشد که تحت $T$ پایاست. ثابت کنید

$$W=(W\cap W_1)\oplus(W\cap W_2)\oplus\cdots\oplus(W\cap W_k).$$

۱۱. اشتباه «اثبات» زیر برای قضیهٔ ۱۳ در کجاست؟ فرض کنید چندجمله‌ای مینیمال $T$ حاصلضربی از سازه‌های خطی باشد. دراین صورت بنا برقضیهٔ ۵، $T$ مثلثی‌شونده است. $\mathscr{B}$ را پایهٔ مرتبی بگیریدکه $A=[T]_{\mathscr{B}}$ از بالا مثلثی باشد. گیریم $D$ ماتریسی قطری با درایه‌های قطری $a_{11}$، ...، $a_{nn}$ باشد. دراین صورت $A=D+N$، که در آن $N$ اکیداً از بالا مثلثی است. بدیهی است که $N$ پوچ‌توان است.

۱۲. اگر دربارهٔ تمرین ۱۱ فکر کرده‌اید، پس از مشاهدهٔ آنچه‌که قضیهٔ ۷ دربارهٔ اجزای قطری‌شدنی وپوچ‌توان $T$ می‌گوید، دوباره روی آن فکر کنید.

۱۳. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $V$ باشدکه چندجمله‌ای مینیمال آن به‌صورت $p^n$، و $p$ برروی هیأت اسکالری مربوط تحویل‌ناپذیر باشد. نشان دهید برداری چون $\alpha$ در $V$ وجود داردکه $T$-پوچساز $\alpha$ برابر $p^n$ باشد.

۱۴. قضیهٔ تجزیهٔ اولیه و نتیجهٔ تمرین ۱۳ را برای اثبات حکم زیر به‌کار گیرید. اگر $T$ عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد، آنگاه برداری چون $\alpha$ در $V$ وجود دارد که $T$-پوچساز آن چندجمله‌ای مینیمال $T$ است.

۱۵. اگر $N$ عملگرخطی پوچ‌توانی روی یک فضای برداری $n$بعدی باشد، آنگاه چند-جمله‌ای سرشت‌نمای $N$ عبارت است از $x^n$.

# ۷

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# فرمهای گویا و ژوردان

## ۱.۷. زیرفضاهای دوری و پوچسازها

یکبار دیگر $V$ فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت $F$ و $T$ عملگر خطی ثابتی (اما دلخواه) روی $V$ فرض می‌شود. اگر $\alpha$ بردار دلخواهی از $V$ باشد،کوچکترین زیرفضایی از $V$ که تحت $T$ پایا و شامل $\alpha$ نیز باشد، وجود دارد. این زیرفضا را می‌توان به‌صورت اشتراك همهٔ زیرفضاهای $T$-پایا که شامل $\alpha$ نیز باشند، تعریف‌کرد؛ اما، اکنون مناسبتر است که به‌روش زیر به‌مطالب بنگریم. اگر $W$ زیرفضایی از $V$ باشدکه تحت $T$ پایا و شامل $\alpha$ باشد، آنگاه $W$ باید شامل بردار $T\alpha$ نیز باشد؛ ازاین‌رو، $W$ بایدشامل $T(T\alpha)=T^2\alpha$، $T(T^2\alpha)=T^3\alpha$، وغیره نیز باشد. به‌بیان دیگر، $W$ باید به‌ازای هر-چندجمله‌ای $g$ بر روی $F$، شامل $g(T)\alpha$ نیز باشد. مجموعهٔ همهٔ بردارهای به‌صورت $g(T)\alpha$، به‌ازای $g$ متعلق به $F[x]$، بوضوح تحت $T$ پایاست، و از این روکوچکترین زیرفضای $T$-پایایی است که شامل $\alpha$ است.

**تعریف.** اگر $\alpha$ بردار دلخواهی از $V$ باشد، **زیرفضای $T$-دوری تولید شده توسط $\alpha$** عبارت است از زیرفضای $Z(\alpha;T)$ متشکل از همهٔ بردارهای به صورت $g(T)\alpha$، که $g$ در $F[x]$ است. اگر $Z(\alpha;T)=V$، آنگاه $\alpha$ یك **بردار دوری** برای $T$ نامیده می‌شود.

طریق دیگر توصیف زیرفضای $Z(\alpha;T)$ این است که $Z(\alpha;T)$ زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای $T^k\alpha$، $k \geqslant 0$ است، و ازاین قرار $\alpha$ برداری دوری برای $T$ است

اگر وتنها اگر این بردارها $V$ را پدیدآورند. به‌خواننده هشدار می‌دهیم که درحالت کلی عملگر $T$ ممکن است بردار دوری نداشته باشد.

**مثال ۱.** به‌ازای هر $T$، زیرفضای $T$-دوری تولید شده توسط بردار صفر عبارت است از زیرفضای صفر. فضای $Z(\alpha;T)$ یك بعدی است اگر و تنها اگر $\alpha$ یك بردار سرشت‌نمای $T$ باشد. برای عملگرهمانی، هر بردار غیرصفر زیرفضایی دوری و یك‌بعدی تولید می‌کند؛ پس، اگر $\dim V > ۱$، عملگر همانی دارای بردار دوری نیست. عملگر خطی $T$ روی $F^۲$ که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، مثالی ازعملگری است که برداری دوری دارد. دراینجا برداردوری (یك بردار دوری) $\epsilon_۱$ است؛ زیرا، اگر $\beta=(a, b)$، آنگاه در ازای $g=a+bx$ داریم $\beta=g(T)\epsilon_۱$. برای همین عملگر $T$، زیر فضای دوری تولید شده توسط $\epsilon_۲$، فضای یك‌بعدی پدیدآمده توسط $\epsilon_۲$ است، چرا که $\epsilon_۲$ یك بردار سرشت‌نمای $T$ است.

به‌ازای هر $T$ و هر $\alpha$، به‌روابط

$$c_۰\alpha+c_۱T\alpha+\cdots+c_kT^k\alpha=۰$$

بین بردارهای $T^j\alpha$، یعنی، به چند جمله‌ایهای $g=c_۰+c_۱x+\cdots+c_kx^k$ که دارای خاصیت $g(T)\alpha=۰$ باشند، علاقه‌مندهستیم. مجموعهٔ همهٔ $g$های متعلق به $F[x]$ به‌طوری که $g(T)\alpha=۰$، بوضوح یك ایدآل $F[x]$ است. این مجموعه همچنین یك ایدآل غیرصفر است، زیرا که شامل چندجمله‌ای مینیمال $p$ از عملگر $T$ است (به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $p(T)\alpha=۰$).

**تعریف.** اگر $\alpha$ بردار دلخواهی از $V$ باشد، $T$-**پوچساز** $\alpha$ عبارت است از ایدآل $M(\alpha;T)$ در $F[x]$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای $g$ بر روی $F$ با شرط $g(T)\alpha=۰$. چندجمله‌ای تکین یکتای $p_\alpha$ که این ایدآل را تولید می‌کند، نیز $T$-**پوچساز** $\alpha$ نامیده می‌شود.

همچنان‌که در بالا نشان دادیم، $T$-پوچساز $p_\alpha$، چند جمله‌ای مینیمال عملگر $T$ را عاد می‌کند. خواننده باید همچنین توجه کند که $\deg(p_\alpha)>۰$، مگر آنکه $\alpha$ بردار صفر باشد.

**قضیهٔ ۱.** گیریم $\alpha$ بردار غیرصفر دلخواهی از $V$ و $p_\alpha$، $T$-پوچساز $\alpha$ باشد.

(۱) درجهٔ $p_\alpha$ برابر است با بعد زیرفضای دوری $Z(\alpha;T)$.

(۲) اگر درجهٔ $p_\alpha$ برابر $k$ باشد، آنگاه بردارهای $\alpha$، $T\alpha$، $T^2\alpha$، ...، $T^{k-1}\alpha$ پایه‌ای برای $Z(\alpha;T)$ تشکیل می‌دهند.
(۳) اگر $U$ عملگرخطی القاشده توسط $T$ روی $Z(\alpha;T)$ باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال $U$ برابر $p_\alpha$ است.

اثبات. فرض‌کنیم $g$ یك چندجمله‌ای بر روی هیأت $F$ باشد. می‌نویسیم

$$g=p_\alpha q+r$$

کـه در آن یا $r=0$ یا $\deg(r)<\deg(p_\alpha)=k$. چندجمله‌ای $p_\alpha q$ در $T$-پوچساز $\alpha$ قرار دارد و لذا

$$g(T)\alpha=r(T)\alpha.$$

چون $r=0$ یا $\deg(r)<k$، بردار $r(T)\alpha$ ترکیبی‌خطی‌ازبردارهای $\alpha$، $T\alpha$، ...، $T^{k-1}\alpha$ است و چون $g(T)\alpha$ برداری نوعی از $Z(\alpha;T)$ است، این مطلب نشان می‌دهد که این $k$ بردار $Z(\alpha;T)$ را پدید می‌آورند. ایـن بردارها یقیناً مستقل خطی هستند، زیرا هررابطهٔ خطی غیر بـدیهی بین‌آنهـا، چندجملـه‌ای غیر صفری چـون $g$ را کـه $g(T)\alpha=0$ و $\deg(g)<\deg(p_\alpha)$ به‌ما خواهدداد، که خود بی‌معنی است. این مطلب (۱) و (۲) را اثبات می‌کند.

$U$ را عملگرخطی روی $Z(\alpha;T)$ حاصل ازتحدید $T$ به‌آن زیرفضا فرض می‌کنیم. اگر $g$ چندجمله‌ای دلخواهی بر روی $F$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}p_\alpha(U)g(T)\alpha&=p_\alpha(T)g(T)\alpha\\&=g(T)p_\alpha(T)\alpha\\&=g(T)0\\&=0.\end{aligned}$$

بنابراین عملگر $p_\alpha(U)$ هـر بردار در $Z(\alpha;T)$ را به ۰ می‌فـرستد و از ایـن‌رو، روی $Z(\alpha;T)$ عملگـر صفر است. بعلاوه، اگـر چندجمله‌ای $h$ از درجـهٔ کمتر از $k$ بـاشد، نمی‌توانیم داشته باشیم $h(U)=0$، زیرادرآن‌صورت $h(U)\alpha=h(T)\alpha=0$ که متناقض با تعریف $p_\alpha$ است. این نشان می‌دهد که $p_\alpha$ چندجمله‌ای مینیمال $U$ است. □

یك پیامد خاص این قضیه چنین است: اگر $\alpha$ بر حسب اتفاق برداری دوری برای $T$ باشد، آنگاه چند جمله‌ای مینیمال $T$ باید درجه‌ای برابر با بعد فضای $V$ داشته باشد؛ از این‌رو، قضیهٔ کیلی-همیلتن حاکی است که چندجمله‌ای مینیمال $T$ همان چندجملـه‌ای سرشت‌نمای $T$ است. بعداً ثابت خواهیم‌کرد که برای هر $T$ برداری چون $\alpha$ در $V$ وجود داردکه چندجمله‌ای مینیمال $T$ را به‌عنوان پوچساز خود داراست. پس، نتیجه خواهد شد که $T$ دارای برداری دوری است اگر وتنها اگر چندجمله‌ایهای مینیمال و سرشت‌نمای $T$

مساوی باشند. اما تا دیدن این مطلب کمی کار در پیش است.

نقشهٔ ما مطالعهٔ $T$ عمومی با استفاده از عملگرهایی است که برداری دوری داشته باشند. لذا، به عملگر خطی $U$ روی فضای $W$ با بعد $k$ که برداری دوری چون $\alpha$ داشته باشد، توجه می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ ۱، بردارهای $\alpha, \dots, U^{k-1}\alpha$ پایه‌ای برای فضای $W$ تشکیل می‌دهند و پوچساز $p_\alpha$ از $\alpha$، چندجمله‌ای مینیمال $U$ (و از این رو، همچنین چندجمله‌ای سرشت‌نمای $U$) است. اگر $\alpha_i = U^{i-1}\alpha$، $i = 1, \dots, k$، فرض شود، آنگاه کنش $U$ روی پایهٔ مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} U\alpha_i &= \alpha_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k-1 \\ U\alpha_k &= -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \cdots - c_{k-1}\alpha_k \end{aligned} \tag{۷-۱}$$

البته $p_\alpha = c_0 + c_1x + \cdots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k$. عبارت داده شده برای $U\alpha_k$ از این حکم که $p_\alpha(U) = 0$، یعنی

$$U^k\alpha + c_{k-1}U^{k-1}\alpha + \cdots + c_1U_\alpha + c_0\alpha = 0$$

نتیجه می‌شود. این مطلب حکم می‌کند که ماتریس $U$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت باشد از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{k-1} \end{bmatrix} \tag{۷-۲}$$

ماتریس (۷-۲)، **ماتریس همدم** چندجمله‌ای تکین $p_\alpha$ نامیده می‌شود.

**قضیهٔ ۲.** اگر $U$ عملگری خطی روی فضای بعد متناهی $W$ باشد، آنگاه $U$ دارای برداری دوری است، اگر و تنها اگر پایهٔ مرتبی برای $W$ وجود داشته باشد که در آن $U$ توسط ماتریس همدم چندجمله‌ای مینیمال $U$ نمایش داده شود.

اثبات. قبلاً مشاهده کردیم که اگر $U$ دارای برداری دوری باشد، آنگاه چنین پایهٔ مرتبی برای $W$ وجود دارد. بعکس، اگر پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ برای $W$ داشته باشیم که در آن $U$ توسط ماتریس همدم چند جمله‌ای مینیمالش نمایش داده شود، روشن است که $\alpha_1$ برداری دوری برای $U$ است. □

**نتیجه.** اگر $A$ ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین $p$ باشد، آنگاه $p$ هم چندجمله‌ای مینیمال و هم چند جمله‌ای سرشت‌نمای $A$ است.

اثبات. یک‌راه برای دیدن این مطلب، این است که $U$ را عملگری خطی روی $F^k$ بگیریم که در پایــه مرتب استانده با $A$ نمایش داده می‌شود و قضیهٔ ۱ را همراه با قضیهٔ کیلی-همیلتن مورد استفاده قرار دهیم. روش دیگر ایــن است کــه با استفاده از قضیهٔ ۱ نشان دهیم $p$ چندجمله‌ای مینیمال $A$ است و با محاسبه‌ای مستقیم بررسی کنیم که $p$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ نیز است. □

توضیح آخر - اگر $T$ عملگر خطی دلخواهی روی فضای $V$ و $\alpha$ هر برداری از $V$ باشد، آنگاه عملگر $U$ که $T$ روی زیرفضای دوری $Z(\alpha;T)$ القا می‌کند دارای برداری دوری، مثلاً $\alpha$ است. پس، $Z(\alpha;T)$ دارای پایــهٔ مرتبی است که در آن $U$ توسط ماتریس همدم $p_\alpha$، $T$- پوچساز $\alpha$، نمایش داده می‌شود.

## تمرین

۱. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $F^۲$ باشد. ثابت‌کنید هر بردار غیرصفری‌که بردار سرشت‌نمای $T$ نباشد برای $T$ برداری‌دوری است. ازاینجا ثابت‌کنید‌که یا $T$ برداری دوری‌دارد یااینکه $T$ مضربی اسکالری از عملگرهمانی است.

۲. $T$ را عملگری خطی روی $R^۳$ بگیریدکه درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. ثابت‌کنید $T$ هیچ بردار دوری ندارد. زیرفضای $T$-دوری‌تولید-شده توسط بردار $(۱, -۱, ۳)$ چیست؟

۳. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $C^۳$ باشدکه درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & i & ۰ \\ -۱ & ۲ & -i \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. $T$-پوچساز بردار $(۱, ۰, ۰)$ و نیــز $T$-پوچساز $(۱, ۰, i)$ را بیابید.

۴. ثابت کنید که اگر $T^2$ برداری دوری داشته باشد، آنگاه $T$ هم برداری دوری دارد. آیا عکس مطلب درست است؟

۵. فضای برداری $n$بعدی $V$ برروی هیأت $F$ و عملگرخطی پوچ‌توان $N$ روی $V$ داده شده‌اند. فرض کنید $N^{n-1} \neq 0$، و $\alpha$ برداری از $V$ باشد که $N^{n-1}\alpha \neq 0$. ثابت کنید $\alpha$ برداری دوری برای $N$ است. ماتریس $N$ در پایهٔ مرتب $\{\alpha, N\alpha, \ldots, N^{n-1}\alpha\}$ دقیقاً چیست؟

۶. اثباتی مستقیم از این مطلب که اگر $A$ ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین $p$ باشد، آنگاه $p$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ است، ارائه کنید.

۷. فضای برداری $n$بعدی $V$ و عملگرخطی $T$ روی $V$ مفروض‌اند. فرض کنید $T$ قطری‌شدنی باشد.

(الف) اگر $T$ برداری دوری داشته باشد، نشان دهید $T$، $n$ مقدار سرشت‌نمای متمایز دارد.

(ب) اگر $T$ دارای $n$مقدار سرشت‌نمای متمایز، و $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای از بردارهای سرشت‌نمای $T$ باشد، نشان دهید $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ برداری دوری برای $T$ است.

۸. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ و $T$ دارای برداری دوری باشد. ثابت کنید اگر $U$ عملگری خطی باشد که با $T$ جابجا می‌شود، آنگاه $U$ یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است.

## ۲.۷. تجزیه‌های دوری وفرم گویا

هدف اصلی این بخش اثبات این مطلب است که اگر $T$ عملگری خطی روی فضایی با بعد متناهی مانند $V$ باشد، آنگاه بردارهایی چون $\alpha_1$، $\ldots$، $\alpha_r$ در $V$ وجود دارند که

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T).$$

به‌بیان دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که $V$ مجموع مستقیمی از زیرفضاهای $T$-دوری است. این مطلب نشان می‌دهد که $T$ مجموع مستقیم تعدادی متناهی از عملگرهایی خطی است که هریك دارای برداری دوری است. نتیجهٔ این مطلب، تحویل پرسشهای بسیاری دربارهٔ عملگرخطی عمومی به‌پرسشهای مشابهی است درمورد عملگری که برداری دوری داشته باشد. قضیه‌ای راکه اثبات خواهیم کرد (قضیهٔ ۳) یکی از عمیق‌ترین نتایج جبرخطی و دارای نتیجه‌های جالب بسیاری است.

قضیهٔ تجزیهٔ دوری در رابطهٔ نزدیك بـا سؤال زیر است. کدام‌یك از زیرفضاهای

$T$-پایای $W$ دارای این خاصیت است که زیرفضای $T$-پایایی چون $W'$ با شرط $V=W\oplus W'$ وجود داشته باشد؟ اگر $W$ زیرفضایی دلخواه از فضای با بعد متناهی $V$ باشد، آنگاه زیرفضایی چون $W'$ وجود دارد که $V=W\oplus W'$. معمولاً این گونه زیرفضاهای $W'$ زیادند، و هر یك از آنها **مکمل** $W$ نامیده می‌شود. می‌خواهیم بدانیم چه‌وقت زیرفضایی $T$-پایا، زیرفضای مکملی دارد که تحت $T$ پایا هم هست.

فرض می‌کنیم $V=W\oplus W'$ و در آن $W$ و $W'$ هردو تحت $T$ پایا باشند. حال ببینیم دربارهٔ زیرفضای $W$ چه مطالبی را می‌توانیم کشف کنیم. هر بردار $\beta$ در $V$ به‌صورت $\beta=\gamma+\gamma'$ است، که در آن $\gamma$ در $W$ و $\gamma'$ در $W'$ است. اگر $f$ یك چندجمله‌ای بر روی هیأت اسکالری باشد، آنگاه

$$f(T)\beta=f(T)\gamma+f(T)\gamma'.$$

چون $W$ و $W'$ تحت $T$ پایا هستند، بردار $f(T)\gamma$ در $W$ و بردار $f(T)\gamma'$ در $W'$ قرار دارد. بنابراین، $f(T)\beta$ در $W$ است اگر وتنها اگر $f(T)\gamma'=0$. آنچه توجه ما را جلب می‌کند این حقیقت به‌ظاهر ساده است که اگر $f(T)\beta$ در $W$ باشد، آنگاه $f(T)\beta=f(T)\gamma$.

**تعریف.** گیریم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری $V$ و $W$ زیرفضایی از $V$ باشد. گوییم $W$ زیرفضایی **$T$-مجاز** است،

(۱) اگر $W$ تحت $T$ پایا باشد؛

(۲) و اگر $f(T)\beta$ در $W$ باشد، آنگاه برداری چون $\gamma$ در $W$ وجود داشته باشدکه $f(T)\beta=f(T)\gamma$.

چنانکه قریباً نشان دادیم اگر $W$ پایا و دارای زیرفضای پایای مکملی باشد، آنگاه $W$ مجاز است. یکی از پیامدهای قضیهٔ ۳ عکس این مطلب است، و از آنجا مجاز بودن زیرفضاهای پایایی راکه دارای زیرفضای پایای مکمل هستند مشخص می‌کند.

حال نشان می‌دهیم خاصیت مجاز بودن چگونه وارد تلاش ما در به‌دست آوردن تجزیه‌ای چون

$$V=Z(\alpha_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r;T)$$

می‌شود. روش اساسی برای دست‌یافتن به‌چنین تجزیه‌ای، انتخاب از راه استقرا بردارهای $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ است. فرض کنیم به‌گونه‌ای $\alpha_1$، ...، $\alpha_j$ را انتخاب کرده باشیم و زیرفضای

$$W_j=Z(\alpha_1;T)+\cdots+Z(\alpha_j;T)$$

سره باشد. علاقه‌مندیم بردار غیرصفری چون $\alpha_{j+1}$ بیابیم که

$$W_j\cap Z(\alpha_{j+1};T)=\{0\}.$$

زیرا در این صورت زیرفضای $W_{j+1}=W_j\oplus Z(\alpha_{j+1};T)$ دست‌کم یك بعد به‌تکمیل

$V$ نزدیکتر خواهد بود. اما چرا باید چنین $\alpha_{j+1}$ی موجود باشد؟ اگر $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_j$ طوری انتخاب شده باشند که $W_j$ زیرفضایی $T$-مجاز باشد، آنگاه نسبتاً بسادگی دیده می‌شود که می‌توانیم $\alpha_{j+1}$ مناسبی بیابیم. حتی اگر نحوهٔ بیان استدلال ما هم چنین نباشد، درواقع این همان مطلبی است که کار اثبات قضیهٔ ۳ را به‌پیش می‌برد. گیریم $W$ زیرفضای $T$-پایای سره‌ای باشد. سعی می‌کنیم بردار غیرصفری چون $\alpha$ بیابیم که

$$W\bigcap Z(\alpha;T)=\{0\}. \qquad (۳\text{-}۷)$$

می‌توان برداری چون $\beta$ را انتخاب کرد که در $W$ نباشد. فضای $T$-هادی $S(\beta;W)$ را که متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای $g$ است که $g(T)\beta$ در $W$ قراردارد، درنظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای تکین $f=s(\beta;W)$ که ایدآل $S(\beta;W)$ را تولید می‌کند نیز $T$- هادی $\beta$ در $W$ نامیده می‌شود. بردار $f(T)\beta$ در $W$ است. حال، اگر $W$، $T$-مجاز باشد، عنصری چون $\gamma$ در $W$ قراردارد که $f(T)\beta=f(T)\gamma$. فرض کنیم $\alpha=\beta-\gamma$ و $g$ چندجمله‌ای دلخواهی باشد. چون $\beta-\alpha$ در $W$ قراردارد، $g(T)\beta$ در $W$ است اگر وتنها اگر $g(T)\alpha$ نیز در $W$ باشد؛ به‌بیان دیگر، $S(\alpha;W)=S(\beta;W)$. پس، چندجمله‌ای $f$ نیز $T$-هادی $\alpha$ در $W$ است. اما $f(T)\alpha=0$. این موضوع می‌رساند که $g(T)\alpha$ در $W$ است اگروتنها اگر $g(T)\alpha=0$؛ در اینجا، زیرفضاهای $Z(\alpha;T)$ و $W$ مستقل هستند (۳-۷) و $f$ همان $T$-پوچساز $\alpha$ است.

**قضیهٔ ۳ (قضیهٔ تجزیه دوری).** گیریم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی $V$ و $W_0$ زیرفضای $T$-مجاز سره‌ای از $V$ باشد. بردارهای غیرصفری چون $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_r$ در $V$ بترتیب با $T$-پوچسازهای $p_1$، $\cdots$، $p_r$ وجود دارند که

(۱) $V=W_0\oplus Z(\alpha_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r;T)$؛

(۲) $p_k$ چندجمله‌ای $p_{k-1}$ را عاد می‌کند، $k=2,\cdots,r$.

بعلاوه، عدد صحیح $r$ و پوچسازهای $p_1$، $\cdots$، $p_r$ توسط (۱)، (۲) و این واقعیت که هیچ یك از $\alpha_k$ها صفر نیستند، به‌طور یکتا تعیین می‌شوند.

اثبات. اثبات نسبتاً طولانی است؛ از این‌رو، آن را به‌چهار مرحله تقسیم می‌کنیم. گرچه در مطالعهٔ اول، ممکن است فرض $W_0=\{0\}$ اثبات را ساده‌تر جلوه دهد، اما واقعاً این فرض سادگی عمده‌ای را سبب نمی‌شود. در سرتاسر اثبات، $f(T)\beta$ را باختصار به‌صورت $f\beta$ می‌نویسیم.

مرحلهٔ ۱. بردارهای غیرصفری چون $\beta_1$، $\cdots$، $\beta_r$ وجود دارند که

(الف) $V=W_0+Z(\beta_1;T)+\cdots+Z(\beta_r;T)$؛

(ب) اگر $1\leqslant k\leqslant r$ و

$$W_k=W_0+Z(\beta_1;T)+\cdots+Z(\beta_k;T)$$

آنگاه درجهٔ هادی $p_k=s(\beta_k;W_{k-1})$ در بین همهٔ $T$-هادیهای در زیرفضای $W_{k-1}$

ماکسیمم است؛ یعنی، به‌ازای هر $k$

$$\deg p_k = \max_{\alpha \text{ در } V} \deg s(\alpha; W_{k-1}).$$

این مرحله تنها به‌این امر بستگی دارد که $W_\circ$ زیرفضای پایایی است. اگر $W$ زیرفضای $T$-پایای سره ای باشد، آنگاه

$$\circ < \max_{\alpha} \deg s(\alpha; W) \leqslant \text{بعد}\,(V)$$

و می‌توانیم برداری چون $\beta$ انتخاب کنیم که $\deg s(\beta; W)$ همان ماکسیمم باشد. در این صورت زیرفضای $W+Z(\beta; T)$، $T$-پایا ودارای بعدی بزرگتر از بعد $(W)$ است. این فرایند را برای به دست آوردن $\beta_1$ روی $W=W_\circ$ به‌کار می‌بندیم. اگر $W_1=W_\circ+Z(\beta_1; T)$ هنوز هم سره باشد، آنگاه فرایند را برای به‌دست آوردن $\beta_2$ روی $W_1$ به‌کار می‌بریم. این روش را ادامه می‌دهیم. چون بعد $(W_{k-1})>$ بعد $(W_k)$، باید در حداکثر بعد $(V)$ مرحله به $W_r=V$ برسیم.

مرحلهٔ ۲. گیریم $\beta_1$، ...، $\beta_r$ بردارهای غیرصفری باشند که شرایط (الف) و (ب) از مرحلهٔ ۱ را برآورند. $k$ را ثابت می‌گیریم، $1 \leqslant k \leqslant r$. فرض می‌کنیم $\beta$ برداری دلخواه از $V$ باشد و می‌نویسیم $f=s(\beta; W_{k-1})$. اگر

$$f\beta=\beta_\circ+\sum_{1\leqslant i<k} g_i\beta_i \quad , \quad \beta_i \text{ در } W_i$$

آنگاه $f$ همهٔ چندجمله‌ایهای $g_i$ را عاد می‌کند و با فرض این که $\gamma_\circ$ در $W_\circ$ باشد، $\beta_\circ=f\gamma_\circ$.

اگر $k=1$، این حکم عین این است که $W_\circ$ زیرفضایی $T$-مجاز باشد. جهت اثبات حکم برای $k>1$ آلگوریتم تقسیم را به‌کار می‌بندیم:

$$g_i=fh_i+r_i \quad، \quad r_i=\circ \;\; \text{یا} \;\; \deg r_i<\deg f \cdot \tag{۴-۷}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای هر $i$، $r_i=\circ$. فرض کنید

$$\gamma=\beta-\sum_{1}^{k-1} h_i\beta_i \,. \tag{۵-۷}$$

چون $\gamma-\beta$ در $W_{k-1}$ است

$$s(\gamma; W_{k-1})=s(\beta; W_{k-1})=f.$$

بعلاوه

$$f\gamma=\beta_\circ+\sum_{1}^{k-1} r_i\beta_i \,. \tag{۶-۷}$$

تصور کنید یکی از $r_i$ها مخالف ۰ باشد. دراین‌حال تناقضی به‌دست خواهیم آورد. گیریم $j$ بزرگترین نمایهٔ $i$ باشد که به‌ازای آن $r_i \neq 0$. دراین صورت

$$f\gamma = \beta_0 + \sum_{1}^{j} r_i\beta_i ,\quad r_j \neq 0 \quad \text{و} \quad \deg r_j < \deg f. \tag{۷-۷}$$

می‌نویسیم $p = s(\gamma; W_{j-1})$. چون $W_{k-1}$ شامل $W_{j-1}$ است، هادی $f = s(\gamma; W_{k-1})$ باید $p$ را عاد کند:

$$p = fg.$$

$g(T)$ را برهردوطرف (۷-۷) به‌کار می‌بندیم:

$$p\gamma = gf\gamma = gr_j\beta_j + g\beta_0 + \sum_{1 \leqslant i < j} gr_i\beta_i. \tag{۸-۷}$$

بنابرتعریف، $p\gamma$ در $W_{j-1}$ است و دوجملهٔ آخرسمت راست (۸-۷) نیز متعلق به $W_{j-1}$ است. بنابراین، $gr_j\beta_j$ هم در $W_{j-1}$ قراردارد. حال از شرط (ب) مرحلهٔ ۱ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\deg(gr_j) &\geqslant \deg s(\beta_j; W_{j-1})\\ &= \deg p_j\\ &\geqslant \deg s(\gamma; W_{j-1})\\ &= \deg p\\ &= \deg(fg).\end{aligned}$$

پس $\deg r_j \geqslant \deg f$، و این موضوع با انتخاب $j$ تناقض دارد. تااینجا می‌دانیم که $f$ همهٔ $g_i$ها را عاد می‌کند و ازاین‌رو $\beta_0 = f\gamma$. چون $W_0$ زیرفضایی $T$-مجاز است، با فرض اینکه $\gamma_0$ در $W_0$ باشد، $\beta_0 = f\gamma_0$. ضمناً متذکر می‌شویم که مرحلهٔ ۲ صورت قویتری از این حکم است که هریك از زیرفضاهای $W_1$، $W_2$، $\dots$، $W_r$ زیرفضایی $T$-مجاز است.

مرحلهٔ ۳. بردارهای غیرصفری چون $\alpha_1$، $\dots$، $\alpha_r$ در $V$ وجود دارند که در شرایط (۱) و (۲) قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند.

همچون مرحلهٔ ۱، با بردارهای $\beta_1$، $\dots$، $\beta_r$ آغاز می‌کنیم و $k$ را ثابت نگه می‌داریم، $1 \leqslant k \leqslant r$. مرحلهٔ ۲ را بر بردار $\beta = \beta_k$ و $T$-هادی $f = p_k$ به‌کارمی‌بندیم. داریم

$$p_k\beta_k = p_k\gamma_0 + \sum_{1 \leqslant i < k} p_k h_i \beta_i \tag{۹-۷}$$

که درآن $\gamma_0$ در $W_0$ است و $h_1$، $\dots$، $h_{k-1}$ چندجمله‌ایهایی هستند. می‌نویسیم

$$\alpha_k=\beta_k-\gamma_0-\sum_{1\leqslant i<k}h_i\beta_i\,. \tag{۱۰-۷}$$

چون $\beta_k-\alpha_k$ در $W_{k-1}$ است

$$s(\alpha_k;W_{k-1})=s(\beta_k;W_{k-1})=p_k \tag{۱۱-۷}$$

و چون $p_k\alpha_k=0$، داریم

$$W_{k-1}\cap Z(\alpha_k;T)=\{0\}. \tag{۱۲-۷}$$

چون همهٔ $\alpha_k$ها (۷-۱۱) و (۷-۱۲) را برمی‌آورند، نتیجه می‌گیریم که

$$W_k=W_0\oplus Z(\alpha_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_k;T).$$

و $p_k$ چندجمله‌ای $T$-پوچساز $\alpha_k$ است. به‌بیان دیگر، بردارهای $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ همان‌دنباله از زیرفضاهای $W_1$، $W_2$، ... را تعریف می‌کنندکه بردارهای $\beta_1$، ...، $\beta_r$؛ و نیز $T$-هادیهای $p_k=s(\alpha_k;W_{k-1})$ همان خواص ماکسیمال بودن (شرط (ب) مرحلهٔ ۱) را دارا هستند. بردارهای $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ دارای‌این خاصیت اضافی هم هستندکه زیرفضاهای $W_0$، $Z(\alpha_1;T)$، $Z(\alpha_2;T)$، ... مستقل هستند. بنابراین بررسی شرط (۲) درقضیهٔ ۳ آسان است. چون به‌ازای هر $i$، $p_i\alpha_i=0$، رابطهٔ بدیهی

$$p_k\alpha_k=0+p_1\alpha_1+\cdots+p_{k-1}\alpha_{k-1}$$

در دست است. مرحلهٔ ۲ را با گذاشتن $\alpha_1$، ...، $\alpha_k$ به‌جای $\beta_1$، ...، $\beta_k$ وبا $\beta=\alpha_k$ به‌کار می‌بندیم. نتیجه: $p_k$ هر $p_i$ را، به‌ازای $i<k$، عاد می‌کند.

مرحلهٔ ۴. عدد $r$ و چندجمله‌ایهای $p_1$، ...، $p_r$ به‌طور یکتا توسط شرایط قضیهٔ ۳ تعیین می‌شوند.

فرض می‌کنیم علاوه بر بردارهای $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ در قضیهٔ ۳، بردارهای غیر صفر $\gamma_1$، ...، $\gamma_s$ بترتیب با $T$-پوچسازهای $g_1$، ...، $g_s$ را هم داریم به‌طوری‌که

$$V=W_0\oplus Z(\gamma_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\gamma_s;T) \tag{۱۳-۷}$$

ونیز به‌ازای $k=2,\ldots,s$، $g_k$ چندجمله‌ای $g_{k-1}$ را عاد می‌کند

نشان خواهیم دادکه $r=s$، و به‌ازای هر $i$، $p_i=g_i$.

بسادگی دیده می‌شود که $p_1=g_1$. چندجمله‌ای $g_1$ به‌عنوان $T$-هادی $V$ در $W_0$از (۷-۱۳) حاصل می‌شود. گیریم $S(V;W_0)$ دسته‌ای ازچندجمله‌ایهایی چون $f$ است که به‌ازای هر $\beta$ در $V$، بردار $f\beta$ در $W_0$ باشد؛ یعنی، چندجمله‌ایهایی چون $f$ است که برد $f(T)$ مشمول در $W_0$ باشد. آنگاه $S(V;W_0)$ ایدآل غیرصفری درجبرچندجمله‌ایها است. به‌دلیل زیر، چندجمله‌ای $g_1$ مولد تکین این ایدآل است. هر $\beta$ در $V$ به‌صورت

$$\beta=\beta_0+f_1\gamma_1+\cdots+f_s\gamma_s$$

www.riazisara.ir


است؛ و لذا

$$g_1\beta = g_1\beta_0 + \sum_1^s g_1 f_i \gamma_i \cdot$$

چون هر $g_i$ چندجمله‌ای $g_1$ را عاد می‌کند، به‌ازای همهٔ $i$ها داریم $g_1\gamma_i = 0$ و نیز $g_1\beta = g_1\beta_0$ متعلق به $W_0$ است. پس $g_1$ در $S(V; W_0)$ قرار دارد. چون $g_1$ چندجمله‌ای تکین از کوچکترین درجه است که $\gamma_1$ را در $W_0$ می‌فرستد، می‌بینیم که $g_1$ چندجمله‌ای تکین از کوچکترین درجهٔ موجود در ایدآل $S(V; W_0)$ است. با همین استدلال، $p_1$ مولد این ایدآل است و از اینجا $p_1 = g_1$.

اگر $f$ یك چندجمله‌ای و $W$ زیرفضایی از $V$ باشد، مجموعهٔ همهٔ بردارهای $f\alpha$ به‌ازای $\alpha$ در $W$ را باختصار به‌صورت $fW$ می‌نویسیم. اثبات سه حکم زیر را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

۱. $fZ(\alpha; T) = Z(f\alpha; T)$.

۲. اگر $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ و هر $V_i$ تحت $T$ پایا باشد، آنگاه

$$fV = fV_1 \oplus \cdots \oplus fV_k \cdot$$

۳. اگر $\alpha$ و $\gamma$، $T$-پوچسازهای مساوی داشته باشند، آنگاه $f\alpha$ و $f\gamma$ نیز $T$-پوچسازهای مساوی دارند و (بنابراین)

$$\text{بعد}\,(Z(f\alpha; T)) = \text{بعد}\,(Z(f\gamma; T)) \cdot$$

اکنون، برای اینکه نشان دهیم $r = s$ و به‌ازای $i = 2, \ldots, r$، $p_i = g_i$، به‌استقرا به‌پیش می‌رویم. برهان برشمارش ابعاد به‌طریق درست استوار است. ما اثبات این مطلب را که اگر $r \geqslant 2$ آنگاه $p_2 = g_2$ ارائه می‌دهیم و امیدواریم استقرا از آن دیده شود. فرض کنیم $r \geqslant 2$. دراین صورت

$$\text{بعد}\,(W_0) + \text{بعد}\,(Z(\alpha_1; T)) < \text{بعد}\,(V)$$

چون می‌دانیم $p_1 = g_1$، نتیجه می‌گیریم که بعدهای $Z(\alpha_1; T)$ و $Z(\gamma_1; T)$ مساوی‌اند. بنابراین

$$\text{بعد}\,(W_0) + \text{بعد}\,(Z(\gamma_1; T)) < \text{بعد}\,(V).$$

که نشان می‌دهد $s \geqslant 2$. اکنون می‌توانیم بپرسیم که آیا $p_2 = g_2$ یا نه. از دو تجزیهٔ $V$، دو تجزیه هم برای زیرفضای $p_2V$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} p_2V &= p_2W_0 \oplus Z(p_2\alpha_1; T) \\ p_2V &= p_2W_0 \oplus Z(p_2\gamma_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(p_2\gamma_s; T). \end{aligned} \qquad (۱۴\text{-}۷)$$

دراینجا از احکام (۱) و (۲) بالا استفاده کرده واین حقیقت را هم که $p_2\alpha_i = 0$، $i \geqslant 2$، به‌کار برده‌ایم. چون می‌دانیم $p_1 = g_1$، حکم (۳) بالا می‌گوید که بعدهای $Z(p_2\alpha_1; T)$ و $Z(p_2\gamma_1; T)$ مساوی‌اند. از این‌رو، از (۷-۱۴) آشکار است که

$$\text{بعد}\,(Z(p_2\gamma_i;T))=0. \quad i\geqslant 2.$$

نتیجه اینکه $p_2\gamma_2=0$، و $g_2$ چندجمله‌ای $p_2$ را عـاد می‌کند. این برهـان را می‌توان معکوس کرد و نشان داد که $p_2$ نیز $g_2$ را عاد می‌کند. بنا براین $p_2=g_2$. $\square$

**نتیجه.** اگر $T$ عملگری خطـی روی فضایی برداری با بعد متناهی باشد، آنگـاه هرزیرفضای $T$-مجاز زیرفضای مکملی داردکه تحت $T$پایاست.

اثبات. گیریم $W_0$ زیرفضای مجازی از $V$ باشد. اگـر $W_0=V$ مکملی کـه در جستجـوی آن هستیم $\{0\}$ است، و اگـر $W_0$ سره باشد، قضیهٔ ۳ را بـه‌کار می‌بندیم و می‌نویسیم

$$W_0'=Z(\alpha_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r;T).$$

دراین صورت $W_0'$ تحت $T$پایاست و $V=W_0\oplus W_0'$. $\square$

**نتیجه.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد.

(الف) برداری چون $\alpha$ در $V$ وجود دارد که $T$- پوچساز $\alpha$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ است.

(ب) $T$ برداری دوری دارد اگر و تنها اگر چندجمله‌ایهای سرشت‌نما و مینیمال $T$ مساوی باشند.

اثبات. اگر $V=\{0\}$ نتایج به‌طور بدیهی درست هستند. اگر $V\neq\{0\}$، فرض می‌کنیم

$$V=Z(\alpha_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r;T). \qquad (۱۵\text{-}۷)$$

دراینجا $T$-پوچسازهای $p_1$، ...، $p_r$ طوری هستند که به‌ازای $1\leqslant k\leqslant r-1$، $p_{k+1}$ چندجمله‌ای $p_k$ را عاد می‌کند. همچنان که دراثبات قضیهٔ ۳ ملاحظه کردیم، بسادگی نتیجه می‌شود کـه $p_1$ چندجمله‌ای مینیمال $T$، یعنی $T$-هادی $V$ در $\{0\}$ است. پس (الف) را اثبات کردیم.

در بخش ۱.۷ دیدیم که اگر $T$ دارای برداری دوری باشد چندجمله‌ای مینیمال $T$ بر چندجمله‌ای سرشت‌نما منطبق است. حکـم (ب) عکس این حالت را هم در بر دارد. هر$\alpha$ای را همچون در (الف)، انتخاب کنید. اگـر درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال برابر بعد $(V)$ باشد، آنگاه $V=Z(\alpha;T)$. $\square$

**قضیهٔ ۴ (تعمیم قضیهٔ کیلی-همیلتن).** فرض‌کنیم $T$عملگری‌خطی روی فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد. $p$ و $f$ رابترتیب چندجمله‌ایهای مینیمال و سرشت‌نمای $T$ می‌گیریم.

(۱) $p$ چندجمله‌ای $f$ را عاد می‌کند.

(۲) سازه‌های اول $p$ و $f$ مساوی‌اند، ولـی ممکن است چندگانگیهـای مختلف داشته باشند.

(۳) اگر

$$p=f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k} \tag{۱۶-۷}$$

تجزیهٔ $p$ به‌سازه‌های اول باشد، آنگاه

$$f=f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k} \tag{۱۷-۷}$$

که درآن $d_i$ پوچی $f_i(T)^{r_i}$ تقسیم بردرجهٔ $f_i$ است.

اثبات. حالت بدیهی $V=\{0\}$ را منظور نمی‌کنیم. برای اثبات (۱) و (۲) تجزیه‌ای دوری چون (۷-۱۵) از $V$ راکه از قضیهٔ ۳ به‌دست می‌آید درنظر می‌گیریم. همچنان‌که دراثبات نتیجهٔ دوم ملاحظه‌کردیم $p_1=p$. گیریم $U_i$ تحدید $T$ بر $Z(\alpha_i; T)$ باشد. دراین صورت $U_i$ برداری دوری دارد ولذا $p_i$ هم چندجمله‌ای مینیمال وهم چندجمله‌ای سرشت‌نمای $U_i$ است. بنابراین، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $f$ عبارت است از حاصلضرب $f=p_1 \cdots p_r$. این مطلب از صورت بلوکی (۶-۱۴)، که ماتریس $T$ در پایهٔ مناسبی می‌باشد، آشکار است. واضح است که $p_1=p$، $f$ را عاد می‌کند، و (۱) اثبات می‌شود. بدیهی است که هر مقسوم‌علیه اول $p$، مقسوم‌علیه اول $f$ هم هست. بعکس، هرمقسوم‌علیه اول $f=p_1 \cdots p_r$ باید یکی ازسازه‌های $p_i$ را عادکندواین به‌نوبهٔ خود $p_1$ را هم‌عاد می‌کند.

فرض کنیم (۷-۱۶) تجزیه به‌سازه‌های اول $p$ باشد. قضیهٔ تجزیهٔ اولیه (قضیهٔ ۱۲ فصل ۶) را به‌کار می‌بریم. آن قضیه حاکی است که اگر $V_i$ فضای پوچ $f_i(T)^{r_i}$ باشد، آنگاه

$$V=V_1\oplus \cdots \oplus V_k \tag{۱۸-۷}$$

و $f_i^{r_i}$ چندجمله‌ای مینیمال عملگر $T_i$ حاصل از تحدید $T$ برزیر فضای (پایای) $V_i$است. حال قسمت (۲) قضیهٔ حاضر را درمورد عملگر $T_i$ به‌کار می‌بندیم. چون چندجمله‌ای مینیمال آن توانی از سازهٔ اول $f_i$ است، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T_i$ به‌صورت $f_i^{d_i}$ است، که درآن $d_i \geqslant r_i$. آشکار است که

$$d_i=\frac{\text{بعد}\,(V_i)}{\deg f_i}$$

و (تقریباً طبق تعریف)، پوچی $(f_i(T)^{r_i}=\dim V_i$. چون $T$ مجموع مستقیم عملگرهای $T_1$، ...، $T_k$ است، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $f$ عبارت از حاصلضرب

$$f=f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k}. \square$$

نتیجه. اگر $T$ عملگر خطی پوچ‌توانی روی فضایی برداری با بعد $n$ باشد، آنگاه چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ عبارت است از $x^n$.

اکنون به‌نظیر ماتریسی قضیهٔ تجزیهٔ دوری می‌پردازیم. اگر عملگر $T$ و تجزیهٔ به‌مجموع مستقیم قضیهٔ ۳ داده شده باشند، فرض می‌کنیم $\mathcal{B}_i$ «پایهٔ مرتب دوری»

$$\{\alpha_i, T\alpha_i, \cdots, T^{k_i-1}\alpha_i\}$$

برای $Z(\alpha_i; T)$ باشد. دراینجا $k_i$ بعد $Z(\alpha_i; T)$، یعنی درجهٔ پوچساز $p_i$ رانشان‌می‌دهد. ماتریس عملگر القا شدهٔ $T_i$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}_i$ ماتریس همدم چندجمله‌ای $p_i$ است. پس، اگر $\mathcal{B}$ راپایهٔ مرتب $V$ حاصل از تلفیق اجتماع $\mathcal{B}_i$ها، بترتیب $\mathcal{B}_1$، $\cdots$، $\mathcal{B}_r$، فرض کنیم، آنگاه ماتریس $T$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ به‌صورت زیراست:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix} \qquad (۱۹\text{-}۷)$$

که در آن $A_i$ ماتریس همدم $k_i \times k_i$ برای $p_i$ است. گوییم یک ماتریس $n \times n$، $A$ در **فرم‌گویا** است، هرگاه $A$ مجموع مستقیم (۷-۱۹) از ماتریسهای همدم چندجمله‌ایهای تکین غیراسکالری $p_1$، $\cdots$، $p_r$ باشد که به‌ازای $i = 1, \cdots, r-1$، $p_{i+1}$، چند-جمله‌ای $p_i$ را عاد می‌کند. قضیهٔ تجزیهٔ دوری دربارهٔ ماتریسها مطلب زیر را بیان‌می‌کند.

**قضیهٔ ۵.** فرض‌کنیم $F$ یک هیأت و $B$ ماتریسی $n \times n$ برروی $F$ باشد. در این صورت $B$ برروی هیأت $F$ با یك و تنها یك ماتریس در فرم گویا متشابه است.

اثبات. $T$ را عملگری خطی روی $F^n$ می‌گیریم که در پایهٔ مرتب استانده با $B$ نمایش داده می‌شود. همچنان‌که قریباً ملاحظه‌کردیم، پایهٔ مرتبی برای $F^n$ وجود دارد که در آن $T$ با ماتریسی چون $A$ که درفرم‌گویا است، نمایش داده می‌شود. دراین صورت $B$ با این ماتریس $A$متشابه است. فرض‌کنیم $B$ برروی $F$ با ماتریس دیگری چون $C$ هم‌که درفرم‌گویاست متشابه باشد. واین بدین معنی است‌که پایهٔ مرتبی برای $F^n$ وجود داردکه درآن عملگر $T$ با ماتریس $C$ نمایش داده می‌شود. اگر $C$ مجموع مستقیم ماتریسهای‌همدم $c_i$ از چندجمله‌ایهای تکین $g_1$، $\cdots$، $g_s$ باشدکه به‌ازای $i = 1, \cdots, s-1$، $g_{i+1}$ چندجمله‌ای $g_i$ را عادکند، آنگاه آشکار است‌که بردارهای غیرصفر $\beta_1, \cdots, \beta_s$ در $F^n$، بترتیب با $T$-پوچسازهای $g_1$، $\cdots$،$g_s$، وجود دارندکه

$$V = Z(\beta_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\beta_s; T).$$

اما دراین صورت بنا بر حکم یکتایی در قضیهٔ تجزیهٔ دوری، چندجمله‌ایهای $g_i$ با چند-جمله‌ایهای $p_i$ که ماتریس $A$ را تعریف می‌کنند مساوی هستند. پس، $C = A$. □

چندجمله‌ایهای $p_1$ ، ... ، $p_r$ **سازه‌های پایای ماتریس** $B$ نامیده می‌شوند. در بخش ۴.۷ برای محاسبهٔ سازه‌های پایای ماتریس مفروضی چون $B$ آلگوریتمی به‌دست خواهیم داد. وجه تسمیهٔ فرم گویا از این واقعیت ناشی می‌شود که توسط تعداد متناهی عمل گویا روی درایه‌های $B$ محاسبهٔ این چندجمله‌ایها امکان‌پذیر است.

**مثال ۲.** فرض کنیم فضای برداری دوبعدی $V$ بر روی هیأت $F$ و عملگر خطی $T$ روی $V$ داده شده‌اند. امکانات برای تجزیه کردن $T$ به زیر فضاهای دوری بسیار محدود است. زیرا، اگر درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال $T$، ۲ باشد، خود با چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ برابر است و $T$ دارای برداری دوری است. پس، پایهٔ مرتبی برای $V$ وجود دارد که در آن $T$ با ماتریس همدم چندجمله‌ای سرشت‌نمایش نشان داده می‌شود. از طرف دیگر، اگر درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال $T$ یك باشد، آنگاه $T$ مضربی اسکالری از عملگر همانی است. اگر $T=cI$ ، آنگاه به‌ازای هردو بردار مستقل خطی $\alpha_1$ و $\alpha_2$ در $V$، داریم

$$V=Z(\alpha_1\,;T)\oplus Z(\alpha_2\,;T)$$

$$p_1=p_2=x-c\,.$$

درمورد ماتریسها، این تحلیل حاکی است که هرماتریس ۲ × ۲ برروی هیأت $F$، دقیقاً با یکی از ماتریسهای ازنوع

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\,,\quad \begin{bmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -c_1 \end{bmatrix}$$

بر روی $F$ متشابه است.

**مثال ۳.** گیریم $T$ عملگری خطی روی $R^3$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده باماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. قبلا محاسبه کرده‌ایم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ برابر $f=(x-1)(x-2)^2$ ، و چندجمله‌ای مینیمال $T$ برابر $p=(x-1)(x-2)$ است. بدین‌سان می‌دانیم که در تجزیهٔ دوری برای $T$ ، اولین بردار $\alpha_1$ ، $p$ را به‌عنوان $T$-پوچساز خود خواهد داشت. چون در فضایی سه‌بعدی کار می‌کنیم، تنها یك بردار دیگر چون $\alpha_2$ می‌تواند در آن وجود داشته باشد. این بردار باید زیرفضایی دوری با بعد ۱ را تولید کند؛ یعنی، باید برداری سرشت‌نما برای $T$ باشد. پوچسازش $p_2$ باید $(x-2)$ باشد؛ زیرا باید داشته باشیم $pp_2=f$. توجه کنید که این مطلب بلافاصله حاکی است که ماتریس $A$ با ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

متشابه است؛ بدین‌معنی که $T$ در پایهٔ مرتبی توسط $B$ نمایش داده می‌شود. چگونه‌می‌توانیم بردارهای مناسب $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ را بیابیم؟ خوب،می‌دانیم هر برداری که زیر فضایی $T$-دوری از بعد ۲ را تولید کند، $\alpha_۱$ مناسبی است. از این‌رو، بیایید $\epsilon_۱$ را بیازماییم. داریم

$$T\epsilon_۱ = (۵, -۱, ۳)$$

که مضربی اسکالری از $\epsilon_۱$ نیست؛ پس $Z(\epsilon_۱ ; T)$ دارای بعد ۲ است. این فضا متشکل است از همهٔ بردارهای $a\epsilon_۱ + b(T\epsilon_۱)$ :

$$a(۱, ۰, ۰) + b(۵, -۱, ۳) = (a+۵b, -b, ۳b)$$

یا همهٔ بردارهای $(x_۱, x_۲, x_۳)$ که درشرط $x_۳ = -۳x_۲$ صدق کنند. اکنون به برداری چون $\alpha_۲$ نیاز داریم که $T\alpha_۲ = ۲\alpha_۲$ ، و $Z(\alpha_۲ ; T)$ مجزا از $Z(\epsilon_۱ ; T)$ باشد. چون $\alpha_۲$ باید برداری سرشت‌نما برای $T$ باشد، فضای $Z(\alpha_۲ ; T)$ چیزی جز فضای یك بعدی پدید آمده توسط $\alpha_۲$ نخواهد بود؛ ولـذا شرط ما این است که $\alpha_۲$ در $Z(\epsilon_۱ ; T)$ نباشد. اگر $\alpha = (x_۱, x_۲, x_۳)$ ، بسادگی می‌توان نشان داد که $T\alpha = ۲\alpha$ ، اگـر و تنها اگر $x_۱ = ۲x_۲ + ۲x_۳$ . پس، $\alpha_۲ = (۲ ، ۱ ، ۰)$ در $T\alpha_۲ = ۲\alpha_۲$ صدق‌می‌کند و زیرفضایی $T$-دوری مجزا از $Z(\epsilon_۱ ; T)$ تولید می‌نماید. خواننده بایدمستقیماً نشان‌دهد که‌ماتریس $T$ درپایهٔ مرتب

$$\{(۱, ۰, ۰), (۵, -۱, ۳), (۲, ۱, ۰)\}$$

ماتریس $B$ بالا است.

**مثال ۴.** فرض کنیم $T$ یك عملگر خطی قطری شدنی روی $V$ باشد. این‌جالب‌است که تجزیه‌ای دوری برای $T$ را به پایه‌ای که ماتریس $T$ راقطری می‌کند مربوط بسازیم. $c_۱$ ، … ، $c_k$ را مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ و $V_i$ را فضای بـردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c_i$ می‌گیریم. در این صورت

$$V = V_۱ \oplus \cdots \oplus V_k$$

واگر بعد $d_i = (V_i)$ ، آنگاه

$$f = (x-c_۱)^{d_۱} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ است. اگر $\alpha$ برداری از $V$ باشد، مربوط ساختن زیر فضای دوری $Z(\alpha ; T)$ به‌زیرفضاهای $V_۱$ ، … ، $V_k$ آسان است. بردارهای یکتایی چـون $\beta_۱$ ، … ، $\beta_k$ وجود دارند که $\beta_i$ در $V_i$ باشد و

$$\alpha=\beta_1+\cdots+\beta_k .$$

چون $T\beta_i=c_i\beta_i$ ، به‌ازای هر چندجمله‌ای $f$ داریم

$$f(T)\alpha=f(c_1)\beta_1+\cdots+f(c_k)\beta_k . \tag{۲۰-۷}$$

با مفروض بودن اسکالرهای $t_1$، ... ، $t_k$ چندجمله‌ایی چون $f$ وجود دارد که $f(c_i)=t_i$ ، $1\leqslant i\leqslant k$. بنابراین، $Z(\alpha\,;\,T)$ عیناً زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای $\beta_1$ ، ... ، $\beta_k$ است. پوچساز $\alpha$ چیست؟ بنابر (۷-۲۰)، $f(T)\alpha=0$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i$ ، $f(c_i)\beta_i=0$ . به‌بیان دیگر ، $f(T)\alpha=0$ ، مشروط براینکه به‌ازای $i$هایی که به‌ازای آنها $\beta_i\neq 0$ داشته باشیم $f(c_i)=0$ . از این‌رو، پوچساز $\alpha$ عبارت است از حاصلضرب

$$\prod_{\beta_i\neq 0}(x-c_i) . \tag{۲۱-۷}$$

حال، $\mathcal{B}_i=\{\beta_1^i,\ \cdots,\ \beta_{d_i}^i\}$ را پایهٔ مرتبی برای $V_i$ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$r=\max_i d_i .$$

بردارهای $\alpha_1$ ، ... ، $\alpha_r$ را توسط

$$\alpha_j=\sum_{d_i\geqslant j}\beta_j^i,\qquad 1\leqslant j\leqslant r \tag{۲۲-۷}$$

تعریف می‌کنیم. زیرفضای دوری $Z(\alpha_j\,;\,T)$ عبارت است از زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $\beta_j^i$ بااین‌شرط که $i$نمایه‌هایی را بپذیرد که به‌ازای آنها $d_i\geqslant j$ . $T$ پوچساز $\alpha_i$

$$p_j=\prod_{d_i\geqslant j}(x-c_i) \tag{۲۳-۷}$$

است. همچنین

$$V=Z(\alpha_1\,;\,T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r\,;\,T)$$

زیرا هر $\beta_j^i$ به‌یکی وتنها یکی از زیر فضاهای $Z(\alpha_1;T)$ ، ... ، $Z(\alpha_r;T)$ تعلق دارد و $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,\ \cdots,\ \mathcal{B}_k)$ پایه‌ای برای $V$ است. طبق (۷-۲۳)، $p_{j+1}$ چندجمله‌ای $p_j$ را نیز عاد می‌کند.

## تمرین

۱. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $F^2$ باشد، که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید $\alpha_1 = (1, 0)$ . نشان دهید $F^2 \neq Z(\alpha_1; T)$ و هیچ بـردار غیر صفری چون $\alpha_2$ در $F^2$ وجود ندارد که $Z(\alpha_2; T)$ مجزا از $Z(\alpha_1; T)$ باشد.

۲. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ و $R$ برد $T$ باشد.
(الف) ثابت کنید $R$ زیرفضای $T$-پایای مکملی دارد اگروتنها اگر $R$ مستقل ازفضای پوچ $N$ از $T$ باشد.
(ب) اگر $R$ و $N$ مستقل باشند، ثابت کنید $N$ یکتا زیر فضای $T$-پایای مکمل $R$ است.

۳. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $R^3$ باشدکه درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده مـی‌شود. فرض‌کنید $W$ فضای پوچ $T - 2I$ بـاشد. ثابت‌کنید $W$ هیچ زیرفضای $T$- پایای مکملی ندارد. (راهنمایی: فرض‌کنید $\beta = \epsilon_1$، و مشاهده کنید که $(T - 2I)\beta$ در $W$ است . ثـابـت کنید هیچ $\alpha$یـی در $W$ وجـود نـدارد کـــه $(T - 2I)\beta = (T - 2I)\alpha$.)

۴. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $F^4$ باشد که درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض‌کنید $W$ فضای پوچ $T - cI$ باشد.
(الف) ثابت‌کنید $W$ زیرفضای پدید آمده توسط $\epsilon_4$ است.
(ب) مولدهای تکین ایدآلهای $S(\epsilon_4; W)$ ،$S(\epsilon_3; W)$ ،$S(\epsilon_2; W)$ ، $S(\epsilon_1; W)$ را بیابید.

۵. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی فضای بـرداری $V$ بـرروی هیأت $F$ باشد. اگـر چندجمله‌ای $f$ بـر روی $F$ و $\alpha$ در $V$ بـاشد، مـی‌نـویسیم $f\alpha = f(T)\alpha$ . اگـر

$V_1$ ، ... ، $V_k$ زیرفضاهایی $T$- پایا باشند و $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$، نشان دهید

$$fV=fV_1\oplus\cdots\oplus fV_k\,.$$

۶. $T$ ، $V$ ، و $F$ را همچون در تمرین ۵ بگیرید. فرض کنید $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی از $V$ باشند که $T$- پوچسازهای مساوی دارند. ثابت کنید که به‌ازای هرچندجمله‌ای $f$ ، بردارهای $f\alpha$ و $f\beta$ نیز $T$- پوچسازهای مساوی دارند.

۷. چندجمله‌ایهای مینیمال و فرمهای گویای هریك از ماتریسهای حقیقی زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

۸. گیریم $T$ عملگری خطی روی $R^3$ باشد که درپایهٔ مرتب استانده با

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بردارهای غیرصفر $\alpha_1$، ... ، $\alpha_r$ راکه در شرایط قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند بیابید.

۹. ماتریس حقیقی

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

داده شده است. ماتریس حقیقی $3\times3$ معکوس‌پذیری چون $P$ بیابید که $P^{-1}AP$ به‌فرم گویا باشد.

۱۰. فرض کنید $F$ زیرهیأتی از اعداد مختلط و $T$ عملگری خطی روی $F^4$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ را بیابید. حالات ۱ $= a = b$؛ $a = b =$ ۰؛ $a =$ ۰، $b =$ ۱ را درنظر بگیرید. در هریك ازاین حالات، چندجمله‌ای مینیمال $T$ و بردارهای غیرصفر $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ راکه در شرایط قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند بیابید.

۱۱. ثابت کنیدکه اگر $A$ و $B$ ماتریسهایی ۳×۳ برروی هیأت $F$ باشند، شرطی لازم و کافی برای‌اینکه $A$ و $B$ برروی $F$ متشابه باشنداین‌است که آنها دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی وچندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند. مثالی بیاوریدکه نشان دهد این موضوع برای ماتریسهای ۴×۴ غلط است.

۱۲. فرض کنید $F$ زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط و $A$ و $B$ ماتریسهایی $n \times n$ برروی $F$ باشند: ثابت کنیدکه اگر $A$ و $B$ برروی هیأت اعداد مختلط متشابه باشند، آنگاه برروی $F$ نیز متشابه‌اند. (راهنمایی: ثابت کنیدکه فرم‌گویای $A$، چه $A$ به‌عنوان ماتریسی روی $F$ درنظر گرفته شود وچه ماتریسی روی $C$، یکی است؛ و به‌همین‌نحو برای $B$.)

۱۳. فرض کنید $A$ ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد. ثابت کنیدکه اگرهمهٔ مقادیر سرشت‌نمای $A$، حقیقی باشند، آنگاه $A$ با ماتریسی با درایه‌های حقیقی متشابه‌است.

۱۴. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضای بعد متناهی $V$ باشد. ثابت کنید برداری چون $\alpha$ باخاصیت زیر در $V$ وجود دارد. اگر $f$ یك چندجمله‌ای باشد و $f(T)\alpha =$ ۰، آنگاه $f(T) =$ ۰. (برداری چون $\alpha$، یك **بردارجداکننده** برای جبر چندجمله‌ایهای در $T$ نامیده می‌شود.) هنگامی‌که $T$ برداری دوری داشته باشد، اثباتی مستقیم ازاین مطلب که هر بردار دوری برداری جداکننده برای جبرچندجمله‌ایهای در $T$ نیزهست، ارائه کنید.

۱۵. فرض کنید $F$ زیر هیأتی از هیأت اعداد مختلط، $A$ ماتریسی $n \times n$ برروی $F$، و $p$ چندجمله‌ای مینیمال $A$ باشد. اگر $A$ را به‌عنوان ماتریسی برروی $C$ محسوب کنیم، آنگاه $A$ به‌عنوان ماتریسی $n \times n$ برروی $C$ چندجمله‌ای مینیمالی چون $f$ دارد. از قضیه‌ای دربارهٔ معادلات‌خطی جهت اثبات $p = f$ استفاده کنید. آیا همچنین‌می‌توانید دریابیدکه این مطلب ازقضیهٔ تجزیهٔ دوری چگونه نتیجه می‌شود؟

۱۶. فرض کنید ماتریس $A$ی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی چنان باشدکه $A^2 + I =$ ۰. ثابت کنید $n$ زوج است و اگر $n =$ ۲$k$ فرض شود، آنگاه $A$ برروی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی به‌صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن $I$ ماتریس همانی $k \times k$ است، متشابه است.

۱۷. عملگرخطی $T$ روی فضای برداری بعد متناهی $V$ داده شده است. فرض کنید
(الف) چندجمله‌ای مینیمال $T$ توانی از یك چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد؛
(ب) چندجمله‌ای مینیمال با چندجمله‌ای سرشت‌نما برابر باشد.
نشان دهید که هیچ زیرفضای $T$-پایای غیربدیهی، یك زیرفضای $T$-پایای مکمل ندارد.

۱۸. اگر $T$ یك عملگرخطی قطری‌شدنی باشد، آنگاه هر زیرفضای $T$-پایا، یك زیرفضای $T$-پایای مکمل نیز دارد.

۱۹. گیریم $T$ عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی $V$ باشد. ثابت کنید $T$ برداری دوری دارد اگر و تنها اگر مطلب زیر درست باشد: هرعملگرخطی $U$ که با $T$ جابجا شود یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است.

۲۰. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. می‌پرسیم چه‌وقت این مطلب درست است که هر بردار غیرصفر در $V$ برداری دوری برای $T$ است. ثابت کنید وضع چنین‌است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ برروی $F$ تحویل‌ناپذیر باشد.

۲۱. فرض کنید $A$ ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. فرض کنید $T$ عملگری‌خطی روی $R^n$ باشد که توسط $A$ درپایهٔ مرتب استانده نمایش داده می‌شود و $U$ عملگری خطی روی $C^n$ باشد که آن هم درپایهٔ مرتب استانده با $A$ نمایش داده می‌شود. برای اثبات مطلب زیر ازنتیجهٔ تمرین ۲۰ استفاده کنید: اگر زیرفضاهای پایای تحت $T$ تنها $R^n$ و زیرفضای صفر باشند، آنگاه $U$ قطری‌شدنی است.

## ۳.۷. فرم ژوردان

فرض کنیم $N$ عملگر خطی پوچ‌توانی روی فضای با بعد متناهی $V$ باشد. تجزیهٔ دوری $N$ حاصل از قضیهٔ ۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. عدد صحیح مثبتی چون $r$، و $r$ بردار غیرصفر $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ در $V$ با $N$-پوچسازهای $p_1$، ...، $p_r$ که

$$V = Z(\alpha_1; V) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; V)$$

و به‌ازای $i = 1, \ldots, r-1$، $p_{i+1}$، چندجمله‌ای $p_i$ را عاد می‌کند وجود دارند. چون

$N$ پوچ‌توان است، $k$یی هست کـه $k \leqslant n$ وچندجمله‌ای مینیمال $N$ به‌صورت $x^k$ باشد. پس، هر $p_i$ به‌صورت $p_i = x^{k_i}$ است وشرط تقسیم‌پذیری چیزی جزشرط

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r$$

نیست. بدیهی است که $k_1 = k$ و $k_r \geqslant 1$. ماتریس همدم $x^{k_i}$ عبارت است از ماتریس $k_i \times k_i$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۲۴\text{-}۷)$$

بدین‌سان قضیهٔ ۳ پایهٔ مرتبی برای $V$ به‌دست می‌دهد که نسبت به‌آن ماتریس $N$ مجموع مستقیم ماتریسهای پوچ توان مقدماتی (۷-۲۴) است کـه وقتی $i$ افزایش یابد اندازه‌شان کاهش می‌یابد. از این مطلب دیده می‌شود که به‌هرماتریس $n \times n$ پوچ‌توانی عدد صحیح مثبتی چون $r$ و $r$ عدد صحیح مثبت $k_1, \ldots, k_r$ طوری وابسته‌اند که $k_1 + \cdots + k_r = n$ و $k_i \geqslant k_{i+1}$ و نیز این اعداد صحیح مثبت فرم گویای ماتریس را تعیین؛ یعنی، ماتریس را تا میزان تشابه معین می‌کنند.

درمورد عملگرپوچ توان فوق مطلبی وجود داردکه بایدآن‌را در اینجا خاطرنشان سازیم. عدد صحیح مثبت $r$ دقیقاً برابر پـوچی $N$ است؛ در واقع، فضای پوچ، پایه‌ای مشتمل بر $r$ بردار

$$N^{k_i - 1}\alpha_i \qquad (۲۵\text{-}۷)$$

دارد. زیرا، فرض می‌کنیم $\alpha$ در فضای پوچ $N$ باشد. حال $\alpha$ را به‌صورت

$$\alpha = f_1\alpha_1 + \cdots + f_r\alpha_r$$

که در آن $f_i$ یك‌چندجمله‌ای است ودرجهٔ آن رامی‌توان کمتر از $k_i$ فرض کرد،می‌نویسیم. چون $N\alpha = 0$، به‌ازای هر $i$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &= N(f_i\alpha_i) \\ &= Nf_i(N)\alpha_i \\ &= (xf_i)\alpha_i. \end{aligned}$$

پس، $xf_i$ بر $x^{k_i}$ تقسیم‌پذیراست، وچون $\deg(f_i) < k_i$،این بدان‌معنی است که‌به‌ازای

اسکالری چون $c_i$

$$f_i = c_i x^{k_i - 1}.$$

ولی آنگاه

$$\alpha = c_1(x^{k_1 - 1}\alpha_1) + \cdots + c_r(x^{k_r - 1}\alpha_r)$$

که نشان می‌دهد بردارهای (۷-۲۵) پایه‌ای برای فضای پوچ $N$ تشکیل می‌دهند. خواننده باید توجه داشته باشد که این حکم از دیدگاه ماتریسی نیز کاملاً روشن است.

اکنون مایلیم یافته‌های خود درمورد عملگرها یا ماتریسهای پوچ‌توان را با قضیهٔ تجزیهٔ اولیه از فصل ۶ تلفیق کنیم. وضع چنین است: فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد و نیز چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ برروی $F$ به‌صورت زیر به‌سازه‌ها تجزیه شود:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}.$$

در اینجا $c_1$، ...، $c_k$ عناصر متمایزی از $F$ هستند و $d_i \geqslant 1$. در این صورت چندجمله‌ای مینیمال $T$

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

است که در آن $1 \leqslant r_i \leqslant d_i$. اگر $W_i$ فضای پوچ $(T - c_i I)^{r_i}$ باشد، آنگاه قضیهٔ تجزیهٔ اولیه حاکی است که

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

ونیز عملگر $T_i$، القا شده توسط $T$ روی $W_i$، دارای چندجمله‌ای مینیمال $(x - c_i)^{r_i}$ است. $N_i$ را عملگری خطی روی $W_i$ تعریف شده توسط $N_i = T_i - c_i I$ می‌گیریم. در این صورت $N_i$ پوچ‌توان و دارای چندجمله‌ای مینیمال $x^{r_i}$ است. عملگر $T$ روی $W_i$ مانند حاصل‌جمع $N_i$ و $c_i$ برابر عملگر همانی عمل می‌کند. فرض کنیم پایه‌ای برای زیرفضای $W_i$، متناظر به‌تجزیهٔ دوری عملگر پوچ‌توان $N_i$، انتخاب کرده باشیم. در این صورت ماتریس $T_i$ دراین پایهٔ مرتب، مجموع مستقیم ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} c & 0 \cdots 0 & 0 \\ 1 & c \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & \quad\quad c & \\ 0 & 0 \cdots 1 & c \end{bmatrix} \tag{۷-۲۶}$$

است که در هریك $c = c_i$. بعلاوه، اندازهٔ این ماتریسها وقتی از چپ به‌راست خوانده شوند، کاهش می‌یابند. ماتریسی به‌صورت (۷-۲۶)، یك **ماتریس مقدماتی ژوردان به‌ازای**

**مقدار سرشت‌نمای** $c$ نامیده می‌شود. حال اگر همهٔ پایه‌های $W_i$ها را پهلوی هم قراردهیم، پایهٔ مرتبی برای $V$ به‌دست می‌آوریم. می‌خواهیم دراین پایهٔ مرتب ماتریس $A$ از $T$ را توصیف کنیم.

ماتریس $A$ عبارت است از مجموع مستقیم ماتریسهای $A_1$، ...، $A_k$

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}. \qquad (۲۷\text{-}۷)$$

$A_i$ هم به‌صورت

$$A_i=\begin{bmatrix} J_1^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_i}^{(i)} \end{bmatrix}$$

است که درآن هر $J_j^{(i)}$ یك ماتریس مقدماتی ژوردان به‌ازای مقدار سرشت‌نمای $c_i$ است. همچنین، داخل هر $A_i$، اندازهٔ ماتریسهای $J_j^{(i)}$ با افزایش $j$ کاهش می‌یابد. گوییم ماتریسی $n\times n$ مانند $A$ به **فرم ژوردان** است هرگاه‌همهٔ شرایط تشریح شده‌دراین بند را (به‌ازای اسکالرهای متمایزی چون $c_1$، ...، $c_k$) برآورد.

قریباً نشان دادیم که اگر $T$عملگری‌خطی باشد که چندجمله‌ای سرشت‌نمایش برروی هیأت اسکالری، به‌طورکامل به‌سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه پایهٔ مرتبی برای $V$ وجود دارد که درآن $T$ با ماتریسی کـه به‌فرم ژوردان است نمایش داده می‌شود. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این ماتریس، بدون احتساب ترتیبی که درآن مقادیر سرشت‌نمای $T$ نوشته می‌شوند، به‌طور یکتا به $T$ وابسته است. به‌بیان دیگر، اگـر دوماتریس به‌فـرم ژوردان متشابه باشند، آنگاه می‌توانند تنها در ترتیب اسکالرهای $c_i$ متفاوت باشند.

این یکتایی به‌صورت زیر ثابت می‌شود. فرض‌کنیم پایهٔ مرتبی برای $V$ وجودداشته باشدکه درآن $T$ با ماتریس ژوردان $A$ توصیف شده در بند قبل، نمایش داده شود. اگر $A_i$ ماتریسی $d_i\times d_i$ باشد، آنگاه بوضوح $d_i$، چندگانگی $c_i$ به عنوان ریشه‌ای از چند-جمله‌ای سرشت‌نمای $A$ یا $T$، است. به‌بیان‌دیگر، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$عبارت‌است‌از

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}.$$

این مطلب نشان می‌دهد که $c_1$، ...، $c_k$ و $d_1$، ...، $d_k$ بدون احتساب ترتیبی که آنها را می‌نویسیم، یکتا هستند. این واقعیت که $A$ مجموع مستقیم ماتریسهای $A_i$ است، تجزیه به‌مجموع مستقیمی‌چون $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ را که تحت $T$ پایاست ایجاب می‌کند. اکنون توجه کنید که $W_i$ باید فضای پوچ $(T-c_iI)^n$، با بعد $(V)=n$، باشد؛ زیرا، روشن است که $A_i-c_iI$ پوچ‌توان و به‌ازای $j\neq i$، ماتریس $A_j-c_iI$ نامنفرد است. از این‌رو، می‌بینیم که زیرفضاهای $W_i$ یکتا هستند. اگر $T_i$ عملگر القا شده توسط $T$ روی $W_i$ باشد، آنگاه ماتریس $A_i$، به‌عنوان فرم گویای $T_i$، به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

اکنون می‌خواهیم‌در بارهٔ عملگر $T$ وماتریس ژوردان $A$ که $T$ را در پایهٔ‌مرتبی‌نمایش می‌دهد به‌مشاهدهٔ بیشتری بپردازیم. فهرست یك رشته از مشاهدات چنین است:

(۱) هردرایهٔ $A$ که نه‌روی قطراصلی باشد و نه‌بلافاصله زیرآن برابر ۰ است.روی قطر$A$، $k$ مقدار سرشت‌نمای متمایز $c_1$، ...، $c_k$ از $T$ قرار می‌گیرند. همچنین، $c_i$ به‌تعداد $d_i$ بار تکرار می‌شود. در اینجا $d_i$ چندگانگی $c_i$ به‌عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای سرشت‌نماست؛ یعنی، بعد $(W_i)=d_i$.

(۲) به‌ازای هر $i$، ماتریس $A_i$ مجموع مستقیم $n_i$ ماتریس مقدماتی ژوردان $J_j^{(i)}$، به‌ازای مقدار سرشت‌نمای $c_i$، است. عدد $n_i$ دقیقاً بعدفضای بردارهای سرشت‌نمای‌وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای $c_i$ است. زیرا، $n_i$ تعداد بلوکهای پوچ‌توان مقدماتی درفرم گویای $(T_i-c_iI)$ است و از این قرار برابر بعد فضای پوچ $(T-c_iI)$ است. بخصوص توجه داشته باشید که $T$ قطری‌شدنی است اگروتنها اگر به‌ازای هر $i$، $n_i=d_i$.

(۳) به‌ازای هر$i$، اولین بلوك $J_1^{(i)}$ درماتریس $A_i$ماتریسی‌است $r_i\times r_i$، که در آن $r_i$ چندگانگی $c_i$ به‌عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای مینیمال $T$ است. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال عملگر پوچ‌توان $(T_i-c_iI)$ عبارت است از $x^{r_i}$.

البته طبق معمول این‌مطلب نتیجهٔ ماتریسی ساده‌ای هم دارد. اگر $B$ ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشد، و اگر چندجمله‌ای سرشت‌نمای $B$ برروی $F$ به‌طورکامل به‌سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه $B$ برروی $F$ با ماتریسی $n\times n$ چون $A$ به‌فرم ژوردان متشابه است و $A$، بدون احتساب پس وپیش‌کردن ترتیب مقادیرسرشت‌نمایش، یکتا است. $A$ را **فرم‌ـ ژوردان** $B$ می‌نامیم.

همچنین، توجه کنید که اگر $F$-هیأتی بستهٔ جبری باشد، آنگاه ملاحظات بالا درمورد هرعملگرخطی روی فضایی با بعد متناهی برروی $F$، یا برهرماتریس $n\times n$ برروی $F$، هم مصداق دارد. بدین‌سان، مثلاً، هرماتریس $n\times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی اساساً یکتا در فرم ژوردان متشابه است.

**مثال ۵.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی $C^2$ باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ یا $(x-c_1)(x-c_2)$ است، که در آن $c_1$ و $c_2$ اعداد مختلط متمایزی می‌باشند، یا

$(x-c)^{۲}$. درحالت نخست $T$ قطری‌شدنی است ودرپایهٔ مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c_{۱} & ۰ \\ ۰ & c_{۲} \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. درحالت دوم، چندجمله‌ای مینیمال $T$ ممکن است $(x-c)$ باشدکه دراین حالت $T=cI$، یا $(x-c)^{۲}$ باشدکه دراین حالت $T$ درپایهٔ مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & ۰ \\ ۱ & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بدین‌سان، هرماتریس ۲ × ۲ برروی هیأت اعداد مختلط، با ماتریسی از یکی از دونوع فوق، احتمالا با $c_{۱}=c_{۲}$، متشابه است.

**مثال ۶.** فرض‌کنیم $A$ ماتریس ۳ × ۳ مختلط

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & ۲ & ۰ \\ b & c & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ به طور بدیهی عبارت است از $(x-۲)^{۲}(x+۱)$. یا این چندجمله‌ای مینیمال است، که دراین حالت $A$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

متشابه است، ویااینکه چندجمله‌ای مینیمال $(x-۲)(x+۱)$ است که‌دراین‌حالت $A$ باماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

متشابه است. حال

$$(A-۲I)(A+I)=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳a & ۰ & ۰ \\ ac & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و بنابراین، $A$ با ماتریسی قطری متشابه است اگر و تنها اگر $a=۰$.

**مثال ۷.** فرض‌کنیم

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & ۲ \end{bmatrix}.$$

چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ عبارت است از $(x-۲)^۴$. چون $A$ مجموع مستقیم دوماتریس $۲\times۲$ است، واضح است که $(x-۲)^۲$ چندجمله‌ای مینیمال $A$ است. حال اگر $a=۰$ یا اگر $a=۱$، آنگاه ماتریس $A$ به‌فرم ژوردان است. توجه‌کنید دوماتریسی راکه به‌ازای $a=۰$ و $a=۱$ به دست می‌آوریم، چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند، لکن متشابه نیستند. این دو ماتریس بدین‌دلیل متشابه نیستند‌که برای اولین ماتریس فضای جواب $(A-۲I)$ بعد ۳ دارد، درحالی که برای دومین ماتریس بعدش ۲ است.

**مثال ۸.** معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (مثال ۱۴ در فصل ۶) مثال خوبی از فرم ژوردان به‌دست می‌دهند. گیریم $a_۰$، $\cdots$، $a_{n-۱}$ اعدادی مختلط و $V$ فضای همهٔ توابع $n$بار مشتق‌پذیر $f$ روی فاصله‌ای ازخط حقیقی باشدکه درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^nf}{dx^n}+a_{n-۱}\frac{d^{n-۱}f}{dx^{n-۱}}+\cdots+a_۱\frac{df}{dx}+a_۰f=۰$$

صدق می‌کنند. $D$ را عملگرمشتق‌گیری می‌گیریم. دراین صورت $V$ تحت $D$ پایاست، چراکه $V$ فضای پوچ $p(D)$ است که

$$p=x^n+\cdots+a_۱x+a_۰.$$

فرم ژوردان عملگر مشتق‌گیری روی $V$ چیست؟

فرض‌کنیم $c_۱$، $\cdots$، $c_k$ ریشه‌های مختلط‌متمایز $p$ باشند:

$$p=(x-c_۱)^{r_۱}\cdots(x-c_k)^{r_k}.$$

$V_i$ را فضای پوچ $(D-c_iI)^{r_i}$، یعنی، مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D-c_iI)^{r_i}f=۰$$

می‌گیریم. دراین صورت همان‌گونه‌که درمثال ۱۵ در فصل ۶ ملاحظه‌کردیم، قضیهٔ تجزیهٔ اولیه حاکی است که

$$V=V_۱\oplus\cdots\oplus V_k.$$

فرض‌کنیم $N_i$ تحدید $D-c_iI$ به $V_i$ باشد. دراین صورت فرم ژوردان عملگر $D$(روی $V$) به‌وسیلهٔ فرمهای گویای عملگرهای پوچ‌توان $N_۱$، $\cdots$، $N_k$ روی فضاهای

$V_1$، . . . ، $V_k$ تعیین می‌شود.

از این‌رو، آنچه راکه باید (به‌ازای مقادیرمختلف $c$) بدانیم، فرم گـویای عملگر $N=(D-cI)$، روی فضای $V_c$ است که متشکل ازجوابهای معادلهٔ

$$(D-cI)^r f=0.$$

است. درفرم‌گویای $N$، چندبلوك پوچ‌توان مقدماتی وجود دارد؟ تعداد آنها برابر پوچی $N$، یعنی بعد فضای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای $c$، خواهد بـود. این بعد ۱ است، زیرا هرتابعی‌که درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$Df=cf$$

صدق کند، مضربی اسکالری از تابع‌نمایی $h(x)=e^{cx}$ است. بنابراین، عملگر $N$ (روی فضای $V_c$) برداری دوری دارد. انتخابی مناسب برای برداری دوری عبـارت است از $g=x^{r-1}h$:

$$g(x)=x^{r-1}e^{cx}.$$

از اینجا داریم

$$Ng=(r-1)x^{r-2}h$$
$$\vdots$$
$$N^{r-1}g=(r-1)!h$$

بند قبل به‌ما نشان می‌دهد که فـرم ژوردان $D$(روی فضای $V$)، مجموع مستقیم $k$ ماتریس مقدماتی ژوردان، یك ماتریس به‌ازای هرریشهٔ $c_i$، است.

## تمرین

۰۱ فرض‌کنید $N_1$ و $N_2$ ماتریسهای ۳ × ۳ پوچ‌توانی برروی هیأت $F$ باشند. ثابت‌کنید که $N_1$ و $N_2$ متشابه‌اند اگر وتنها اگـر دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند.

۰۲ از نتیجهٔ تمرین ۱ و فرم ژوردان برای اثبات مطلب زیر استفاده‌کنید: فرض‌کنید $A$ و $B$ ماتریسهایی $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشندکه چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند. اگـر هیچ یك از $d_i$هـا بزرگتر از ۳ نباشد، آنگاه $A$ و $B$ متشابه‌اند.

۰۳ اگرماتریس ۵ × ۵ مختلط $A$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-2)^3(x+7)^2$$

وچندجمله‌ای مینیمال $p=(x-۲)^۲(x+۷)$ باشد، فرم ژوردان $A$ را بیابید؟

۴ . چه تعداد فرم ژوردان ممکن، برای یک ماتریس مختلط ۶×۶ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای $(x+۲)^۴(x-۱)^۲$ داریم؟

۵ . عملگر مشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتر از ۳، درپایهٔ مرتب «طبیعی» با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرم ژوردان این ماتریس کدام است؟ ($F$ زیرهیأتی از اعداد مختلط است.)

۶ . فرض کنید $A$ ماتریس مختلط

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد. فرم ژوردان $A$ را بیابید.

۷ . اگر $A$ ماتریسی $n \times n$ برروی هیأت $F$، با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-c_۱)^{d_۱} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

باشد، رد $A$ را بیابید.

۸ . بدون احتساب تشابه، همهٔ ماتریسهای مختلط ۳×۳ ی $A$ راکه برای آنها $A^۳=I$ رده‌بندی کنید.

۹. بدون احتساب تشابه، همهٔ ماتریسهای مختلط $n\times n$ی $A$ را که برای آنها $A^n=I$. رده‌بندی کنید.

۱۰. فرض کنید $n$عددی صحیح مثبت، $n\geqslant 2$، و $N$ ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشد که $N^n=0$ اما $N^{n-1}\neq 0$. ثابت کنید $N$ ریشهٔ دوم (جذر) ندارد، یعنی اینکه، هیچ ماتریس $n\times n$ی چون $A$ وجود ندارد که $A^2=N$.

۱۱. $N_1$ و $N_2$ دوماتریس پوچ‌توان $6\times 6$ برروی هیأت $F$ هستند. فرض کنید $N_1$ و $N_2$ چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی و پوچی مساوی داشته باشند. ثابت کنید که $N_1$ و $N_2$ متشابه‌اند. نشان دهید که این مطلب درمورد ماتریسهای پوچ‌توان $7\times 7$ درست نیست.

۱۲. نتیجهٔ تمرین ۱۱ وفرم ژوردان را برای اثبات مطلب ذیل به‌کار ببرید: فرض کنید $A$ و $B$ ماتریسهایی $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشند که دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند. همچنین فرض کنید به‌ازای هر $i$، فضاهای جواب $(A-c_iI)$ و $(B-c_iI)$ بعدمساوی داشته باشند. اگرهیچ‌یك از $d_i$ها بزرگتر از ۶ نباشد، آنگاه $A$ و $B$ متشابه‌اند.

۱۳. اگر $N$ یك‌ماتریس $k\times k$ پوچ‌توان مقدماتی باشد؛ یعنی، $N^k=0$ اما $N^{k-1}\neq 0$، نشان دهید $N^t$ با $N$ متشابه است. حال از فرم ژوردان استفاده و ثابت کنید هر-ماتریس $n\times n$ مختلط با ترانهادهٔ خودش متشابه است.

۱۴. چه اشتباهی در اثبات زیر وجود دارد؟ اگر $A$ یك ماتریس $n\times n$ مختلط باشد و $A^t=-A$، آنگاه $A$ ماتریس ۰ است. (اثبات: $J$ را فرم ژوردان $A$ می‌گیریم. چون $A^t=-A$ داریم $J^t=-J$. اما چون $J$ مثلثی است، $J^t=-J$ ایجاب می‌کند که همهٔ درایه‌های $J$ صفر باشند. چون $J=0$ و $A$ با $J$ متشابه است، می‌بینیم که $A=0$.) (مثالی از یك $A$ی غیرصفر بیاورید که $A^t=-A$.)

۱۵. اگر $N$ ماتریس $3\times 3$ پوچ‌توانی برروی $C$ باشد، ثابت کنید که $A=I+\frac{1}{2}N-\frac{1}{8}N^2$ در $A^2=I+N$ صدق می‌کند؛ یعنی، $A$ یك ریشهٔ دوم $I+N$ است. رشتهٔ دوجمله‌ای برای $(1+t)^{1/2}$ را به کار ببرید و فرمول مشابهی برای یك ریشهٔ دوم $I+N$، که در آن $N$ ماتریس $n\times n$ پوچ‌توانی برروی $C$ است، به‌دست آورید.

۱۶. نتیجهٔ تمرین ۱۵ را به‌کار ببرید و ثابت کنید که اگر $c$ عدد مختلط غیرصفری و $N$ ماتریس مختلط پوچ‌توانی باشد، آنگاه $(cI+N)$ ریشهٔ دومی دارد. حال فرم ژوردان را جهت اثبات این حکم که هرماتریس $n\times n$ مختلط نامنفرد ریشهٔ دوم دارد به‌کار ببرید.

## ۴.۷. محاسبهٔ سازه‌های پایا

فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌هایی از هیأت $F$ باشد. می‌خواهیم روشی برای محاسبهٔ سازه‌های پایای $p_1$، ...، $p_r$ که فرم گویای $A$ را تعریف می‌کنند، بیابیم. از حالتی بسیار ساده که در آن $A$ ماتریس همدم (۲.۷) چندجمله‌ای تکینی چون

$$p=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

است، آغاز می‌کنیم. در بخش ۱.۷ دیدیم که $p$، هم چندجمله‌ای مینیمال و هم‌چندجمله‌ای سرشت‌نمای ماتریس همدم $A$ است. اکنون، می‌خواهیم محاسبه‌ای مستقیم به‌دست‌دهیم که نشان می‌دهد $p$ چند‌جمله‌ای سرشت‌نمای $A$ است. دراین حالت

$$xI-A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$x$ برابر سطر $n$ را به‌سطر $(n-1)$ اضافه می‌کنیم. این عمل، $x$ را از مکان $(n-1,\ n-1)$ برمی‌دارد، ولی دترمینان را تغییرنمی‌دهد. سپس $x$ برابرسطر $(n-1)$ جدید را به‌سطر $(n-2)$ اضافه می‌کنیم. این عمل را متوالیاً ادامه می‌دهیم تا با این فرایند همهٔ $x$های روی قطراصلی برداشته شوند. نتیجه، ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n+\cdots+c_1x+c_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-1}+\cdots+c_2x+c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-2}+\cdots+c_3x+c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+c_{n-1}x+c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+c_{n-1} \end{bmatrix}$$

است که دترمینانش با دترمینان $xI-A$ برابر است. بالاترین درایهٔ سمت راست این ماتریس چندجمله‌ای $p$ است. ستون آخر را، با افزودن مضربهای مناسبی از دیگرستونها به‌آن، ساده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & p \\ -1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

هریك از $(n-1)$ ستون اول را در ۱ − ضرب، و سپس $(n-1)$ تعویض از ستونهای مجاور انجام می‌دهیم تا ستون $n$فعلی را به‌ستون اول برسانیم. اثـر نهایی $2n-2$ تغییر علامت این است که دترمینان را بدون تغییر باقی می گذارد. ازاینجا ماتریس

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۸\text{-}۷)$$

حاصل می‌شود. پس از این واضح است که $p=\det(xI-A)$.

می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای هرماتریسی $n\times n$ چون $A$، یك توالی از اعمال سطری وستونی وجود داردکه $xI-A$ را به‌ماتریسی بسیار شبیه به (۲۸-۷)، کـه درآن سازه‌های پایای $A$ زیر قطـر اصلی ظاهر می‌شوند، تبدیل می‌کند. اجازه دهید اعمالی را که به‌کار خواهیم برد، کاملاً روشن کنیم.

دراینجا با $F[x]^{m\times n}$، دستهٔ ماتریسهای $m\times n$ بـا درایه‌هایی کـه چندجمله‌ایهای برروی هیأت $F$ هستند، سروکار خواهیم داشت. اگـر $M$ چنین ماتریسی باشد، یك **عمل سطری مقدماتی** روی $M$ یکی از اعمال زیراست:

۱. ضرب یك سطراز $M$ در اسکالر غیرصفری از $F$؛

۲. جایگزین کـردن سطر$r$ام $M$، بـا سطر$r$ باضافـهٔ $f$ برابرسطر$s$، کـه درآن $f$

چندجمله‌ای دلخواهی برروی $F$ است و $r\neq s$؛

۳. تعویض دوسطر $M$.

عمل معکوس یك عمل سطری مقدماتی نیزعملی است سطری مقدماتی واز همان نوع. توجه کنید که اگر در (۱) چندجمله ایهای غیراسکالری هم منظور می‌شدند، دادن چنین حکمی امکان نداشت. یك **ماتریس مقدماتی** $m\times m$، یعنی ماتریسی مقدماتی از $F[x]^{m\times m}$، ماتریسی است که بتواند از ماتریس همانی $m\times m$ به وسیلهٔ تنها یك عمل سطری مقدماتی حاصل بشود. واضح است که هرعمل سطری مقدماتی روی $M$ می‌تواند از طریق ضرب $M$ ازچپ درماتریس مقدماتی $m\times m$ مناسبی نتیجه بشود؛ درواقع، اگر $e$ آن عمل باشد، آنگاه

$$e(M)=e(I)M.$$

گیریم $M$ و $N$ دوماتریس در $F[x]^{m\times n}$ باشند. گوییم $N$ **هم‌ارز سطری** $M$ است، هرگاه $N$ بتواند توسط یك توالی متناهی از اعمال سطری مقدماتی از $M$ حاصل شود:

$$M=M_{0}\rightarrow M_{1}\rightarrow\cdots\rightarrow M_{k}=N.$$

بدیهی است که $N$ هم‌ارز سطری $M$ است اگر و تنها اگر $M$ هم‌ارز سطری $N$ باشد، بنابراین می‌توانیم اصطلاح «$M$ و $N$ هم ارز سطری هستند» را به‌کار گیریم. اگر $N$ هم‌ارز سطری $M$ باشد، آنگاه

$$N=PM$$

که درآن‌ماتریس $P$ی $m\times m$، حاصل‌ضربی از ماتریسهای مقدماتی است:

$$P=E_{1}\cdots E_{k}.$$

بخصوص، $P$ ماتریسی است معکوس‌پذیر که معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1}=E_{k}^{-1}\cdots E_{1}^{-1}.$$

مسلماً، معکوس $E_j$ از معکوس عمل سطری مقدماتی مربوط ناشی می‌شود.

همهٔ این مطالب، درست نظیرهمان مطالب درمورد ماتریسهای با درایه‌های متعلق به $F$ هستند. این مطالب با نتایج مقدماتی فصل ۱ مشابهت دارند. از این‌رو، مسئلهٔ بعدی که خود را می‌نمایاند، معرفی یك فرم تحویل شدهٔ سطری پلکانی برای ماتریسهای روی چندجمله ایهاست. در اینجا، به‌موانعی جدید برمی‌خوریم. چگونه چنین ماتریسی را تحویل سطری کنیم؟ اولین مرحله این است که درایهٔ غیرصفرمقدم‌سطر۱ را انتخاب وهمهٔ درایه‌های سطر ۱ را برآن تقسیم کنیم. وقتی که درایه‌های ماتریس چندجمله‌ای باشند، (لزوماً) نمی‌توانیم این عمل را انجام دهیم. هرچند، فرم تحویل شدهٔ سطری‌کاملاً مناسبی برای ماتریسی عمومی از $F[x]^{m\times n}$ وجود ندارد، ولی به‌طوری که در قضیهٔ بعد خواهیم دید درحالات معینی می‌توان براین مشکل فایق آمد. هرگاه اعمال ستونی را هم معرفی‌ونوع

هم‌ارزی را که از پذیرش استفاده از هردونوع عمل نتیجه می‌شود مطالعه‌کنیم، می‌توانیم فرم استاندهٔ بسیار مفیدی برای هرماتریس به‌دست آوریم. ابزار اساسی لم زیر است.

**لم.** فرض کنیم $M$ ماتریسی از $F[x]^{m\times n}$ باشد که اولین ستونش درایهٔ غیرصفری داشته، و $p$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك درایه‌های واقع در ستون اول $M$ باشد. در این صورت $M$ با ماتریسی چون $N$ که

$$\begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

را به‌عنوان اولین ستونش دارد، هم‌ارز سطری است.

**اثبات.** دراینجا به‌اثبات چیزی بیش ازآنچه‌که بیان‌کردیم، می‌پردازیم. نشان می‌دهیم‌که الگوریتمی برای یافتن $N$، یعنی دستورالعملی‌که بتواند برای محاسبهٔ $N$ در تعدادی متناهی مرحله مورد استفادهٔ یك ماشین قرار بگیرد، وجود دارد. ابتدا به‌نمادهایی نیازمندیم.

گیریم $M$ ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های واقع در $F[x]$ باشدکه اولین ستون‌غیر-صفری چون

$$M_1=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

دارد. تعریف می‌کنیم:

$$l(M_1)=\min_{f_i\neq 0} \deg f_i$$

(۲۹-۷)

$$p(M_1)=(f_1,\ldots,f_m)\ \text{بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك}$$

$j$ را نمایه‌ای می‌گیریم که $\deg f_j=l(M_1)$. جهت تصریح، فرض می‌کنیم $j$ کوچکترین نمایه‌ای چون $i$ باشدکه برای آن $\deg f_i=l(M_1)$. می‌کوشیم تا هر $f_i$ را بر $f_j$ تقسیم‌کنیم:

$$f_i=f_jg_i+r_i ،\quad r_i=0 \quad \text{یا} \quad \deg r_i<\deg f_j \qquad (۳۰\text{-}۷)$$

به‌ازای هر $i$ غیر از $j$، به‌جای سطر $i$ ماتریس $M$، سطر $i$ منهای $g_i$ برابر سطر $j$ را قرار

www.riazisara.ir


می‌دهیم. سطر $j$ را درعکس ضریب مقدم $f_j$ ضرب و سپس سطرهای $j$ و ۱ را تعویض می‌کنیم. نتیجهٔ همهٔ این اعمال ماتریسی چون $M'$ است که اولین ستونش

$$M'_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_j \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{j-1} \\ r_1 \\ r_{j+1} \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \qquad (۳۱\text{-}۷)$$

است. در اینجا $\mathcal{F}_j$ چندجمله‌ای تکین حاصل از نرمال‌کردن $f_j$، برای داشتن ۱ به‌عنوان ضریب مقدم، است. تااینجا، روشی خوش تعریف برای وابسته‌کردن ماتریسی چون $M'$ با خواص زیر به‌هر ماتریس $M$ عرضه کردیم:

(الف) $M'$ هم‌ارز سطری $M$ است.
(ب) $p(M'_1) = p(M_1)$.
(پ) یا $l(M'_1) < l(M_1)$ یا

$$M'_1 = \begin{bmatrix} p(M_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

نشان دادن (ب) و (پ) از روی (۷-۳۰) و (۷-۳۱) آسان است. خاصیت (پ) درست راه دیگر بیان این مطلب است که یا $i$یی وجود دارد که $r_i \neq 0$ و $\deg r_i < \deg f_j$ یا اینکه به‌ازای همهٔ $i$ها $r_i = 0$ و (بنابراین) $\mathcal{F}_j$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $f_1$، ...، $f_m$ است.

اکنون اثبات لم بسیار ساده می‌نماید. با ماتریس $M$ شروع می‌کنیم و روش فوق جهت تحصیل $M'$ را به‌کار می‌بندیم. خاصیت (پ) حاکی است که یا $M'$ بجای ماتریس

$N$ درلم به‌کار خواهد آمد یااینکه $l(M'_1) < l(M_1)$. درحالت دوم، روش را بر $M'$ به‌کار می‌بندیم تا ماتریس $M^{(2)} = (M')'$ را به‌دست آوریم. اگر $M^{(2)}$، $N$ مناسبی نباشد، $M^{(3)} = (M^{(2)})'$ را تشکیل می‌دهیم، و به‌همین‌نحو ادامه می‌دهیم. نکته دراینجاست که نامساویهای اکید

$$l(M_1) > l(M'_1) > l(M_1^{(2)}) > \cdots$$

نمی‌توانند همچنان ادامه داشته باشند. پس از حداکثر $l(M_1)$ بار تکرار این روش، باید به‌ماتریسی چون $M^{(k)}$ که دارای خواص مطلوب است، دست‌یابیم. □

**قضیهٔ ۶.** فرض کنیم ماتریس $m \times m$ ی $P$ با درایه‌های متعلق به‌جبر چندجمله‌ای $F[x]$ داده شده باشد. احکام زیر هم‌ارزند.

(۱) $P$ معکوس‌پذیر است.

(۲) دترمینان $P$ چندجمله‌ای اسکالری غیرصفری است.

(۳) $P$ هم‌ارز سطری ماتریس همانی $m \times m$ است.

(۴) $P$ حاصلضربی از ماتریسهای مقدماتی است.

اثبات. واضح است که (۲) از (۱) نتیجه می‌شود، چرا که تابع دترمینان دارای خاصیت ضربی است وتنها چندجمله‌ایهای معکوس‌پذیر در $F[x]$ چندجمله‌ایهای اسکالری غیرصفر هستند. حقیقت امر این است که درفصل ۵، برای‌اینکه نشان دهیم (۱) و (۲) هم‌ارزند، از الحاقی کلاسیك استفاده‌کردیم. لذا برهان اخیر، اثبات دیگری است ازاین مطلب که (۱) از (۲) نتیجه می‌شود. ما «چرخ فلك»

$$\begin{array}{ccc} (1) & \rightarrow & (2) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (4) & \leftarrow & (3) \end{array}$$

را تکمیل خواهیم کرد. تنها حکمی که بدیهی نیست، این است که (۳) از(۲) نتیجه‌می‌شود.

(۲) را فرض می‌کنیم و اولین ستون $P$ را درنظر می‌گیریم. این ستون شامل چندجمله‌ایهای معین $p_1$، $\cdots$، $p_m$ است و

$$1 = \text{بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك } (p_1, \cdots, p_m)$$

چراکه هر مقسوم‌علیه مشترك $p_1$، $\cdots$، $p_m$ باید (اسکالر) $\det P$ را عادکند. لم قبل را برای به‌دست آوردن ماتریسی چون

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_m \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \qquad (۳۲\text{-}۷)$$

که هم‌ارز سطری $P$ است بر $P$ به‌کار می‌بندیم. هرعمل سطری مقدماتی، دترمینان‌ماتریس مفروضی را (حداکثر) درحد سازهٔ اسکالری غیرصفری تغییر می‌دهد. پس، $\det Q$ یك چندجمله‌ای اسکالری غیرصفر است. بدیهی است‌که ماتریس $B$ی $(m-۱)\times(m-۱)$ در (۷-۳۲) همان دترمینان $Q$ را دارد. بنا براین، می‌توانیم لم اخیررا درمورد $B$ به‌کار ببریم. اگر این روش را تا $m$مرحله ادامه دهیم، ماتریسی بالامثلثی چون

$$R=\begin{bmatrix} ۱ & a_۲ & \cdots & a_m \\ ٠ & ۱ & \cdots & b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ٠ & ٠ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

راکه هم‌ارز سطری $P$ است، به‌دست می‌آوریم. معلوم است‌که $R$ هم‌ارز سطری‌ماتریس همانی $m\times m$ است. □

**نتیجه.** گیریم $M$ و $N$ دو ماتریس $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشند. دراین صورت $N$ هم‌ارز سطری $M$ است اگر و تنها اگر

$$N=PM$$

که درآن $P$ ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری است با درایه‌های متعلق به $F[x]$.

اکنون **اعمال ستونی مقدماتی و هم‌ارزی ستونی**‌را به‌صورتی شبیه به‌اعمال سطری و هم‌ارزی سطری تعریف می‌کنیم. نیازی به‌مفهومی جدید از ماتریس مقدماتی نداریم، زیرا ردهٔ ماتریسهایی‌که بتوانند به‌وسیلهٔ انجام یك عمل ستونی مقدماتی روی ماتریس همانی به‌دست آیند، عیناً با رده‌ای که با استفاده از تنها یك عمل سطری مقدماتی حاصل می‌شود مساوی است.

**تعریف.** ماتریس $N$ با ماتریس $M$ **هم‌ارز** است، هرگاه بتوانیم از $M$ به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از اعمال

$$M=M_٠\rightarrow M_۱\rightarrow\cdots\rightarrow M_k=N$$

که هریك عملی سطری مقدماتی یا عملی ستونی مقدماتی است، به $N$ برسیم.

**قضیهٔ ۷.** فرض کنیم $M$ و $N$ دو ماتریس $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌جبرچند-جمله‌ای $F[x]$ باشند. در این صورت $N$ با $M$ هم‌ارز است اگر و تنها اگر

$$N=PMQ$$

که درآن $P$ ماتریسی معکوس‌پذیر در $F[x]^{m\times m}$ و $Q$ ماتریسی معکوس‌پذیر در $F[x]^{n\times n}$ است.

**قضیهٔ ۸.** فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ بـا درایه‌های متعلـق به‌هیأت $F$ باشد و $p_۱$، ...، $p_r$ سازه‌های پایای $A$ باشند، ماتریس $xI-A$ با ماتریس قطری $n\times n$ با درایه‌های قطری $p_۱$، ...، $p_r$، ۱، ۱، ...، ۱ هم‌ارز است.

اثبات. ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون $P$ با درایه‌های متعلق به $F$ وجود دارد که $PAP^{-۱}$ به‌فرم گویا، یعنی به‌صورت بلوکی

$$PAP^{-۱}=\begin{bmatrix} A_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & A_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & A_r \end{bmatrix}$$

است که در آن $A_i$ ماتریس همدم چندجمله‌ای $p_i$ است. بنا برقضیهٔ ۷ ماتریس

$$P(xI-A)P^{-۱}=xI-PAP^{-۱} \qquad (۳۳\text{-}۷)$$

با $xI-A$ هم‌ارز است. حال

$$xI-PAP^{-۱}=\begin{bmatrix} xI-A_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & xI-A_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & xI-A_r \end{bmatrix} \qquad (۳۴\text{-}۷)$$

که در آن $I$های گوناگونی که به‌کار رفته است، ماتریسهایی همانی با اندازه‌های مناسب هستند. درآغاز این بخش نشان دادیم که $xI-A_i$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} p_i & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

هم‌ارز است. در ایـن صورت از (۳۳-۷) و (۳۴-۷) واضح است کـه $xI-A$ هم‌ارز

ماتریسی قطری است که قطراصلیش شامل چندجمله‌ایهای $p_i$ و $(n-r)$ تا ۱ است. با چند تعویض متوالی سطرها و ستونها می‌توانیم این درایه‌های قطری را به‌ترتیبی دلخواه، مثلاً $p_1$، ۰۰۰، $p_r$، ۱، ۰۰۰، ۱ مرتب کنیم. □

قضیهٔ ۸ راه مؤثری برای محاسبهٔ مقسوم‌علیه‌های مقدماتی $p_1$، ۰۰۰، $p_r$ ارائه نمی‌کند، چرا که اثبات ما به قضیهٔ تجزیهٔ دوری وابسته است. اکنون آلگوریتمی صریح برای تحویل یك ماتریس چندجمله‌ای به‌فرم قطری ارائه می‌کنیم. قضیهٔ ۸ می‌رساند که می‌توانیم ترتیبی دهیم که عناصر متوالی روی قطراصلی یکدیگر را عاد هم بکنند.

**تعریف.** گیریم $N$ ماتریسی در $F[x]^{m\times n}$ باشد. گوییم $N$ به **فرم نرمال** (اسمیت[1]) است، هرگاه

(الف) هردرایهٔ بیرون از قطراصلی $N$ برابر ۰ باشد؛

(ب) روی قطر اصلی $N$ (بترتیب) چندجمله‌ایهای $f_1$، ۰۰۰، $f_l$ که $f_k$ چندجمله‌ای $f_{k+1}$ را عاد می‌کند، $1\leqslant k\leqslant l-1$، ظاهر شوند.

دراین تعریف، عدد $l$ عبارت است از $l=\min(m, n)$. درایه‌های قطراصلی عبارتند از $f_k=N_{kk}$، $k=1, \cdots, l$.

**قضیهٔ ۹.** فرض کنیم $M$ ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشد. دراین صورت $M$ با ماتریسی چون $N$ که به‌فرم نرمال است هم‌ارز است.

اثبات. اگر $M=0$، چیزی برای اثبات نداریم. اگر $M\neq 0$، آلگوریتمی برای یافتن ماتریسی چون $M'$ که با $M$ هم‌ارز و به‌صورت

$$M'=\begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{۳۵-۷}$$

باشد، ارائه خواهیم کرد. در اینجا $R$ ماتریسی است $(m-1)\times(n-1)$ و $f_1$ همهٔ درایه‌های $R$ را عاد می‌کند. در این صورت کار تمام است، چرا که می‌توان همین روش را بر $R$ به‌کار بست و $f_2$ را به‌دست آورد، وغیره.

گیریم $l(M)$ مینیمم درجات درایه‌های غیرصفر $M$ باشد. اولین ستونی را که شامل درایه‌ای بادرجهٔ $l(M)$ است می‌یابیم واین ستون را با ستون ۱ تعویض می‌کنیم. ماتریس

---

1. Smith

حاصل را $M^{(0)}$ می‌نامیم. حال برای یافتن ماتریسی به‌صورت

$$\begin{bmatrix} g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{۳۶-۷}$$

که با $M^{(0)}$ هم‌ارز باشد، روشی را شرح می‌دهیم. با به‌کار بستن روش لم قبل ازقضیهٔ ۶ بر ماتریس $M^{(0)}$، روشی‌که ما آن را PL۶ خواهیم نامید[1]، کار خود را آغاز می‌کنیم. حاصل‌کار ماتریسی چون

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} p & a & \cdots & b \\ 0 & c & \cdots & d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & e & \cdots & f \end{bmatrix} \tag{۳۷-۷}$$

است. اگر درایه‌های $a$، . . .، $b$ همگی ۰ باشند، عالی است. وگرنه، نظیر PL۶ راکه می‌تواند $PL6'$ نامیده شود، درمورد اولین سطر به کار می‌بریم. نتیجه ماتریسی چون

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} g & 0 & \cdots & 0 \\ a' & c' & \cdots & e' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b' & d' & \cdots & f' \end{bmatrix} \tag{۳۸-۷}$$

است که در آن $g$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $p$، $a$، . . .، $b$ است. در استخراج $M^{(2)}$، این امکان هست‌که شکل خوب ستون ۱ به‌هم خورده باشد. دراین صورت، یك بار دیگر PL۶ را می‌توان به‌کار بست. نکته دراین‌جاست: درحداکثر $l(M)$ مرحله

$$M^{(0)} \xrightarrow{PL6} M^{(1)} \xrightarrow{PL6'} M^{(2)} \xrightarrow{PL6} \cdots \longrightarrow M^{(t)}$$

باید به‌ماتریسی‌چون $M^{(t)}$ که به‌صورت (۳۶-۷) است، دست‌یابیم،چراکه بین هردومرحلهٔ

---

۱. P حرف اول Procedure بمعنی روش و L حرف اول Lemma بمعنی لم است.ـم.

متوالی داریم $l(M^{(k+1)}) < l(M^{(k)})$. روندی را که هم اکنون تعریف کردیم، P۳۶-۷ می‌نامیم:

$$M^{(0)} \xrightarrow{P36-7} M^{(t)}.$$

در (۳۶-۷)، چندجمله‌ای $g$ ممکن است همهٔ درایه‌های $S$ را عادکند. در غیراین صورت، اولین ستونی راکه درایه‌ای غیرقابل تقسیم بر $g$ داشته باشد می‌یابیم و آن را به‌ستون ۱ اضافه می‌کنیم. ستون اول جدید، هم $g$ را شامل است و هم درایهٔ $gh+r$ را که در آن $r \neq 0$ و $\deg r < \deg g$. اکنون روند P۳۶-۷ راکه به‌کار بندیم نتیجه ماتریس دیگری به‌صورت (۳۶-۷) خواهد بود که درآن درجهٔ $g$ مربوط کاهش یافته‌است.

حال باید آشکار باشد که در تعدادی متناهی مرحله، (۳۵-۷) را به‌دست خواهیم آورد؛ یعنی، به‌ماتریسی به‌صورت (۳۶-۷) خواهیم رسید، که در آن درجهٔ $g$ دیگر تقلیل‌پذیر نیست. □

می‌خواهیم نشان دهیم که فرم نرمال وابسته به‌هرماتریس $M$، یکتاست. به‌دومطلب برخورده‌ایم که راهنماییهایی درمورد چگونگی تعیین یکتاگونه چندجمله‌ایهای $f_1$، ...، $f_l$ درقضیهٔ ۹ توسط $M$ به‌ما عرضه می‌کنند. اول آنکه، اعمال سطری‌وستونی مقدماتی، دترمینان ماتریسی مربعی را بیش از سازهٔ اسکالری غیرصفری تغییر نمی‌دهند. دوم، اعمال سطری و ستونی مقدماتی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك درایه‌های هیچ ماتریسی را تغییر نمی‌دهند

**تعریف.** فرض کنیم $M$ ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به $F[x]$ باشد. اگر $1 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$، $\delta_k(M)$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترك دترمینانهای همهٔ زیر-ماتریسهای $k \times k$ی $M$ تعریف می‌کنیم.

یادآور می‌شویم که یك زیرماتریس $k \times k$ی $M$ ماتریسی‌است که از حذف $m-k$ سطر و $n-k$ ستون $M$ پدید می‌آید. به‌بیان دیگر، $k$تاییهای معین

$$I=(i_1, \cdots, i_k) \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$$
$$J=(j_1, \cdots, j_k) \qquad 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$$

را انتخاب می‌کنیم‌وماتریس متشکله ازاین سطرها واین ستونهای $M$ را درنظرمی‌گیریم. دترمینانهای

$$D_{I,J}(M) = \det \begin{bmatrix} M_{i_1 j_1} & \cdots & M_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{i_k j_1} & \cdots & M_{i_k j_k} \end{bmatrix} \qquad (۳۹-۷)$$

مورد توجه ما هستند. وقتی که $I$ و $J$ روی $k$تاییهای ممکن تغییر کنند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چندجمله‌ایهای $D_{I,J}(M)$ چندجمله‌ای $\delta_k(M)$ است.

**قضیهٔ ۱۵۰.** اگر $M$ و $N$ ماتریسهای $m\times n$ هم ارز و با درایه‌های متعلق به $F[x]$ باشند، آنگاه

$$\delta_k(M)=\delta_k(N), \qquad 1\leqslant k\leqslant \min(m, n). \tag{۴۰-۷}$$

اثبات. کافی است که نشان دهیم هیچ عمل سطری مقدماتی، چون $e$، $\delta_k$ را تغییر نمی‌دهد. چون معکوس $e$ نیز عملی سطری مقدماتی است، کافی است نشان دهیم که: اگر چندجمله‌ایی چون $f$، به‌ازای همهٔ $k$تاییهای $I$ و $J$، $D_{I,J}(M)$ها را عاد کند، آنگاه $f$ چندجمله‌ایهای $D_{I,J}(e(M))$ را نیز عاد می‌کند. چون عملی سطری مورد توجه است، سطرهای $M$ را $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_m$ می‌نامیم و از نماد

$$D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k})=D_{I,J}(M)$$

نیز استفاده می‌کنیم. با مفروض بودن $I$ و $J$ چه رابطه‌ای بین $D_{I,J}(M)$ و $D_{I,J}(e(M))$ برقرار است؟ سه نوع عمل $e$ را درنظر می‌گیریم:

(الف) ضرب سطر $r$ در اسکالر غیرصفری چون $c$؛
(ب) جایگزین کردن سطر $r$ با سطر $r$ باضافهٔ $g$ برابر $s$، $r\neq s$؛
(پ) تعویض سطرهای $r$ و $s$، $r\neq s$.

موقتاً عملهای نوع (پ) را فراموش و حواس خود را روی انواع (الف) و (ب) که تنها سطر $r$ را تغییر می‌دهند، متمرکز می‌کنیم. اگر $r$ هیچ‌یك از نمایه‌های $i_1$، $\cdots$، $i_k$ نباشد، آنگاه

$$D_{I,J}(e(M))=D_{I,J}(M).$$

اگر $r$ در بین نمایه‌های $i_1$، $\cdots$، $i_k$ باشد، آنگاه برای دوحالت فوق داریم

(الف)
$$\begin{aligned} D_{I,J}(e(M))&=D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, c\alpha_r, \cdots, \alpha_{i_k})\\ &=cD_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_{i_k})\\ &=cD_{I,J}(M)\end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} D_{I,J}(e(M))&=D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_r+g\alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})\\ &=D_{I,J}(M)+gD_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})\end{aligned}$$

درمورد عملهای از نوع (الف) واضح است هر $f$ که $D_{I,J}(M)$ را عاد کند، $D_{I,J}(e(M))$ را نیزعاد می‌کند. درمورد حالت عملی از نوع (ب) توجه کنید که

هرگاه $j$یی باشد که $s=i_j$، $\quad D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})=0$

وهرگاه به‌ازای هر $j$، $s\neq i_j$، $\quad D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})=\pm D_{I',J}(M)$.

$I'$ درمعادلهٔ آخر، $k$ تایی $(i_1, \ldots, s, \ldots, i_k)$ است که به‌ترتیب صعودی مرتب شده است. اکنون باید آشکار باشد که اگر $f$ هر $D_{I,J}(M)$ را عاد کند، آنگاه $f$ هر $D_{I,J}(e(M))$ را نیز عاد می‌کند.
عمل نوع (پ) را می‌توان، قطع نظر از جزئیات، با استدلال مشابهی و یا با استفاده از این واقعیت که چنین عملی می‌تواند حاصل دنباله‌ای از عملهای از نوع (الف) و(ب) باشد، مورد بررسی قرارداد. □

**نتیجه.** هر ماتریس $M$ در $F[x]^{m\times n}$ دقیقاً با یك ماتریس $N$ که در فرم نرمال باشد هم‌ارز است. چندجمله‌ایهای $f_1$، $\ldots$، $f_l$ که روی قطر اصلی $N$ قرار می‌گیرند، عبارتند از

$$f_k = \frac{\delta_k(M)}{\delta_{k-1}(M)}\ , \quad 1 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$$

که در آن، برای سهولت کار، $\delta_0(M) = 1$ تعریف می‌شود.
اثبات. اگر $N$ در فرم نرمال و با درایه‌های قطری $f_1$، $\ldots$، $f_l$ باشد، بسیار ساده دیده می‌شود که

$$\delta_k(N) = f_1 f_2 \cdots f_k . \ \square$$

بدیهی است که ماتریس $N$ در نتیجهٔ اخیر را **فرم نرمال** $M$ بنامیم. چندجمله‌ایهای $f_1$، $\ldots$، $f_l$ غالباً **سازه‌های پایای** $M$ نامیده می‌شوند.
فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به $F$ و $p_1$، $\ldots$، $p_r$ سازه‌های پایای $A$ باشند. اکنون می‌بینیم که درایه‌های قطری فرم نرمال ماتریس $xI - A$ عبارتند از $1$، $1$، $\ldots$، $1$، $p_r$، $\ldots$، $p_1$. نتیجهٔ اخیر می‌فهماند که $p_1$، $\ldots$، $p_r$، برحسب زیرماتریسهای $xI - A$ چه هستند. عدد $n - r$ بزرگترین $k$یی است که $\delta_k(xI - A) = 1$. چندجمله‌ای مینیمال $p_1$ حاصل تقسیم چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$، بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دترمینانهای همهٔ زیرماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ از $xI - A$ است، و الی آخر.

## تمرین

۱. مطلب ذیل درست است یا غلط؟ هرماتریس در $F[x]^{m\times n}$ هم‌ارز سطری ماتریسی از بالا مثلثی است.

۲. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی و $A$ ماتریس $T$ در پایهٔ مرتبی باشد. دراین صورت $T$ برداری دوری دارد اگر وتنها اگر دترمینانهای زیرماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ از $xI - A$ نسبت به‌هم اول باشند.

۳. فرض کنید $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت $F$ و $f_1$، $\ldots$، $f_n$ درایه‌های

قطری فرم نرمال $xI-A$ باشند. برای کدام ماتریس $A$، خاصیت $f_1\neq 1$ برقرار است.

۴. عملگری خطی‌چون $T$ باچندجمله‌ای مینیمال $x^2(x-1)^2$ و چندجمله‌ای سرشت‌نمای $x^3(x-1)^4$ بسازید. تجزیهٔ اولیهٔ‌فضای برداری تحت $T$را توصیف کنید وتصویرهای روی مؤلفه‌های‌اولیه‌را بیابید. پایه‌ای‌بیابیدکه‌در آن ماتریس $T$ درفرم ژوردان باشد. همچنین تجزیه به‌مجموع‌مستقیم صریحی‌از فضا به‌زیرفضاهای $T$-دوری‌همانند قضیهٔ ۳ را پیداکنید وسازه‌های پایا را به‌دست آورید.

۵. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $R^8$ باشدکه درپایهٔ استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

(الف) چندجمله‌ای سرشت‌نما و سازه‌های پایا را بیابید.

(ب)تجزیهٔ اولیه$R^8$ تحت $T$ وتصویرهای روی مؤلفه‌های اولیه‌را‌بیابید. تجزیهٔ دوری هرمؤلفهٔ اولیه را، آن‌طورکه درقضیهٔ ۳ آمده است، پیداکنید.

(پ) فرم ژوردان $A$ را بیابید.

(ت) یك‌تجزیه به‌مجموع مستقیم از$R^8$ به‌زیرفضاهای‌$T$-دوری، همانند قضیهٔ۳، پیداکنید. (راهنمایی: یك راه برای انجام این‌کار استفاده ازنتایج در(ب) ونیزاستفاده از تعمیمی مناسب از ایده‌های بحث شده درمثال ۴ است.)

## ۷.۵ خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده

در دو فصل اخیر با تك‌عملگری خطی‌چون $T$ روی فضای برداری بعدمتناهی $V$ سروکار داشتیم. برنامهٔ‌کار، تجزیهٔ $T$ به‌مجموعی مستقیم از عملگرهایی خطی بـا طبیعتی ابتدایی، به‌منظور کسب اطلاعاتی مفصل دراین مورد که $T$ روی فضای $V$ چگـونه «عمل می کند»،

بوده است. حال وضع فعلی را به‌طور خلاصه مرور می‌کنیم.

مطالعهٔ $T$ را با کمك مقادیر سرشت‌نما و بردارهای سرشت‌نما آغاز کردیم. عملگرهای قطری‌شدنی، یعنی عملگرهایی که می‌توانند به‌طور کامل برحسب مقادیر و بردارهای سرشت‌نما توصیف شوند، را معرفی کردیم. سپس مشاهده نمودیم که ممکن است $T$ حتی یك بردار سرشت‌نما هم نداشته باشد. حتی درمورد هیأت اسکالری بستهٔ جبری نیز، که هر عملگر خطی به‌تحقیق‌دست‌کم یك بردار سرشت‌نما دارد، ملاحظه کردیم که بردارهای سرشت‌نمای $T$ لزوماً فضا را پدید نمی‌آورند.

سپس قضیهٔ تجزیهٔ دوری را اثبات کردیم که، بدون هیچ‌گونه فرضی درمورد هیأت اسکالری، هر عملگر خطی را به صورت مجموع مستقیم عملگرهایی با یك بردار دوری، بیان می‌کرد. اگر $U$ عملگری خطی با برداری دوری باشد، آنگاه پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ با خاصیت

$$U\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$U\alpha_n = -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \dots - c_{n-1}\alpha_n$$

وجود دارد. از این‌رو کنش $U$ روی این پایه، انتقال هر $\alpha_j$ به‌بردار بعدی $\alpha_{j+1}$ است، بجز اینکه $U\alpha_n$ ترکیب خطی مشخصی از بردارهای پایه است. چون عملگر خطی عمومی $T$ مجموع مستقیم تعدادی متناهی از این‌گونه عملگرهای $U$ است، توصیفی صریح و نسبتاً ابتدایی ازکنش $T$ به‌دست آوردیم.

آنگاه قضیهٔ تجزیهٔ دوری را روی عملگرهای پوچ‌توان به‌کار بستیم. درحالت هیأت اسکالری بستهٔ جبری، این موضوع را باقضیهٔ تجزیهٔ اولیه تلفیق‌کردیم وفرم ژوردان را به‌دست آوردیم. فرم ژوردان، پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای فضای $V$ را به‌دست‌می‌دهد که به‌ازای هر $j$، یا $T\alpha_j$ مضربی اسکالری از $\alpha_j$ است یا $T\alpha_j = c\alpha_j + \alpha_{j+1}$. چنین پایه‌ای به‌طور قطع کنش $T$ را به‌طریقی صریح و ابتدایی توصیف می‌کند.

اهمیت فرم‌گویا (یا فرم ژوردان) ازاین واقعیت ناشی می‌شود که همواره وجود دارد ونه ازاینکه درحالاتی خاص امکان محاسبهٔ آن هست. بدیهی است که اگرعملگر خطی خاصی‌چون $T$ مفروض باشد، وبتوان فرم ژوردان یا دوریش را محاسبه‌کرد، حتماً باید محاسبه را انجام داد؛ زیرا، با در دست داشتن چنین فرمی، می‌توان اطلاعات زیادی درمورد $T$ جمع‌آوری‌کرد. در محاسبهٔ این فرمهای استانده دونوع اشکال بروزمی‌کند. یك اشکال، مسلماً طولانی بودن محاسبات است. اشکال دیگر این است که حتی اگرکسی وقت‌وحوصلهٔ لازم را داشته باشد، ممکن است روشی برای انجام محاسبات وجودنداشته باشد. مثلاً، در تلاش برای یافتن فرم ژوردان ماتریسی مختلط اشکال دوم رخ می‌دهد. اصلاً روش خوش تعریفی برای تجزیهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نما به‌سازه‌ها وجود ندارد و بدین‌سان شخص درآغازازکار بازمی‌ماند. فرم‌گویا ازاین‌اشکال‌صدمه نمی‌بیند. همان‌طور که در بخش ۴.۷ نشان دادیم، روشی خوش‌تعریف برای یافتن فرم‌گویای هر ماتریس

$n\times n$ مفروضی، وجود دارد؛ البته، معمولاً این‌گونه محاسبات بسیار طولانی هستند.

درخلاصهٔ قضایای این دوفصل آخر، تاکنون به‌یکی از قضایایی که اثبات کردیم اشاره‌ای نشده است. این قضیه حاکی از این است که اگر $T$ عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأتی بستهٔ جبری باشد، آنگاه $T$ به‌طور یکتا به صورت مجموع عملگری قطری‌شدنی وعملگری پوچ‌توان، که با یکدیگرجا بجا می‌شوند، قابل بیان است. این نتیجه باکمك قضیهٔ تجزیهٔ اولیه واطلاعات معینی درموردعملگرهای قطری‌شدنی، اثبات شد. قضیهٔ اخیر به‌عمق قضیهٔ تجزیهٔ دوری ویا وجود فرم ژوردان نیست، ولی یقیناً دارای کاربردهای مهم ومفیدی در بخشهایی از ریاضیات هست. در خاتمهٔ این فصل، بدون اینکه فرض کنیم هیأت اسکالری بستهٔ جبری است، قضیهٔ مشابهی را اثبات خواهیم کرد. با تعریف عملگرهایی که نقش عملگرهای قطری‌شدنی را بازی می‌کنند کاررا آغازمی‌کنیم.

**تعریف.** فرض کنیم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$، و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. گوییم $T$ **نیم‌ساده** است هرگاه هر زیرفضای $T$-پایا، دارای زیرفضای $T$-پایای مکملی باشد.

چیزی راکه درشرف اثبات آن هستیم این است که با محدودیتهایی روی هیأت $F$، هرعملگرخطی $T$ به‌طور یکتا به‌صورت $T=S+N$ که درآن $S$ نیم‌ساده است، $N$ پوچ‌توان است، و $SN=NS$ قابل بیان است. ابتدا، عملگرهای نیم‌ساده را با چندجمله‌ایهای مینیمالشان مشخص می‌کنیم. این مشخص‌سازی نشان خواهد دادکه وقتی $F$ بستهٔ جبری باشد، عملگری مفروض نیم‌ساده است اگر وتنها اگر آن عملگرقطری‌شدنی باشد.

**لم.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی $V$ و $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ تجزیهٔ اولیهٔ $T$ باشد. به‌بیان دیگر، اگر $p$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ و $p=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ تجزیهٔ $p$ به‌سازه‌های اول باشد، آنگاه $W_j$ فضای پوچ $p_j(T)^{r_j}$ است. بعلاوه، فرض می‌کنیم $W$ زیرفضایی از $V$ باشد که تحت $T$ پایاست. در این صورت

$$W=(W\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(W\cap W_k).$$

اثبات. برای اثبات، لازم است نتیجه‌ای ازاثبات قضیهٔ تجزیهٔ اولیهٔ مربوط به‌بخش ۸.۶ را یادآوری کنیم. اگر $E_1$، ...، $E_k$ تصویرهای وابسته به‌تجزیهٔ

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$$

باشند، آنگاه هر $E_j$ یك چندجمله‌ای در $T$ است. یعنی، چندجمله‌ایهایی‌چون $h_1$، ...، $h_k$ وجود دارند که $E_j=h_j(T)$.

حال زیرفضای $W$ راکه تحت $T$ پایاست درنظر می‌گیریم. اگر $\alpha$ برداری دلخواه از $W$ باشد، آنگاه $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$، که درآن $\alpha_j$ در $W_j$ قراردارد. اما

$\alpha_j = E_j\alpha = h_j(T)\alpha$ وچون $W$ تحت $T$پایاست، هر $\alpha_j$ نیز در $W$ قرار دارد. پس، هر بردار $\alpha$ در $W$ به صورت $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ است و $\alpha_j$ در اشتراک $W \cap W_j$ می‌باشد. این عبارت یکتاست، زیرا $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. بنابراین

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k). \square$$

**لم.** $T$ را عملگری خطی روی $V$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم چندجمله‌ای مینیمال $T$ برروی هیأت اسکالری $F$ تحویل‌ناپذیر باشد. دراین صورت $T$ نیم‌ساده است.

اثبات. فرض کنیم زیرفضای $W$ از $V$ تحت $T$پایا باشد. باید ثابت کنیم $W$ زیرفضای $T$-پایای مکملی دارد. بنابرنتیجه‌ای از قضیهٔ ۳، کافی است ثابت کنیم که اگر $f$ یك چندجمله‌ای و $\beta$ برداری از $V$ باشد که $f(T)\beta$ در $W$ قرار بگیرد، آنگاه برداری چون $\alpha$ در $W$ وجود دارد که $f(T)\beta = f(T)\alpha$. لذا فرض می‌کنیم $\beta$ در $V$ و $f$ یك چندجمله‌ای باشد که $f(T)\beta$ در $W$ قراردارد. اگر $f(T)\beta = 0$، فرض می‌کنیم $\alpha = 0$ ودراین صورت $\alpha$ برداری در $W$ است و $f(T)\beta = f(T)\alpha$. اگر $f(T)\beta \neq 0$، چندجمله‌ای $f$ برچندجمله‌ای مینیمال $p$ از عملگر $T$ تقسیم‌پذیر نیست. چون $p$ اول است، این بدان معنی است که $f$ و $p$ نسبت به‌هم اول هستند وچندجمله‌ایهایی چون $g$ و $h$ وجود دارند که $fg + ph = 1$. چون $p(T) = 0$ خواهیم داشت $f(T)g(T) = I$. از این مطلب نتیجه می‌شود که بردار $\beta$ خود باید در زیرفضای $W$ باشد؛ زیرا

$$\begin{aligned} \beta &= g(T)f(T)\beta \\ &= g(T)(f(T)\beta) \end{aligned}$$

درحالی که $f(T)\beta$ در $W$ قرار دارد و $W$ تحت $T$پایاست. حال می‌گیریم $\alpha = \beta$. $\square$

**قضیهٔ ۱۱.** فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی فضای برداری بعدمتناهی $V$ باشد. یك شرط لازم وکافی برای اینکه $T$ نیم‌ساده باشد این است که چندجمله‌ای مینیمال $p$ از $T$ به‌صورت $p = p_1 \cdots p_k$ باشد و $p_1$، ...، $p_k$ نیز چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی هیأت اسکالری $F$ باشند.

اثبات. فرض کنیم $T$ نیم‌ساده باشد. نشان خواهیم داد که در تجزیهٔ چندجمله‌ای مینیمال $p$ به‌سازه‌های اول، هیچ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری تکرار نمی‌شود. خلاف این را فرض کنیم. آنگاه یك چندجمله‌ای تکین غیراسکالری چون $g$ وجود دارد که $g^2$ چندجمله‌ای $p$ را عاد می‌کند. گیریم $W$ فضای پوچ عملگر $g(T)$ باشد. در این صورت $W$ تحت $T$پایاست. حال چندجمله‌ایی مانند $h$ هست که $p = g^2h$. چون $g$ یك چندجمله‌ای اسکالری نیست، عملگر $g(T)h(T)$ عملگرصفرنیست و برداری چون $\beta$ در $V$ وجوددارد که $g(T)h(T)\beta \neq 0$؛ یعنی، $(gh)\beta \neq 0$. حال $(gh)\beta$ در زیرفضای $W$ قرار دارد، چون که $g(gh\beta) = g^2h\beta = p\beta = 0$. اما هیچ برداری چون $\alpha$ در $W$ وجود ندارد که $gh\beta = gh\alpha$؛ زیرا، اگر $\alpha$ در $W$ باشد

$$(gh)\alpha=(hg)\alpha=h(g\alpha)=h(\circ)=\circ.$$

پس، $W$ نمی‌تواند زیرفضای $T$-پایای مکملی داشته باشد؛ واین خود متناقض این فرض است که $T$ نیم‌ساده است.

حال فرض کنیم تجزیهٔ $p$ به‌سازه‌های اول به‌صورت $p=p_1 \cdots p_k$ باشد و $p_1$، ...، $p_k$ هم‌چندجمله‌ایهای تکین (غیراسکالری) تحویل‌ناپذیر متمایزی باشند. گیریم $W$ زیرفضایی از $V$ باشد که تحت $T$پایاست. ثابت خواهیم کرد که $W$ زیرفضای $T$-پایای مکملی دارد. $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ را تجزیهٔ اولیه برای $T$ می‌گیریم؛ یعنی، $W_j$ را فضای پوچ $p_j(T)$ فرض می‌کنیم. $T_j$ را عملگر خطی القا شده توسط $T$ روی $W_j$ می‌گیریم. دراین صورت چندجمله‌ای مینیمال $T_j$ چندجمله‌ای اولی چون $p_j$ است. حال $W\cap W_j$ زیرفضایی از $W_j$ است که تحت $T_j$ (یا تحت $T$) پایا است. بنابر آخرین لم زیرفضایی چون $V_j$ از $W_j$ وجود دارد که $W_j=(W\cap W_j)\oplus V_j$ و $V_j$ تحت $T_j$ (و از این‌رو تحت $T$) پایاست. دراین صورت داریم

$$\begin{aligned}V&=W_1\oplus\cdots\oplus W_k\\&=(W\cap W_1)\oplus V_1\oplus\cdots\oplus(W\cap W_k)\oplus V_k\\&=(W\cap W_1)+\cdots+(W\cap W_k)\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_k.\end{aligned}$$

بنابراولین لم فوق، $W=(W\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(W\cap W_k)$ و از اینجا، اگر $W'=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$، آنگاه، $V=W\oplus W'$، و $W'$ تحت $T$پایاست. □

**نتیجه.** اگر $T$ عملگری‌خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأتی بستهٔ جبری باشد، آنگاه $T$ نیم‌ساده است اگر و تنها اگر $T$ قطری‌شدنی باشد.

اثبات. اگر هیأت اسکالری $F$ بستهٔ جبری باشد، چندجمله‌ایهای اول تکین برروی $F$ همان چندجمله‌ایهای $x-c$ هستند. دراین حالت، $T$ نیم‌ساده است، اگروتنها اگرچندجمله‌ای مینیمال $T$ برابر $p=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$ باشد، که درآن $c_1$، ...، $c_k$ عناصر متمایزی از $F$ هستند. این دقیقاً همان معیاری است که درفصل ۶ جهت قطری‌شدن $T$ به‌دست آوردیم. □

باید خاطرنشان کنیم که $T$ نیم‌ساده است اگروتنها اگر یك چندجمله‌ای چون $f$، که حاصل‌ضربی ازچندجمله‌ایهای اول‌متمایزاست، وجود داشته‌باشد به‌طوری که $f(T)=\circ$. تفاوت این حکم با این شرط که چندجمله‌ای مینیمال، حاصل‌ضربی ازچندجمله‌ایهای اول متمایز باشد فقط ظاهری است.

اکنون بازمی‌گردیم به‌اینکه، عملگری خطی را به‌صورت مجموع عملگری‌نیم‌ساده وعملگری پوچ‌توان که با یکدیگر جابجا هم می‌شوند، بیان کنیم. دراین مورد، هیأت اسکالری را به‌زیرهیأتی ازاعداد مختلط محدود می‌کنیم. خوانندهٔ آگاه توجه دارد که آنچه

مهم است این است که هیأت $F$ هیأتی با سرشت‌نمای صفر باشد؛ یعنی اینکه، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $n$، مجموع $۱ + \cdots + ۱$ ($n$ بار) هیچگاه در $F$ برابر ۰ نباشد. برای هر چندجمله‌ای $f$ بر روی $F$، $k$مین مشتق صوری $f$ را با $f^{(k)}$ نشان می‌دهیم. به‌بیان‌دیگر، $f^{(k)} = D^k f$ که‌در آن $D$عملگرمشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهاست. اگر $g$ چندجمله‌ای دیگری باشد، $f(g)$ نتیجهٔ قراردادن $g$ در $f$ را، یعنی چندجمله‌ای حاصل از کاربست $f$ به‌عنصر $g$ در جبرخطی $F[x]$ را، نشان می‌دهد.

**لم (فرمول تیلور).** فرض‌کنیم $F$هیأتی باسرشت‌نمای صفر و $g$ و $h$ دوچندجمله‌ای بر روی $F$ باشند. اگر $f$ چندجمله‌ای دلخواهی برروی $F$ با $\deg f \leqslant n$ باشد، آنگاه

$$f(g) = f(h) + f^{(۱)}(h)(g-h) + \frac{f^{(۲)}(h)}{۲!}(g-h)^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(h)}{n!}(g-h)^n.$$

اثبات. چیزی راکه می‌خواهیم اثبات‌کنیم تعمیمی از فرمول تیلور است. خواننده احتمالاً با حالت خاصی که در آن $h=c$ چندجمله‌ای اسکالری، و $g=x$ باشد،آشناست. دراین حالت فرمول بیان می‌کندکه

$$f = f(x) = f(c) + f^{(۱)}(c)(x-c) + \frac{f^{(۲)}(c)}{۲!}(x-c)^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

اثبات فرمول عمومی، دقیقاً کاربردی از قضیهٔ دوجمله‌ای

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-۱}b + \frac{k(k-۱)}{۲!}a^{k-۲}b^۲ + \cdots + b^k$$

است. زیرا، همان‌طورکه خواننده می‌داند چون جایگزینی و مشتق‌گیری فرایندهایی‌خطی هستند فقط لازم است فرمول را برای حالتی‌که در آن $f = x^k$ اثبات‌کنیم. این فرمول درمورد $f = \sum_{k=۰}^{n} c_k x^k$ باکمك ترکیب خطی نتیجه می‌شود. در حالت $f = x^k$ با شرط $k \leqslant n$، فرمول حاکی است که

$$g^k = h^k + kh^{k-۱}(g-h) + \frac{k(k-۱)}{۲!}h^{k-۲}(g-h)^۲ + \cdots + (g-h)^k$$

واین دقیقاً بسط دوجمله‌ای

$$g^k = [h + (g-h)]^k$$

است. □

**لم.** فرض کنیم $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، $f$ یك چندجمله‌ای برروی $F$، و $f'$ مشتق $f$ باشد. احکام زیر هم‌ارزند:

(الف) $f$ حاصل‌ضرب چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی $F$ است.

(ب) $f$ و $f'$ نسبت به‌هم اول هستند.

(پ) $f$ به‌عنوان یك چندجمله‌ای با ضرایب مختلط، هیچ ریشهٔ تکراری ندارد.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که (الف) و (ب) احکامی هم‌ارز دربارهٔ $f$ هستند. فرض‌کنیم در تجزیهٔ اولیهٔ $f$ برروی هیأت $F$، چندجمله‌ای اولی (غیراسکالری) چون $p$ تکرار بشود. آنگاه $h$ ای در $F[x]$ هست‌که $f = p^{2}h$. پس

$$f' = p^{2}h' + 2pp'h$$

ولذا $p$ مقسوم‌علیهی از $f'$ نیز هست. از این‌رو، $f$ و $f'$ نسبت به‌هم اول نیستند. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که (ب)، حکم (الف) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم $f = p_1 \cdots p_k$ و $p_1$، ...، $p_k$ چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر غیراسکالری متمایزی برروی $F$ باشند. گیریم $f_j = f/p_j$. دراین صورت

$$f' = p_1'f_1 + p_2'f_2 + \cdots + p_k'f_k.$$

فرض‌کنیم $p$ چندجمله‌ای‌اولی باشدکه هم $f$ و هم $f'$ را عاد می‌کند. دراین صورت $i$ یی هست‌که $p = p_i$. اما $p_i$ به‌ازای $j \neq i$، چندجمله‌ای $f_j$ را عاد می‌کند، وچون $p_i$ همچنین

$$f' = \sum_{j=1}^{k} p_j'f_j$$

را عاد می‌کند، درمی‌یابیم که $p_i$ باید $p_i'f_i$ را هم عادکند. بنابراین $p_i$ یا $f_i$ را عاد می‌کند یا $p_i'$ را. ولی $p_i$ چندجمله‌ای $f_i$ راعاد نمی‌کندچراکه $p_1$، ...، $p_k$ متمایزند. از این‌رو، $p_i$ چندجمله‌ای $p_i'$ را عاد می‌کند. اما این ممکن نیست، چراکه درجهٔ $p_i'$ یکی کمتر از درجهٔ $p_i$ است. پس نتیجه می‌گیریم که هیچ چندجمله‌ای اولی هردوی $f$ و $f'$ را عاد نمی‌کند، ویا $(f, f') = 1$.

بـرای دیدن این که حکم (پ) با (الف) و با (ب) هم‌ارز است، تنها لازم است مطلب ذیـل را مشاهده‌کنیم: فـرض‌کنیم $f$ و $g$ دوچندجمله‌ای برروی $F$، زیرهیأتی از اعداد مختلط، باشند. می‌توانیم $f$ و $g$ را به‌عنوان چندجمله‌ایهایی بـاضرایب مختلط نیز محسوب‌کنیم. این که $f$ و $g$، به‌عنوان چندجمله‌ایهایی برروی $F$ نسبت به‌هم اول هستند، هم‌ارز این حکم است که $f$ و $g$، به‌عنـوان چندجمله‌ایهایی برروی هیأت اعداد مختلط، نسبت به‌هم اول می‌باشند. اثبات این مطلب را به‌عنوان تمرین باقـی می‌گذاریم. از این حکم با $g = f'$ استفاده می‌کنیم. توجه‌کنید وقتی‌که $f$ به‌عنوان یك چندجمله‌ای برروی هیأت اعداد مختلط محسوب شود، (پ) عیناً همـان (الف) است. پس (ب) و (پ)، بـا همان استدلالی‌که دربالا به‌کار بردیم، هم‌ارز هستند. □

اکنون می‌توانیم قضیه‌ای را ثابت کنیم که رابطهٔ بین عملگرهای نیم‌ساده و عملگرهای قطری‌شدنی را از این هم آشکارتر می‌سازد.

**قضیهٔ ۱۲.** فرض کنیم $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی $F$، و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. همچنین فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ و $A$ ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشد. دراین صورت $T$ نیم‌ساده است اگر وتنها ماتریس $A$ برروی هیات اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه باشد.

اثبات. گیریم $p$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۱، $T$ نیم‌ساده است اگر وتنها اگر $p = p_1 \cdots p_k$، و $p_1$، $\cdots$، $p_k$ چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی $F$ باشند. به‌واسطهٔ آخرین لم می‌بینیم که $T$ نیم‌ساده است اگر وتنها اگر $p$ هیچ ریشهٔ مختلط تکراری نداشته باشد.

اما $p$ چندجمله‌ای مینیمال ماتریس $A$ نیز هست. می‌دانیم که $A$ برروی هیأت‌اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است اگر وتنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن دارای ریشهٔ مختلط تکراری نباشد. این مطلب قضیه را اثبات می‌کند. □

**قضیهٔ ۱۳.** فرض کنیم $F$ زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی $F$، و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. عملگر نیم‌ساده‌ای چون $S$ روی $V$ و عملگر پوچ‌توانی چون $N$ روی $V$ وجود دارد که

$$(1)\quad T = S + N;$$
$$(2)\quad SN = NS.$$

بعلاوه، عملگرهای نیم‌ساده $S$ و پوچ‌توان $N$، که در (۱) و (۲) صدق می‌کنند، یکتا هستند و هریک یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است.

اثبات. فرض می‌کنیم $p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ تجزیهٔ چندجمله‌ای مینیمال $T$ به سازه‌های اول باشد، ومی‌نویسیم $f = p_1 \cdots p_k$. گیریم بین اعداد صحیح مثبت $r_1$، $\cdots$، $r_k$، عدد $r$ بزرگترین باشد. دراین صورت چندجمله‌ای $f$ حاصل‌ضربی ازچندجمله‌ایهای اول متمایز است، $f^r$ برچندجمله‌ای مینیمال $T$ تقسیم‌پذیر است، ولذا

$$f(T)^r = 0.$$

می‌خواهیم دنباله‌ای ازچندجمله‌ایهای $g_0$، $g_1$، $g_2$، $\cdots$ بسازیم که

$$f\left(x - \sum_{j=0}^{n} g_j f^j\right)$$

بر $f^{n+1}$، $n = 0, 1, 2, \cdots$، تقسیم‌پذیر باشد. فرض می‌کنیم $g_0 = 0$ که دراین‌صورت $f(x - g_0 f^0) = f(x) = f$ بر $f$ تقسیم‌پذیراست. گیریم $g_0$، $\cdots$، $g_{n-1}$ را انتخاب

کرده باشیم. می‌نویسیم

$$h=x-\sum_{j=0}^{n-1} g_j f^j$$

و طبق فرض، $f(h)$ بر $f^n$ تقسیم پذیر است. می‌خواهیم $g_n$ را طوری انتخاب کنیم که

$$f(h-g_n f^n)$$

بر $f^{n+1}$ تقسیم‌پذیر باشد. فرمول عمومی تیلور را به‌کار می‌بریم، و

$$f(h-g_n f^n)=f(h)-g_n f^n f'(h)+f^{n+1} b$$

راکه درآن $b$ یك چندجمله‌ای است به‌دست می‌آوریم. بنا به‌فرض $f(h)=qf^n$. پس، برای آنکه $f(h-g_n f^n)$ بر $f^{n+1}$ تقسیم‌پذیر باشد، تنهالازم است $g_n$ را طوری‌انتخاب کنیم‌که $(q-g_n f'(h))$ بر $f$ تقسیم‌پذیر باشد. این امرقابل اجراست، زیرا $f$ سازه‌های اول تکراری ندارد و لذا $f$ و $f'$ نسبت به‌هم اول هستند. اگر $a$ و $e$ چندجمله‌ایهایی باشندکه $af+ef'=1$ و اگر $g_n=eq$ گرفته شود، آنگاه $q-g_n f'$ بر $f$ تقسیم‌پذیر است.

حال دنباله‌ای چون $g_0$، $g_1$، ... را داریم‌که $f^{n+1}$ چندجمله‌ای

$$f\left(x-\sum_{j=0}^{n} g_j f^j\right)$$

را عاد می‌کند. فرض می‌کنیم $n=r-1$، و دراین صورت چون $f(T)^r=0$،

$$f\left(T-\sum_{j=0}^{r-1} g_j(T) f(T)^j\right)=0 .$$

فرض کنیم

$$N=\sum_{j=1}^{r-1} g_j(T) f(T)^j=\sum_{j=0}^{r-1} g_j(T) f(T)^j .$$

چون $\sum_{j=1}^{n} g_j f^j$ بر $f$ تقسیم‌پذیراست، می‌بینیم‌که $N^r=0$ ولذا $N$ پوچ‌توان است. فرض کنیم $S=T-N$. دراین صورت $f(S)=f(T-N)=0$. چون $f$ سازه‌های اول متمایز دارد $S$ نیم‌ساده است.

حال $T=S+N$ راکه درآن $S$ نیم‌ساده و $N$ پوچ‌توان است داریم، و هرکدام یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است. برای اثبات حکم یکتایی، ازهیأت اسکالری $F$ به‌هیأت اعداد مختلط می‌رویم. $\mathcal{B}$ را پایهٔ مرتبی برای فضای $V$ می‌گیریم. دراین صورت داریم

$$[T]_{\mathcal{B}}=[S]_{\mathcal{B}}+[N]_{\mathcal{B}}$$

که درآن $[S]_{\mathcal{B}}$ بر روی اعداد مختلط قطری‌شدنی است و $[N]_{\mathcal{B}}$ هم پوچ توان است. این ماتریسهای قطری‌شدنی و پوچ توان‌که با یکدیگر جابجا هم می‌شوند، همان‌گونه که در فصل ۶ نشان دادیم، به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. □

## تمرین

۱. اگر $N$ عملگر خطی پوچ‌توانی روی $V$ باشد نشان دهید که به‌ازای هرچند جمله‌ای $f$، جزء نیم‌سادهٔ $f(N)$ مضربی اسکالری ازعملگرهمانی است ($F$ زیرهیأتی از $C$است).

۲. فرض کنید $F$ زیرهیأتی از اعداد مختلط، $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی $F$، و $T$ عملگرخطی نیم‌ساده‌ای روی $V$ باشد. اگر $f$ یک چندجمله‌ای برروی $F$ باشد، ثابت کنید که $f(T)$ نیم‌ساده است.

۳. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضایی با بعد متناهی برروی زیرهیأتی از $C$ باشد. ثابت کنید $T$ نیم‌ساده است اگر و تنها اگرمطلب ذیل‌درست باشد: اگر $f$ یک‌چندجمله‌ای و $f(T)$ پوچ‌توان باشد، آنگاه $f(T) = 0$.

# ۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# فضاهای ضرب داخلی

## ۱.۸. ضربهای داخلی

در سراسراین فصل، تنها فضاهای برداری حقیقی ومختلط؛ یعنی، فضاهای برداری برروی هیأت اعداد حقیقی و یا هیأت اعداد مختلط درنظر گرفته می‌شوند. مقصود اصلی ما مطالعهٔ فضاهایی برداری است که در آنها سخن گفتن از «طول» یك بردار و «زاویهٔ» بین دوبردار معنی داشته باشد. این‌کار را با مطالعهٔ نـوع خاصی از توابع اسکالری، معروف به‌ضرب داخلی، روی جفت بردارها انجام خواهیم داد. مثالی ازضرب داخلی همان ضرب‌نقطه‌ای یا اسکالری بردارهای در $R^3$ است. ضرب اسکالری بردارهای

$$\beta=(y_1, y_2, y_3) \text{ و } \alpha=(x_1, x_2, x_3)$$

در $R^3$ عبارت است ازعدد حقیقی

$$(\alpha|\beta)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

از نظرهندسی، ایـن ضرب نقطه‌ای عبارت است از حاصل‌ضرب طـول $\beta$ درطول $\alpha$ در کسینوس زاویهٔ بین $\alpha$ و $\beta$. بنابراین مفاهیم هندسی «طول» و «زاویه» در $R^3$ را می‌توان با ضرب اسکالری که به‌طور جبری تعریف می‌شود نیز تعریف کرد.

یك ضرب داخلی روی فضایی برداری عبارت است از تابعی با خواصی مشابه با خواص ضرب نقطه‌ای در $R^3$ و برحسب یـك چنین ضرب داخلی «طـول» و «زاویه» را

می‌توان تعریف‌کرد. اظهارات مادربارهٔ مفهوم عمومی زاویه، به‌ایدهٔ عمودبودن (یاتعامد) بردارها محدود خواهد بود. دراین بخش اول، خواهیم گفت‌که یك ضرب داخلی چیست، چند مثال‌خاص را بررسی خواهیم‌کرد، وچند خاصیت اساسی ضربهای داخلی را به‌دست خواهیم داد. سپس به‌کار بحث دربارهٔ طول و تعامد بازخواهیم گشت.

**تعریف.** فرض کنیم $F$هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط و $V$ فضایی‌برداری بر روی $F$ باشد. یك **ضرب داخلی** روی $V$ تابعی است که به‌هرجفت مرتب از بردارهای $\alpha$، $\beta$ در $V$ اسکالری چون $(\alpha|\beta)$ در $F$ را طوری اختصاص می‌دهد که به‌ازای همهٔ$\alpha$ها، $\beta$ها، و $\gamma$های در $V$ و همهٔ اسکالرهای $c$ داشته باشیم:

(الف) $(\alpha+\beta|\gamma)=(\alpha|\gamma)+(\beta|\gamma)$؛

(ب) $(c\alpha|\beta)=c(\alpha|\beta)$؛

(پ) $(\beta|\alpha)=\overline{(\alpha|\beta)}$، خط زبر نمایشگر مزدوج اعداد مختلط است؛

(ت) هرگاه $\alpha\neq 0$، $(\alpha|\alpha)>0$.

مشاهده می‌شود که شرایط (الف)، (ب) و (پ) ایجاب می‌کنند که

(ث) $(\alpha|c\beta+\gamma)=\bar{c}(\alpha|\beta)+(\alpha|\gamma)$.

نکتهٔ دیگری را هم باید خاطرنشان‌کنیم. وقتی $F$ هیأت اعداد حقیقی $R$ باشد، مزدوجهای مختلطی‌که در (پ) و (ث) ظاهر می‌شوند، غیر ضرور هستند؛ اما، درحالت مختلط برای سازگاری شرایط لازم می‌باشند. بدون این مزدوجهای مختلط، با تناقض ذیل مواجه خواهیم شد:

$$(\alpha|\alpha)>0 \quad \text{و} \quad (i\alpha|i\alpha)=-1(\alpha|\alpha)>0 .$$

در مثالهایی که درذیل می‌آیند، ونیزدرسراسراین فصل، $F$ یا هیأت اعداد حقیقی است یا هیأت اعداد مختلط.

**مثال ۱.** روی $F^n$ ضربی داخلی وجود دارد که ما آن را **ضرب داخلی استانده** می‌نامیم. این داخلی روی $\alpha=(x_1, \dots, x_n)$ و $\beta=(y_1, \dots, y_n)$ با

$$(\alpha|\beta)=\sum_j x_j\bar{y}_j \tag{۸-۱}$$

تعریف می‌شود. وقتی‌که $F=R$ این قاعده را می‌توان به‌صورت

$$(\alpha|\beta)=\sum_j x_jy_j$$

نیز نوشت. ضرب داخلی استانده در حالت حقیقی غالباً ضرب نقطه‌ای یا اسکالری نامیده و توسط $\alpha\cdot\beta$ نشان داده می‌شود.

**مثال ۲.** به‌ازای $\alpha=(x_1, x_2)$ و $\beta=(y_1, y_2)$ در $R^2$، فرض کنیم

$$(\alpha|\beta)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2.$$

چون $(\alpha|\alpha)=(x_1-x_2)^2+3x_2^2$، نتیجه می‌شود که اگر $\alpha\neq 0$، $(\alpha|\alpha)>0$. شرایط (الف)، (ب)، و (پ) تعریف نیز بسادگی نشان داده می‌شوند.

**مثال ۳.** فرض کنیم $V$ فضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی $F$، یعنی $F^{n\times n}$، باشد. در این صورت $V$ به‌طریقی طبیعی با $F^{n^2}$ یکریخت است. بنابراین، ازمثال ۱ نتیجه‌می‌شود که معادله

$$(A|B)=\sum_{j,k}A_{jk}\bar{B}_{jk}$$

ضربی داخلی روی $V$ تعریف می‌کند. بعلاوه، اگر ماتریس **ترانهادهٔ مزدوج** $B^*$ راکه در آن $B^*_{kj}=\bar{B}_{jk}$، معرفی کنیم، می‌توانیم این ضرب داخلی روی $F^{n\times n}$ را برحسب تابع رد نیز بیان کنیم:

$$(A|B)=\operatorname{tr}(AB^*)=\operatorname{tr}(B^*A)$$

زیرا

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB^*)&=\sum_j(AB^*)_{jj}\\&=\sum_j\sum_k A_{jk}B^*_{kj}\\&=\sum_j\sum_k A_{jk}\bar{B}_{jk}.\end{aligned}$$

**مثال ۴.** گیریم $F^{n\times 1}$ فضای ماتریسهای (ستونی) $n\times 1$ برروی $F$ و $Q$ یک ماتریس معکوس‌پذیر $n\times n$ برروی $F$ باشد. به‌ازای $X$ و $Y$ در $F^{n\times 1}$ می‌نویسیم

$$(X|Y)=Y^*Q^*QX.$$

در اینجا ماتریس $1\times 1$ سمت راست را با تك درایهٔ آن یکی گرفته‌ایم. هنگامی که $Q$ ماتریس همانی باشد، این ضرب داخلی اساساً با ضرب داخلی در مثال ۱ یکی است؛ ما این ضرب داخلی را **ضرب داخلی استانده** روی $F^{n\times 1}$ می‌نامیم. خواننده باید متوجه‌باشد که اصطلاح «ضرب داخلی استانده» در دو زمینهٔ خاص به‌کارمی‌رود. برای یك فضای برداری با بعد متناهی دلخواه برروی $F$، ضرب داخلی آشکاری که بتوان آن را استانده نامید وجود ندارد.

**مثال ۵.** گیریم $V$ فضای برداری همهٔ توابع مختلط پیوسته روی فاصلهٔ یکهٔ $0\leqslant t\leqslant 1$ باشد. فرض کنیم

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

احتمالاً خواننده با فضای توابع پیوستهٔ حقیقی روی فاصلهٔ یکه بیشتر آشنا باشد. برای چنین فضایی علامت مزدوج مختلط روی $g$ باید حذف گردد.

**مثال ۶.** این مثال درواقع رده‌ای است از مثالها. با روش زیر از ضرب داخلی مفروضی می‌توان ضربهای داخلی جدیدی به‌وجود آورد. $V$ و $W$ را فضاهایی برداری برروی $F$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(\ |\ )$ ضربی داخلی روی $W$ باشد. اگر $T$ تبدیل خطی نامنفردی از $V$ در $W$ باشد، آنگاه معادلهٔ

$$p_T(\alpha,\beta)=(T\alpha|T\beta)$$

ضرب داخلی $p_T$ روی $V$ را تعریف می‌کند. ضرب داخلی درمثال ۴ حالت خاصی ازاین ضرب است. ضربهای داخلی ذیل نیز حالتهایی خاص ازآن هستند.

(الف) گیریم $V$ فضایی برداری با بعد متناهی و

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد. $\epsilon_1$، $\cdots$، $\epsilon_n$ را بردارهای پایهٔ استانده $F^n$؛ و $T$ را تبدیل خطی از $V$ در $F^n$ می‌گیریم که $T\alpha_j=\epsilon_j$، $j=1,\ \cdots,\ n$. به‌عبارت دیگر، $T$ را یکریختی «طبیعی» از $V$ بروی $F^n$ که توسط $\mathcal{B}$ تعیین می‌شود می گیریم. اگرضرب داخلی استانده روی $F^n$ را اتخاذکنیم، آنگاه

$$p_T\Big(\sum_j x_j\alpha_j,\ \sum_k y_k\alpha_k\Big)=\sum_{j=1}^n x_j\bar{y}_j\ .$$

پس، به‌ازای هرپایهٔ $V$، ضربی داخلی روی $V$ با این خاصیت که $(\alpha_j|\alpha_k)=\delta_{jk}$ وجود دارد؛ درواقع، بسادگی می‌توان نشان داد که تنها یك ضرب داخلی از این نوع وجود دارد. بعداً نشان خواهیم دادکه هرضرب داخلی روی $V$، توسط پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ و به‌طریق بالا تعیین می‌شود.

(ب) دوباره به‌مثال ۵ برمی گردیم و فرض می کنیم که $V=W$. با این فرض که $W$ فضای توابع پیوسته روی فاصلهٔ یکه باشد، $T$ را عملگر خطی «ضرب در $t$»، یعنی $(Tf)(t)=tf(t)$، $0\leqslant t\leqslant 1$،می گیریم. بآسانی دیده می‌شود که $T$خطی‌است.همچنین $T$ نامنفرد است؛ زیرا فرض کنیم $Tf=0$. دراین صورت به‌ازای $0\leqslant t\leqslant 1$، $tf(t)=0$؛ از این‌رو، به‌ازای $t>0$، $f(t)=0$. چون $f$ پیوسته است، همچنین‌داریم $f(0)=0$ یا $f=0$. حال با استفاده ازضرب داخلی مثال ۵ ضرب داخلی جدیدی با قراردادن

$$p_T(f,g)=\int_0^1 (Tf)(t)\overline{(Tg)(t)}\,dt$$
$$=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}t^2\,dt$$

روی $V$ بنا می‌کنیم.

اکنون به‌چند مشاهدهٔ عمومی دربارهٔ ضربهای داخلی می‌پردازیم. فرض‌کنیم $V$ یك فضای برداری مختلط با ضربی داخلی باشد. دراین صورت به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$،

$$(\alpha|\beta)=\mathrm{Re}(\alpha|\beta)+i\,Im(\alpha|\beta)$$

که در آن $\mathrm{Re}(\alpha|\beta)$ و $Im(\alpha|\beta)$ اجزای حقیقی و موهومی عدد مختلط $(\alpha|\beta)$ هستند. اگر $z$ عددی مختلط باشد، آنگاه $Im(z)=\mathrm{Re}(-iz)$. نتیجه اینکه

$$Im(\alpha|\beta)=\mathrm{Re}[-i(\alpha|\beta)]=\mathrm{Re}(\alpha|i\beta).$$

پس، ضرب داخلی به‌طورکامل توسط «جزء حقیقی»اش طبق

$$(\alpha|\beta)=\mathrm{Re}(\alpha|\beta)+i\mathrm{Re}(\alpha|i\beta) \qquad (۲\text{-}۸)$$

تعیین می‌شود.

گاهی بسی مفید است بدانیم که هرضرب داخلی روی یك فضای برداری حقیقی یا مختلط، توسط تابع دیگری موسوم به‌فرم درجهٔ دوم تعیین شده توسط آن ضرب داخلی هم تعیین می‌شود. برای تعریف آن، ابتدا ریشهٔ دوم مثبت $(\alpha|\alpha)$ را با $\|\alpha\|$ نشان می‌دهیم؛ $\|\alpha\|$، **نرم** $\alpha$ نسبت به‌ضرب داخلی نامیده می‌شود. با مشاهدهٔ ضربهای داخلی استاندهٔ در $R^1$، $C^1$، $R^2$، و $R^3$، خواننده باید بتواند خود را متقاعد سازد که تصور نرم $\alpha$ به‌عنوان «طول» یا «اندازه» $\alpha$ بیجا نیست. **فرم درجهٔ دوم** تعیین شده توسط ضرب داخلی عبارت است از تابعی که به‌هر بردار $\alpha$ اسکالر $\|\alpha\|^2$ را اختصاص می‌دهد. از خواص ضرب داخلی چنین نتیجه می‌شود که به‌ازای هر بردار $\alpha$ و $\beta$،

$$\|\alpha\pm\beta\|^2=\|\alpha\|^2\pm 2\,\mathrm{Re}(\alpha|\beta)+\|\beta\|^2.$$

پس، درحالت حقیقی

$$(\alpha|\beta)=\frac{1}{4}\|\alpha+\beta\|^2-\frac{1}{4}\|\alpha-\beta\|^2. \qquad (۳\text{-}۸)$$

درحالت مختلط، (۸-۲) را به‌کار می‌بریم وعبارت پیچیده‌تر

$$(\alpha|\beta)=\frac{1}{4}\|\alpha+\beta\|^2-\frac{1}{4}\|\alpha-\beta\|^2+\frac{i}{4}\|\alpha+i\beta\|^2-\frac{i}{4}\|\alpha-i\beta\|^2 \quad (۴\text{-}۸)$$

را به‌دست می‌آوریم. معادلات (۸-۳) و (۸-۴)، **اتحادهای قطبی** نامیده می‌شوند. توجه

کنید که (۸-۴) می‌تواند به‌صورت ذیل نیز نوشته شود:

$$(\alpha|\beta)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n\|\alpha+i^n\beta\|^2.$$

خواصی که در بالا به‌دست آمدند برای هر ضرب داخلی روی هرفضای برداری حقیقی یا مختلط $V$، بدون توجه به‌بعد، برقرارند. اکنون به‌حالتی که در آن $V$ با بعد متناهی است، بازمی‌گردیم. همان‌طور که ممکن است حدس زده شود، یك ضرب داخلی روی یك فضای با بعد متناهی، همواره می‌تواند برحسب پایه‌ای مرتب با یك ماتریس توصیف شود.

فرض کنیم بعد $V$ متناهی و

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد و نیز ضرب داخلی خاصی روی $V$ داده شده باشد؛ نشان‌خواهیم داد که این ضرب داخلی به‌طورکامل توسط مقادیر

$$G_{jk}=(\alpha_k|\alpha_j) \tag{۸-۵}$$

که به‌جفت بردارهای $\mathcal{B}$ تعلق می‌گیرد، تعیین می‌شود. اگر $\alpha=\sum\limits_k x_k\alpha_k$ و $\beta=\sum\limits_j y_j\alpha_j$، آنگاه

$$\begin{aligned}(\alpha|\beta)&=(\sum_k x_k\alpha_k|\beta)\\ &=\sum_k x_k(\alpha_k|\beta)\\ &=\sum_k x_k\sum_j \bar{y}_j(\alpha_k|\alpha_j)\\ &=\sum_{j,k}\bar{y}_jG_{jk}x_k\\ &=Y^*GX.\end{aligned}$$

دراینجا $X$ و $Y$ ماتریسهای مختصات $\alpha$ و $\beta$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$، و $G$ ماتریس با درایه‌های $G_{jk}=(\alpha_k|\alpha_j)$ است. $G$ را **ماتریس ضرب داخلی درپایهٔ مرتب** $\mathcal{B}$ می‌نامیم. از (۸-۵) نتیجه می‌شود که $G$ هرمیتی است؛ یعنی، $G=G^*$؛ اما $G$ نوع نسبتاً خاصی از ماتریسهای هرمیتی است. زیرا $G$ باید در شرط اضافی

$$X^*GX>0 \quad ،X\neq 0 \tag{۸-۶}$$

نیز صدق کند. بخصوص، $G$ باید معکوس‌پذیر باشد. زیرا، درغیراین صورت یك $X\neq 0$ وجود دارد که $GX=0$ وبه‌ازای چنین $X$ی (۸-۶) غیرممکن است. به‌طور صریحتر، (۸-۶) حاکی است که به‌ازای همهٔ اسکالرهایی چون $x_1$، $\cdots$، $x_n$ که دست‌کم یکی از

آنها صفر نباشد

$$\sum_{j,k} \bar{x}_j G_{jk} x_k > 0. \qquad (۸-۷)$$

از این مطلب بلافاصله می‌بینیم که همهٔ درایه‌های قطری $G$ باید مثبت باشند؛ با این وجود، برای اطمینان از درستی (۸-۶) این شرط روی درایه‌های قطـری به‌هیچ‌وجه کافی نیست. شرایط کافی برای درستی (۸-۶) بعداً ارائه خواهند شد.

روند بالا وارونه‌پذیر است؛ بدین‌معنی که اگر $G$ ماتریسی $n \times n$ روی $F$ باشد که در (۸-۶) و شرط $G = G^*$ صدق کند، آنگاه $G$ ماتریس یك ضرب داخلی روی $V$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ است. این ضرب داخلی با معادلهٔ

$$(\alpha|\beta) = Y^* G X$$

که در آن $X$ و $Y$ ماتریسهای مختصات $\alpha$ و $\beta$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هستند تعیین می‌شود.

## تمرین

۱. فرض کنید $V$ فضایی برداری و $(\ |\ )$ ضربی داخلی روی $V$ باشد.

(الف) نشان دهید به‌ازای هر $\beta$ در $V$، $(0|\beta) = 0$.

(ب) نشان دهید که اگر به‌ازای هر $\beta$ در $V$، $(\alpha|\beta) = 0$ آنگاه $\alpha = 0$.

۲. فرض کنید $V$ فضایی برداری برروی $F$ باشد. نشان دهیـد مجموع دوضرب داخلـی روی $V$، ضربی داخلی روی $V$ است. آیا تفاضل دوضرب داخلی هم یك ضرب داخلی است؟ نشان دهید که مضربی مثبت از یك ضرب داخلی، ضربی داخلی است.

۳. همهٔ ضربهای داخلی روی $R^1$ و روی $C^1$ را به‌طور صریح تشریح کنید.

۴. نشان دهید که ضرب داخلی استانده روی $F^n$ ضربی داخلی است.

۵. $(\ |\ )$ را ضرب داخلی استانده روی $R^2$ بگیرید.

(الف) فـرض کنید $\alpha = (1, 2)$ و $\beta = (-1, 1)$. اگـر $\gamma$ برداری باشد کـه $(\alpha|\gamma) = -1$ و $(\beta|\gamma) = 3$، $\gamma$ را بیابید.

(ب) نشان دهید که به‌ازای هر $\alpha$ در $R^2$ داریم $\alpha = (\alpha|\epsilon_1)\epsilon_1 + (\alpha|\epsilon_2)\epsilon_2$.

۶. $(\ |\ )$ را ضرب داخلی استانده روی $R^2$ و $T$ را عملگر خطی

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

بگیرید. $T$ «دوران به‌اندازهٔ $90°$» است واین خاصیت را دارد کـه به‌ازای هر $\alpha$ در $R^2$، $(\alpha|T\alpha) = 0$. همـهٔ ضربهای داخلـی $[\ |\ ]$ روی $R^2$ راکـه به‌ازای هـر $\alpha$، $[\alpha|T\alpha] = 0$ بیابید.

۷. $(\ |\ )$ را ضرب داخلی استانده روی $C^2$ بگیرید و ثابت کنید که هیچ عملگر خطی غیرصفری روی $C^2$ وجود ندارد که به‌ازای هر $\alpha$ در $C^2$، $(\alpha|T\alpha)=0$. این مطلب را تعمیم دهید.

۸. فرض کنید $A$ ماتریسی $2\times 2$ با درایه‌های حقیقی باشد. به ازای $X$ و $Y$ در $R^{2\times 1}$ فرض کنید

$$f_A(X, Y)=Y^t AX.$$

نشان‌دهید $f_A$ ضربی داخلی روی $R^{2\times 1}$ است اگر وتنها اگر $A=A^t$، $A_{11}>0$، $A_{22}>0$، و $\det A>0$.

۹. فرض کنید $V$ یك فضای برداری حقیقی یا مختلط با ضربی داخلی باشد. نشان دهید که فرم درجهٔ دوم تعیین شده توسط ضرب داخلی در **قانون متوازی‌الاضلاع**

$$||\alpha+\beta||^2+||\alpha-\beta||^2=2||\alpha||^2+2||\beta||^2$$

صدق می‌کند.

۱۰. فرض کنید $(\ |\ )$ ضرب داخلی روی $R^2$ باشد که در مثال ۲ تعریف شد و $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتب استانده برای $R^2$ باشد. ماتریس این ضرب داخلی را نسبت به $\mathcal{B}$ بیابید.

۱۱. نشان دهید که فرمول

$$(\sum_j a_j x^j|\sum_k b_k x^k)=\sum_{j,k}\frac{a_j b_k}{j+k+1}$$

ضربی داخلی روی فضای $R[x]$، چندجمله‌ایهای بر روی هیأت $R$، تعریف می‌کند. $W$ را زیرفضای متشکل از چندجمله‌ایهای از درجهٔ کمتر ازیا برابر با $n$ بگیرید. ضرب داخلی مذکور را به $W$ محدود کنید و ماتریس این ضرب داخلی روی $W$ را نسبت به‌پایهٔ مرتب $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ بیابید. (راهنمایی: برای‌اینکه نشان دهید این فرمول یك ضرب داخلی تعریف می‌کند، مشاهده کنید که

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

و روی این انتگرال کار کنید.)

۱۲. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. فرض کنید $(\ |\ )$ ضربی داخلی روی $V$ باشد. اگر $c_1$، $\dots$، و $c_n$، $n$ اسکالر دلخواه باشند، نشان دهید دقیقاً یك بردار چون $\alpha$ در $V$ وجود دارد که $(\alpha|\alpha_j)=c_j$، $j=1, \dots, n$.

۱۳. فرض کنید $V$ یك فضای برداری مختلط باشد. تابعی چون $J$ از $V$ در $V$ یك **تزویج** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر اسکالر $c$ و هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$،

$$J(\alpha+\beta)=J(\alpha)+J(\beta)\text{، } J(c\alpha)=\bar{c}J(\alpha) \text{ و } J(J(\alpha))=\alpha.$$

اگر $J$ یك تزویج باشد، نشان دهید

(الف) مجموعهٔ $W$ متشکل از همهٔ $\alpha$های در $V$ با ویژگی $J\alpha=\alpha$ نسبت به‌عملهای تعریف شده در $V$ یك فضای برداری برروی $R$ است.

(ب) به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، بردارهای یکتایی چون $\beta$ و $\gamma$ در $W$ وجود دارند که $\alpha=\beta+i\gamma$.

۱۴. فرض کنید $V$ یـك فضای برداری مختلط و $W$ زیرمجموعه‌ای از $V$ با خواص ذیل باشد:

(الف) $W$ نسبت به‌عملهای تعریف شده در $V$، یك فضای برداری حقیقی است.

(ب) به ازای هر $\alpha$ در $V$، بردارهای یکتایی چون $\beta$ و $\gamma$ در $W$ وجود دارندکـه $\alpha=\beta+i\gamma$.

نشان دهید معادلهٔ $J\alpha=\beta-i\gamma$، یك تزویج روی $V$ تعریف می‌کند با این‌خاصیت که $J\alpha=\alpha$ اگروتنها اگر $\alpha$ متعلق به $W$ باشد؛ و نیـز نشان دهیدکه $J$ تنها تزویج روی $V$ با این خاصیت است.

۱۵. همهٔ تزویجهای روی $C^1$ و $C^2$ را بیابید.

۱۶. فرض کنید $W$ زیرفضایی حقیقی با بعد متناهی ازیك فضای برداری مختلط $V$ باشد. نشان دهیدکه $W$ در شرط (ب) از تمرین ۱۴ صدق می‌کند اگروتنها اگرهرپایهٔ $W$ پایه‌ای برای $V$ نیز باشد.

۱۷. فرض کنید $V$ یك فضای برداری مختلط، $J$ یك تزویج روی $V$، $W$ مجموعهٔ $\alpha$های در $V$ با ویژگی $J\alpha=\alpha$ و $f$ ضربی داخلی روی $W$ باشد. نشان دهید:

(الف) ضرب داخلی یکتایی چون $g$ روی $V$ وجود دارد که به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $W$، $g(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta)$.

(ب) به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $g(J\alpha,J\beta)=g(\beta,\alpha)$.

قسمت (الف) دربارهٔ رابطهٔ بیـن ضربهای داخلی استانده روی $R^1$ و $C^1$ یـا روی $R^n$ و $C^n$ چه می‌گوید؟

## ۸.۲. فضاهای ضرب داخلی

اکنون کـه ایده‌هایی دربارهٔ ضرب داخلی پیداکرده‌ایم، تـوجه خود را به‌آنچـه دربارهٔ

ترکیب یك فضای برداری و یـك ضرب داخلی خاص روی آن می‌تـوان گفت، معطوف می‌کنیم. بویژه، خواص بنیادی مفاهیم «طول» و «تعامد» را که به‌وسیلهٔ ضرب داخلی روی فضا تحمیل می‌شوند، به‌دست می‌آوریم.

**تعریف.** یك **فضای ضرب داخلی** عبارت است‌ازیك فضای برداری حقیقی یامختلط همراه با ضرب داخلی مشخصی روی آن فضا.

یك فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی، غالباً یك **فضای اقلیدسی** هم نامیده می‌شود. از یـك فضای ضـرب داخلی مختلط، بیشتر به‌عنوان یـك **فضای یکانی** نام برده می‌شود.

قضیهٔ ۱. اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به‌ازای هـردو بردار $\alpha$ و $\beta$ در $V$ و هراسکالر $c$

(۱) $\|c\alpha\| = |c|\,\|\alpha\|$؛

(۲) به‌ازای $\alpha \neq 0$، $\|\alpha\| > 0$؛

(۳) $|(\alpha|\beta)| \leqslant \|\alpha\|\,\|\beta\|$؛

(۴) $\|\alpha+\beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|$.

اثبات. احکام (۱) و(۲) تقریباً بلافاصله از تعاریف گوناگون مربوط نتیجه می‌شوند. وقتی $\alpha = 0$ نامساوی (۳) بوضوح درست است. اگر $\alpha \neq 0$، می‌نویسیم

$$\gamma = \beta - \frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha \cdot$$

دراین صورت $(\gamma|\alpha) = 0$ و

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|\gamma\|^2 &= \left(\beta - \frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha \,\middle|\, \beta - \frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha\right) \\ &= (\beta|\beta) - \frac{(\beta|\alpha)(\alpha|\beta)}{\|\alpha\|^2} \\ &= \|\beta\|^2 - \frac{|(\alpha|\beta)|^2}{\|\alpha\|^2}. \end{aligned}$$

از این‌رو، $|(\alpha|\beta)|^2 \leqslant \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$. حال با استفاده از (۳) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|\alpha+\beta\|^2 &= \|\alpha\|^2 + (\alpha|\beta) + (\beta|\alpha) + \|\beta\|^2 \\ &= \|\alpha\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha|\beta) + \|\beta\|^2 \\ &\leqslant \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\|\,\|\beta\| + \|\beta\|^2 \\ &= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2. \end{aligned}$$

پس، $\|\alpha+\beta\| \leqslant \|\alpha\|+\|\beta\|$. □

نامساوی (۳)، **نامساوی کوشی-شوارتز**[1] نامیده می‌شود. این نامساوی کاربردهای گوناگون فراوانی دارد. اثبات نشان می‌دهد که اگر (مثلاً) $\alpha$ غیر صفر باشد، آنگاه $|(\alpha|\beta)| < \|\alpha\|\,\|\beta\|$، مگر اینکه

$$\beta=\frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha\,.$$

بدین‌سان، در (۳) تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $\alpha$ و $\beta$ وابستهٔ خطی باشند.

**مثال ۷.** اگر نامساوی کوشی-دشوارتز را به ضربهای داخلی مفروض در مثالهای ۱، ۲، ۳، و ۵ به‌کار بندیم، نامساویهای ذیل را به‌دست می‌آوریم:

(الف) $\left|\sum x_k\bar{y}_k\right| \leqslant \left(\sum |x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum |y_k|^2\right)^{1/2}$

(ب) $|x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2|$
$\leqslant \left((x_1-x_2)^2+3x_2^2\right)^{1/2}\left((y_1-y_2)^2+3y_2^2\right)^{1/2}$

(پ) $|\operatorname{tr}(AB^*)| \leqslant (\operatorname{tr}(AA^*))^{1/2}(\operatorname{tr}(BB^*))^{1/2}$

(ت) $\left|\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx\right| \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$

**تعریف.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی از یك فضای ضرب داخلی $V$ باشند. دراین صورت $\alpha$ بر $\beta$ **متعامد** است هرگاه $(\alpha|\beta)=0$؛ چون این تساوی ایجاب می‌کند که $\beta$ نیز بر $\alpha$ متعامد باشد، اغلب فقط می‌گوییم که $\alpha$ و $\beta$ متعامدند. اگر $S$ مجموعه‌ای از بردارهای متعلق به $V$ باشد، $S$ یك **مجموعهٔ متعامد** نامیده می‌شود هرگاه همهٔ جفت‌بردارهای متمایز در $S$ متعامد باشند. یك **مجموعهٔ متعامد یکه** مجموعهٔ متعامدی چون $S$ است همراه با این خاصیت اضافی که به‌ازای هر $\alpha$ در $S$، $\|\alpha\|=1$.

بردار صفر برهمهٔ بردارهای $V$ متعامد است وتنها برداری است که این ویژگی را دارد. بجاست که یك مجموعهٔ متعامد یکه به‌عنوان مجموعه‌ای از بردارهای دوبه‌دو متعامد که همهٔ دارای طول ۱ باشند، تصور شود.

**مثال ۸.** پایهٔ استاندهٔ $R^n$ یا $C^n$ نسبت به‌ضرب داخلی استانده یك مجموعهٔ متعامد یکه است.

**مثال ۹.** بردار $(x, y)$ در $R^2$، نسبت به‌ضرب داخلی استانده بر $(-y, x)$ متعامد

---
1. Cauchy-Schwarz

www.riazisara.ir



است، زیرا

$$((x, y)|(-y, x)) = -xy + yx = ۰ .$$

اما، اگر $R^۲$ با ضرب داخلی مثال ۲ تجهیز شود، آنگاه $(x, y)$ و $(-y, x)$ متعامد خواهند بود اگر و تنها اگر

$$y = \frac{۱}{۲}(-۳ \pm \sqrt{۱۳})x .$$

**مثال ۱۰.** $V$ رافضای ماتریسهای $n \times n$ مختلط $C^{n\times n}$ و $E^{pq}$ راماتریسی می‌گیریم که تنها درایهٔ غیرصفرش یك ۱ در سطر $p$ وستون $q$ باشد. آنگاه مجموعهٔ همهٔ این‌چنین ماتریسهای $E^{pq}$، نسبت به‌ضرب داخلی مفروض درمثال ۳ متعامد یکه است. زیرا

$$(E^{pq}|E^{rs}) = \operatorname{tr}(E^{pq}E^{sr}) = \delta_{qs} \operatorname{tr}(E^{pr}) = \delta_{qs}\delta_{pr}.$$

**مثال ۱۱.** گیریم $V$ فضای توابع مختلط (یاحقیقی) پیوسته روی فاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_۰^۱ f(x)\overline{g(x)}dx$$

باشد. فرض کنیم $f_n(x) = \sqrt{۲}\cos ۲\pi nx$ و $g_n(x) = \sqrt{۲}\sin ۲\pi nx$. دراین‌صورت $\{۱, f_۱, g_۱, f_۲, g_۲, \ldots\}$ یك مجموعهٔ متعامد یکهٔ نامتناهی است. درحالت‌مختلط، می‌توانیم ترکیبات خطی

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}(f_n + ig_n), \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

را نیز تشکیل دهیم. بدین‌طریق، مجموعهٔ متعامد یکهٔ جدیدی چون $S$ متشکل ازهمهٔ‌توابع به‌صورت

$$h_n(x) = e^{۲\pi inx}, \qquad n = \pm۱, \pm۲, \ldots$$

را به‌دست می‌آوریم. مجموعهٔ $S'$ حاصل ازالحاق تابع ثابت ۱ به $S$ نیزمتعامد یکه‌است. دراینجا فرض می‌کنیم خواننده با محاسبهٔ انتگرالهای مورد بحث آشنایی داشته باشد.

مجموعه‌های متعامد یکهٔ ارائه شده درمثالهای بالاهمگی مستقل خطی هستند. اکنون نشان می‌دهیم که همواره چنین است.

**قضیهٔ ۲.** هرمجموعهٔ متعامد از بردارهای غیرصفر، مستقل خطی است.

اثبات. گیریم $S$ مجموعه‌ای متعامد متناهی یا نامتناهی از بردارهای غیرصفرفضای ضرب داخلی مفروضی باشد. فرض‌کنیم $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، $\alpha_m$ بردارهای متمایزی از $S$

باشند، و

$$\beta = c_۱\alpha_۱ + c_۲\alpha_۲ + \cdots + c_m\alpha_m.$$

دراین صورت

$$\begin{aligned}(\beta|\alpha_k) &= (\sum_j c_j\alpha_j|\alpha_k)\\ &= \sum_j c_j(\alpha_j|\alpha_k)\\ &= c_k(\alpha_k|\alpha_k).\end{aligned}$$

چون $(\alpha_k|\alpha_k) \neq ۰$، نتیجه می‌شود که

$$c_k = \frac{(\beta|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^۲}, \quad ۱ \leqslant k \leqslant m.$$

پس وقتی‌که $\beta = ۰$، به‌ازای هر $k$، $c_k = ۰$؛ بنابراین، $S$ مجموعه‌ای مستقل است. □

**نتیجه.** اگر برداری چون $\beta$، ترکیبی خطی از یك دنبالهٔ متعامد از بردارهای غیرصفر $\alpha_۱$، ...، $\alpha_m$ باشد، آنگاه $\beta$ عبارت است از ترکیب خطی خاص

$$\beta = \sum_{k=۱}^{m} \frac{(\beta|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^۲}\alpha_k.$$

این نتیجه ازاثبات قضیه منتج می‌شود. نتیجهٔ دیگری هم‌هست که گرچه بدیهی‌است، ولی ذکرش لازم است. اگر $\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_m\}$ مجموعهٔ متعامدی از بردارهای غیرصفر یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی $V$ باشد، آنگاه $m \leqslant \dim V$. این مطلب حاکی است‌که تعداد جهتهای دوبه‌دو عمود برهم در $V$، نمی‌تواند از بعد جبری $V$ تجاوز کند. تعداد ماکزیمم جهتهای دو به‌دو عمود برهم در $V$، عددی است‌که می‌تواند با درك مستقیم وبه‌طور حسی به‌عنوان بعد هندسی $V$ محسوب شود، وقریباً دیدیم‌که این بعد ازبعدجبری بیشتر نیست. این واقعیت‌که این دوبعد برابرهستند، نتیجه‌ای خاص ازقضیهٔ بعدی است.

**قضیهٔ ۳.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی و $\beta_۱$، ...، $\beta_n$ بردارهایی مستقل از $V$ باشند. دراین صورت می‌توان بردارهای متعامدی چون $\alpha_۱$، ...، $\alpha_n$ را چنان در $V$ ساخت که به‌ازای هر $k = ۱, ۲, \cdots, n$، مجموعهٔ

$$\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_k\}$$

پایه‌ای برای زیرفضای پدید آمده توسط $\beta_۱$، ...، $\beta_k$ باشد.

اثبات. بردارهای $\alpha_۱, \cdots, \alpha_n$ با ساختمانی معروف به **فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت**[1]، به دست خواهندآمد. ابتدا می‌گیریم $\alpha_۱ = \beta_۱$، سپس بردارهای دیگر به‌طور

1. Gram-Schmidt

استقرایی به صورت زیر به دست می‌آیند: فرض کنیم $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ $(1 \leqslant m < n)$ طوری انتخاب شده باشند که به ازای هر $k$،

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \ , \ 1 \leqslant k \leqslant m$$

پایهٔ متعامدی برای زیرفضای $V$ پدید آمده توسط $\beta_1, \dots, \beta_k$ باشد. برای ساختن بردار بعدی یعنی، $\alpha_{m+1}$ ، قرارمی‌دهیم:

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta_{m+1}|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k \ . \qquad (۸-۹)$$

آنگاه $\alpha_{m+1} \neq 0$. زیرا درغیراین‌صورت $\beta_{m+1}$ ترکیبی خطی از $\alpha_1, \dots, \alpha_m$، و ازاین رو ترکیبی خطی از $\beta_1, \dots, \beta_m$ است. بعلاوه، اگر $1 \leqslant j \leqslant m$، آنگاه

$$\begin{aligned}(\alpha_{m+1}|\alpha_j) &= (\beta_{m+1}|\alpha_j) - \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta_{m+1}|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}(\alpha_k|\alpha_j) \\ &= (\beta_{m+1}|\alpha_j) - (\beta_{m+1}|\alpha_j) \\ &= 0 .\end{aligned}$$

بنابراین، $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}\}$ مجموعهٔ متعامدی متشکل از $m+1$ بردار غیرصفر از زیرفضای پدید آمده توسط $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ است. بنابرقضیهٔ ۲، این مجموعه پایه‌ای برای این زیرفضاست. پس بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ یکی پس از دیگری، طبق (۸-۹)می‌توانند ساخته شوند. بخصوص، وقتی که $n = 4$ ، داریم

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2 &= \beta_2 - \frac{(\beta_2|\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1 \\ \alpha_3 &= \beta_3 - \frac{(\beta_3|\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1 - \frac{(\beta_3|\alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2}\alpha_2 \qquad (۸-۱۰) \\ \alpha_4 &= \beta_4 - \frac{(\beta_4|\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1 - \frac{(\beta_4|\alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2}\alpha_2 - \frac{(\beta_4|\alpha_3)}{\|\alpha_3\|^2}\alpha_3 . \ \square\end{aligned}$$

**نتیجه.** هرفضای ضرب داخلی با بعد متناهی دارای یك پایهٔ متعامد یکه است.

**اثبات.** $V$ را یك‌فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را پایه‌ای برای $V$ می‌گیریم. فرایند گرام–اشمیت را به‌کار می‌بندیم وپایهٔ متعامد $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را مـی‌سازیم . آنگاه برای بـه دست آوردن یك پایهٔ متعامدیکه، بـه جای هـر بردار $\alpha_k$ بردار $\alpha_k/\|\alpha_k\|$ را قرار می‌دهیم. $\square$

یکی از مزایای عمده‌ای که پایه‌های متعامد یکه بر پایه‌های دلخواه دارند این است که در آنها محاسبات مربوط به‌مختصات ساده‌ترهستند. برای این که کلاً نشان دهیم که چرا این مطلب درست است، فرض می‌کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. آنگاه، مانند بخش قبل، می‌توانیم معادلهٔ (۸ـ۵) را برای وابسته‌کردن ماتریسی چون $G$ به هرپایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از $V$، به‌کار ببریم. با استفاده از این ماتریس که در آن

$$G_{jk}=(\alpha_k|\alpha_j)$$

می‌توانیم ضربهای داخلی را بر حسب مختصات محاسبه کنیم. اگر $\mathcal{B}$ یك پایهٔ متعامد یکه باشد، آنگاه $G$ ماتریس همانی است وبه ازای همهٔ اسکالرهای $x_j$ و $y_k$

$$\left(\sum_j x_j\alpha_j \middle| \sum_k y_k\alpha_k\right)=\sum_j x_j\bar{y}_j.$$

بدین‌گونه، برحسب یك پایهٔ متعامد یکه، ضرب داخلی در $V$ مثل ضرب داخلی استانده در $F^n$ به نظرمی‌رسد.

جالب است بدانیم که فرایندگرام ـ اشمیت می‌تواند برای آزمایش وابستگی خطی نیزمورد استفاده قرارگیرد؛ هرچند این‌کاربرد درمحاسبات مختلف دارای استفاده‌های عملی محدودی است. زیرا، فرض کنیم $\beta_1, \dots, \beta_n$ بردارهایی وابستهٔ خطی در یك فضای ضرب‌داخلی $V$ باشند. برای اینکه‌حالتی بدیهی را مستثنی‌کنیم، فرض می‌کنیم $\beta_1\neq 0$. $m$ را بزرگترین عدد صحیحی می‌گیریم که به ازای آن $\beta_1, \dots, \beta_m$ مستقل باشند. در این صورت $1\leqslant m<n$. $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ را بردارهای حاصل از به‌کاربستن فرایند متعامدسازی به $\beta_1, \dots, \beta_m$ فرض می‌کنیم. در این صورت بردار $\alpha_{m+1}$ حاصل از (۸ـ۹)، لزوماً $0$ است. چرا که $\alpha_{m+1}$ در زیر فضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ قرار دارد و بر هریك ازاین بردارها عمود است، از این رو، بنابر (۸ـ۸)، برابر $0$ می‌باشد. بعکس، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ مخالف $0$ باشندو $\alpha_{m+1}=0$، آنگاه $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ وابسته خطی هستند.

**مثال ۱۲.** بردارهای

$$\beta_1=(3,0,4)$$

$$\beta_2=(-1,0,7)$$

$$\beta_3=(2,9,11)$$

در $R^3$، مجهز به‌ضرب‌داخلی استانده را درنظرمی‌گیریم. با به‌کاربستن فرایندگرام‌ـ‌اشمیت به $\beta_1$، $\beta_2$، $\beta_3$ بردارهای زیربه دست می‌آیند.

$$\alpha_1=(3,0,4)$$

$$\alpha_2=(-1,0,7)-\frac{((-1,0,7)|(3,0,4))}{25}(3,0,4)$$
$$=(-1,0,7)-(3,0,4)$$
$$=(-4,0,3)$$

$$\alpha_3=(2,9,11)-\frac{((2,9,11)|(3,0,4))}{25}(3,0,4)-\frac{((2,9,11)|(-4,0,3))}{25}(-4,0,3)$$
$$=(2,9,11)-2(3,0,4)-(-4,0,3)$$
$$=(0,9,0).$$

بدیهی است که این بردارها غیرصفر هستند و دو به دو برهم متعامد. ازاین‌رو، $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ پایهٔ متعامدی برای $R^3$ است. برای بیان یك بردار دلخواه $(x_1,x_2,x_3)$ در $R^3$ به‌صورت ترکیبی خطی از $\alpha_1$، $\alpha_2$، $\alpha_3$ لزومی به حل هیچ معادلهٔ خطی نیست؛ زیرا، کافی است (۸ــ۸) به‌کار بسته شود. پس، بسادگی نشان داده می‌شود که

$$(x_1,x_2,x_3)=\frac{3x_1+4x_3}{25}\alpha_1+\frac{-4x_1+3x_3}{25}\alpha_2+\frac{x_2}{9}\alpha_3.$$

بخصوص،

$$(1,2,3)=\frac{3}{5}(3,0,4)+\frac{1}{5}(-4,0,3)+\frac{2}{9}(0,9,0).$$

آنچه را که نشان داده‌ایم به عبارتی دیگر چنین است: پایهٔ $\{f_1,f_2,f_3\}$ از $(R^3)^*$ که دوگان پایهٔ $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ است، به‌طورصریح طبق معادلات

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{3x_1+4x_3}{25}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{-4x_1+3x_3}{25}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_2}{9}$$

تعریف می‌شود. این معادلات می‌توانند به صورت کلیتر

$$f_j(x_1,x_2,x_3)=\frac{((x_1,x_2,x_3)|\alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2}$$

نیز نوشته شوند. سرانجام، توجه کنید که از $\alpha_1$،$\alpha_2$،$\alpha_3$ پایهٔ متعامد یکهٔ

$$\frac{1}{5}(3,0,4),\frac{1}{5}(-4,0,3),\ (0,1,0)$$

به دست می‌آید.

**مثال ۱۳.** فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و در آن $d$،$c$،$b$،$a$ اعداد مختلطی باشند. می‌نویسیم $\beta_1=(a,b)$، $\beta_2=(c,d)$ وفرض می‌کنیم $\beta_1\neq 0$. اگر فرایند متعامدسازی را با استفاده ازضرب داخلی استانده در$C^2$، روی $\beta_1$و$\beta_2$ به‌کار بندیم، بردارهای زیر را به دست می‌آوریم:

$$\alpha_1=(a,b)$$

$$\alpha_2=(c,d)-\frac{((c,d)|(a,b))}{|a|^2+|b|^2}(a,b)$$

$$=(c,d)-\frac{(c\bar{a}+d\bar{b})}{|a|^2+|b|^2}(a,b)$$

$$=\left(\frac{cb\bar{b}-d\bar{b}a}{|a|^2+|b|^2},\frac{d\bar{a}a-c\bar{a}b}{|a|^2+|b|^2}\right)$$

$$=\frac{\det A}{|a|^2+|b|^2}(-\bar{b},\bar{a}).$$

حال نظریهٔ عمومی حاکی است که $\alpha_2\neq 0$ اگر وتنها اگر $\beta_1$و$\beta_2$ مستقل خطی باشند. از طرف دیگر، فرمول $\alpha_2$ نشان می‌دهد که این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر $\det A\neq 0$.

دراصل، فرایند گرام-اشمیت متشکل از کاربستهای مکرر یك عمل هندسی بنیادی موسوم به تصویر متعامد است، وازاین دیدگاه است که به بهترین وجه مفهوم می‌شود. روش تصویر متعامد، به طور طبیعی درحل یك مسئلهٔ مهم تقریب نیز پیش می‌آید.

فرض کنیم $W$ زیرفضایی ازیك فضای ضرب داخلی $V$ باشد و $\beta$ بردار دلخواهی از $V$. مسئله عبارت است ازیافتن بهترین تقریب ممکن برای $\beta$ توسط بردارهای $W$. این مطلب بدین معنی است که می‌خواهیم برداری چون $\alpha$ را بیابیم که به ازای آن

$\|\beta-\alpha\|$ تا حد ممکن کوچك باشد، منوط به این محدودیت که $\alpha$ به $W$ تعلق داشته‌باشد. حال گفتهٔ خویش را دقیقتر بیان کنیم.

یك **بهترین تقریب** برای $\beta$ توسط بردارهای $W$ برداری است مانند $\alpha$ در $W$ که به ازای هر بردار $\gamma$ در $W$

$$\|\beta-\alpha\| \leqslant \|\beta-\gamma\|.$$

با توجه به همین مسئله در $R^۲$ یا در $R^۳$ ، به‌طور شهودی درمی‌یابیم که بهترین تقریب‌برای $\beta$ توسط بردارهای $W$ باید برداری چون $\alpha$ در $W$ باشد که $\beta-\alpha$ بر $W$ عمود باشد، و نیز اینکه باید دقیقاً یك چنین $\alpha$یی وجود داشته باشد. این ایده‌های شهودی برای زیر- فضاهای با بعد متناهی، ونیز برای برخی از، ولی نه‌همه، زیرفضاهای با بعد نامتناهی درست‌هستند. چون وضعیت دقیق بسیارپیچیده‌تر از آن است که بتواند دراینجا موردبحث قرارگیرد، تنها قضیهٔ زیررا اثبات می‌کنیم.

**قضیهٔ۴.** فرض کنیم $W$ زیر فضایی از یك فضای ضرب داخلی $V$ و $\beta$ برداری از $V$ باشد.

(۱) بردار $\alpha$ در $W$، یك بهترین تقریب برای $\beta$ توسط بردارهای $W$ است اگر وتنها اگر $\beta-\alpha$ بر هربردار $W$ عمود باشد.

(۲) اگر یك بهترین تقریب برای $\beta$ توسط بردار های $W$ وجود داشته باشد، یکتاست.

(۳) اگر $W$ با بعد متناهی و $\{\alpha_۱,\ldots,\alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای $W$ باشد، آنگاه بردار

$$\alpha=\sum_k (\beta|\alpha_k)\alpha_k \qquad (۱۱-۸)$$

بهترین تقریب (یکتای) $\beta$ توسط بردارهای $W$ است.

اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر $\gamma$ برداری دلخواه در $V$ باشد، آنگاه $\beta-\gamma=(\beta-\alpha)+(\alpha-\gamma)$ و

$$\|\beta-\gamma\|^۲=\|\beta-\alpha\|^۲+۲\operatorname{Re}(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)+\|\alpha-\gamma\|^۲.$$

حال فرض کنیم $\beta-\alpha$ بر هربردار $W$ عمود باشد، $\gamma$ در $W$ باشد، و $\gamma\neq\alpha$ . در این صورت، چون $\alpha-\gamma$ در $W$ قراردارد، نتیجه می‌شود که

$$\|\beta-\gamma\|^۲=\|\beta-\alpha\|^۲+\|\alpha-\gamma\|^۲$$
$$>\|\beta-\alpha\|^۲.$$

بعکس، فرض کنیم به‌ازای هر $\gamma$ در $W$، $\|\beta-\gamma\| \geqslant \|\beta-\alpha\|$. آنگاه از اولین معادلهٔ بالا نتیجه می‌شود که به ازای هر $\gamma$ در $W$،

$$2\text{Re}(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)+\|\alpha-\gamma\|^2\geqslant 0.$$

چون هر بردار در $W$ می‌تواند بـه صورت $\alpha-\gamma$ ، به‌ازای $\gamma$ یـی در $W$ ، بیان شود، می‌بینیم که به ازای هر $\tau$ در $W$

$$2\text{Re}(\beta-\alpha|\tau)+\|\tau\|^2\geqslant 0.$$

بخصوص، اگر $\gamma$ در $W$ باشد و $\gamma\neq\alpha$ ، می‌توانیم داشته باشیم

$$\tau=-\frac{(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)}{\|\alpha-\gamma\|^2}(\alpha-\gamma).$$

در این صورت نامساوی به حکم زیر تحویل می‌شود

$$-2\frac{|(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)|^2}{\|\alpha-\gamma\|^2}+\frac{|(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)|^2}{\|\alpha-\gamma\|^2}\geqslant 0\,.$$

این نامساوی برقرار است اگر وتنها اگر $(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)=0$ . بنابراین $\beta-\alpha$ برهر بردار $W$ عمود است. این مطلب اثبات هم ارزی دوشرط داده شده‌در (۱) روی $\alpha$ راکامل می‌کند. بدیهی است شرط تعامد حداکثر توسط یك بردار $W$ برآورده می‌شود و این (۲) را اثبات می‌کند.

حال فرض کنیم $W$ یك زیرفضای با بعد متناهی $V$ باشد. در این صورت به عنوان نتیجه‌ای ازقضیهٔ۳ می‌دانیم که $W$ یك پایهٔ متعامد یکه دارد. $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ را یك پایهٔ متعامد یکه برای $W$ می‌گیریم و $\alpha$ را طبق (۸-۱۱) تعریف می‌کنیم. دراین صورت، طبق محاسبهٔ موجود در اثبات قضیهٔ ۳، $\beta-\alpha$ برهربردار $\alpha_k$ عمود است ($\beta-\alpha$ برداری‌است که درآخرین مرحله، وقتی‌که فرایند متعامد سازی بر $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ، $\beta$ به‌کار بسته‌می‌شود، به دست می‌آید). پس ، $\beta-\alpha$ برهرترکیب خطی $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$، یعنی بـر هربردار $W$ عمود است. اگر $\gamma$ در $W$ باشد و $\gamma\neq\alpha$ ، نتیجه مـی‌شود که $\|\beta-\alpha\|<\|\beta-\gamma\|$ . بنابراین $\alpha$ بهترین تقریب برای $\beta$ است که در $W$ قرار دارد. □

**تعریف.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی و $S$ مجموعه‌ای ازبردارهای $V$ بـاشد . **مکمل متعامد** $S$ عبارت است از مجموعه $S^\perp$ متشکل از همهٔ بـردارهایی از $V$ که بـرهمهٔ بردارهای $S$ عمود باشند.

مکمل متعامد $V$ عبارت‌است اززیرفضای صفر و بعکس $\{0\}^\perp=V$ . اگر $S$ زیر-مجموعه‌ای از $V$ باشد ، مکمل متعامدآن $S^\perp$ ($S$ عمود) همواره زیرفضایـی از $V$ است. زیرا $S^\perp$ غیرتهی است، چراکه‌شامل $0$ است و درصورتی‌که $\alpha$ و $\beta$ در $S^\perp$ و $c$ اسکالری دلخواه باشد، به ازای هر $\gamma$ در $S$

$$(c\alpha+\beta|\gamma)=c(\alpha|\gamma)+(\beta|\gamma)$$
$$=c0+0$$
$$=0$$

پس، $c\alpha+\beta$ نیز در $S$ قرار می‌گیرد. بنابر قضیهٔ ۴، خاصیت مشخص بردار $\alpha$ این‌است که تنها بردار $W$ است که $\beta-\alpha$ به $W^{\perp}$ تعلق دارد.

**تعریف.** درصورتی که بردار $\alpha$ در قضیهٔ ۴ وجود داشته باشد، **تصویرمتعامد $\beta$ روی $W$** نامیده می‌شود. اگر هربردار $V$ تصویر متعامدی روی $W$ داشته باشد، نگاشتی که به‌هر بردار $V$ تصویر متعامد آن روی $W$ را اختصاص می‌دهد، **تصویرمتعامد $V$ روی $W$** نام دارد.

طبق قضیهٔ ۴، تصویرمتعامد هرفضای ضرب داخلی روی یك زیرفضای با بعدمتناهی، همواره وجود دارد. قضیهٔ ۴ همچنین نتیجهٔ زیررا ایجاب می‌کند.

**نتیجه.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی، $W$ یك زیر فضای با بعد متناهی، و $E$ تصویرمتعامد $V$ روی $W$ باشد. دراین صورت نگاشت

$$\beta \rightarrow \beta-E\beta$$

تصویر متعامد $V$ روی $W^{\perp}$ است.

اثبات. $\beta$ را بردار دلخواهی از $V$ می‌گیریم. آنگاه $\beta-E\beta$ در $W^{\perp}$ قرار دارد و به‌ازای هر $\gamma$ در $W^{\perp}$، $\beta-\gamma=E\beta+(\beta-E\beta-\gamma)$. چون $E\beta$ در $W$ و $\beta-E\beta-\gamma$ متعلق به $W^{\perp}$ است، نتیجه می‌شود که

$$||\beta-\gamma||^2=||E\beta||^2+||\beta-E\beta-\gamma||^2$$
$$\geqslant||\beta-(\beta-E\beta)||^2$$

و وقتی $\gamma\neq\beta-E\beta$، نامساوی اکید است. بنابراین، $\beta-E\beta$ بهترین تقریب برای $\beta$ توسط بردارهای $W^{\perp}$ است. □

**مثال ۱۴.** به $R^3$ ضرب داخلی استانده را می‌دهیم. دراین صورت تصویر متعامد $(-10, 2, 8)$ روی زیرفضای $W$، پدیدآمده توسط $(3, 12, -1)$، عبارت است از بردار

$$\alpha=\frac{((-10, 2, 8)|(3, 12, -1))}{9+144+1}(3, 12, -1)$$
$$=\frac{-14}{154}(3, 12, -1).$$

تصویر متعامد $R^{۳}$ روی $W$ تبدیل خطی $E$ تعریف شده توسط

$$(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) \rightarrow \left(\frac{۳x_{۱}+۱۲x_{۲}-x_{۳}}{۱۵۴}\right)(۳, ۱۲, -۱)$$

است. مسلماً رتبهٔ $E$ برابر ۱ است؛ وازاین‌رو، پوچیش برابر ۲ است. ازطرف دیگر

$$E(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})=(۰, ۰, ۰)$$

اگر و تنها اگر $۳x_{۱}+۱۲x_{۲}-x_{۳}=۰$. و این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر $(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ در $W^{\perp}$ باشد. بنابراین، $W^{\perp}$ فضای پوچ $E$ است و $\dim(W^{\perp})=۲$. با محاسبهٔ

$$(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})-\left(\frac{۳x_{۱}+۱۲x_{۲}-x_{۳}}{۱۵۴}\right)(۳, ۱۲, -۱)$$

می‌بینیم که تصویر متعامد $R^{۳}$ روی $W^{\perp}$ عبارت است از تبدیل خطی $I-E$ که بردار $(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ را روی بردار

$$\frac{۱}{۱۵۴}(۱۴۵x_{۱}-۳۶x_{۲}+۳x_{۳}, -۳۶x_{۱}+۱۰x_{۲}+۱۲x_{۳}, ۳x_{۱}+۱۲x_{۲}+۱۵۳x_{۳})$$

می‌نگارد.

مشاهداتی که درمثال ۱۴ به‌عمل آمد، به‌گونهٔ زیر تعمیم می‌یابند.

**قضیهٔ ۵.** فرض کنیم $W$ زیرفضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی $V$ و $E$ تصویر متعامد $V$ روی $W$ باشد. در این صورت $E$ تبدیل خطی خودتوانی از $V$ روی $W$ است، $W^{\perp}$ فضای پوچ $E$ است، و

$$V=W\oplus W^{\perp}.$$

اثبات. $\beta$ را برداری دلخواه در $V$ می‌گیریم. دراین صورت $E\beta$ بهترین تقریب برای $\beta$ است که در $W$ قرار دارد. بخصوص، وقتی که $\beta$ متعلق به $W$ باشد، $E\beta=\beta$. بنابراین، به‌ازای هر $\beta$ در $V$، $E(E\beta)=E\beta$؛ یعنی، $E$ خودتوان است: $E^{۲}=E$. برای اینکه ثابت کنیم $E$ تبدیلی خطی است، $\alpha$ و $\beta$ را بردارهایی از $V$، و $c$ را اسکالری دلخواه می‌گیریم. دراین صورت، بنابر قضیهٔ ۴، $\alpha-E\alpha$ و $\beta-E\beta$ هردو برهر بردار $W$ عمود هستند. ازاین‌رو، بردار

$$c(\alpha-E\alpha)+(\beta-E\beta)=(c\alpha+\beta)-(cE\alpha+E\beta)$$

نیز به $W^{\perp}$ تعلق دارد. چون $cE\alpha+E\beta$ برداری است در $W$، از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود که

$$E(c\alpha+\beta)=cE\alpha+E\beta.$$

بدیهی است که می‌توان خطی بودن $E$ را با استفاده از (۸-۱۱) نیز اثبات کرد. مجدداً $\beta$ را برداری از $V$ می‌گیریم. آنگاه $E\beta$ یکتا بردار در $W$ است که $\beta-E\beta$ در $W^{\perp}$ قرار دارد. پس، وقتی که $\beta$ در $W^{\perp}$ باشد، $E\beta=0$. بعکس، وقتی که $E\beta=0$، $\beta$ در $W^{\perp}$ است. پس، $W^{\perp}$ فضای پوچ $E$ است. معادلهٔ

$$\beta=E\beta+\beta-E\beta$$

نشان می‌دهد که $V=W+W^{\perp}$؛ بعلاوه، $W\cap W^{\perp}=\{0\}$. زیرا اگر $\alpha$ برداری در $W\cap W^{\perp}$ باشد، آنگاه $(\alpha|\alpha)=0$. بنابراین $\alpha=0$، و $V$ مجموع مستقیم $W$ و $W^{\perp}$ می‌باشد. □

**نتیجه.** تحت شرایط قضیهٔ فوق، $I-E$ تصویر متعامد $V$ روی $W^{\perp}$ است. این تصویر تبدیل خطی خودتوانی از $V$ روی $W^{\perp}$ و با فضای پوچ $W$ است.

اثبات. پیش از این دیدیم که نگاشت $\beta\rightarrow\beta-E\beta$ تصویر متعامد $V$ روی $W^{\perp}$ است. چون $E$ تبدیلی خطی است، این تصویر روی $W^{\perp}$ تبدیل خطی $I-E$ می‌باشد. ازخواص هندسی این تبدیل خطی مشهود است که $I-E$ تبدیل خودتوانی از $V$ روی $W$ است. این موضوع از محاسبهٔ

$$\begin{aligned}(I-E)(I-E)&=I-E-E+E^{2}\\&=I-E\end{aligned}$$

نیز نتیجه می‌شود. بعلاوه، $(I-E)\beta=0$ اگر و تنها اگر $\beta=E\beta$؛ این مطلب برقرار است اگروتنها اگر $\beta$ در $W$ باشد. بنابراین $W$ فضای پوچ $I-E$ است. □

اکنون فرایند گرام-اشمیت را می‌توان به‌طور هندسی به‌طریق زیر تشریح کرد. با مفروض بودن یک فضای ضرب داخلی $V$ و بردارهای $\beta_1$، ...، $\beta_n$ در $V$، عملگر $P_k$ $(k>1)$ را تصویر متعامد $V$ روی مکمل متعامد زیرفضای پدیدآمده توسط $\beta_1$، ...، $\beta_{k-1}$ می‌گیریم و قرار می‌دهیم $P_1=I$. در این صورت بردارهایی که از به‌کاربستن فرایند متعامد سازی روی $\beta_1$، ...، $\beta_n$ به‌دست می‌آیند، با معادلات

$$\alpha_k=P_k\beta_k \qquad 1\leqslant k\leqslant n \tag{۸-۱۲}$$

تعریف می‌شوند.

قضیهٔ ۵ نتیجه دیگری را نیز ایجاب می‌کند که به **نامساوی بسل**[1] مشهور است.

**نتیجه.** فرض کنیم $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ مجموعه‌ای متعامد از بردارهای غیرصفرفضای

1. Bessel

ضرب داخلی $V$ باشد. اگر $\beta$ برداری از $V$ باشد، آنگاه

$$\sum_k \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2} \leqslant \|\beta\|^2$$

وتساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\beta = \sum_k \frac{(\beta|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k .$$

اثبات. فرض کنیم $\gamma = \sum_k [(\beta|\alpha_k)/\|\alpha_k\|^2]\alpha_k$. دراین صورت $\beta = \gamma + \delta$ ودر آن $(\gamma|\delta) = 0$ . از این‌رو

$$\|\beta\|^2 = \|\gamma\|^2 + \|\delta\|^2.$$

اکنون کافی است ثابت کنیم که

$$\|\gamma\|^2 = \sum_k \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2} .$$

این محاسبهٔ سرراستی است که درآن ازاین مطلب که به‌ازای $j \neq k$، $(\alpha_j|\alpha_k) = 0$، استفاده می‌شود. □

درحالت خاصی که درآن $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك مجموعهٔ‌متعامد یکه‌باشد، نامساوی بسل می‌گوید که

$$\sum_k |(\beta|\alpha_k)|^2 \leqslant \|\beta\|^2.$$

این نتیجه همچنین حاکی است که دراین حالت $\beta$ در زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$، . . . ، $\alpha_n$ قراردارد اگر وتنها اگر

$$\beta = \sum_k (\beta|\alpha_k)\alpha_k$$

یا اگروتنها اگرنامساوی بسل واقعاً یك تساوی باشد. بدیهی است درموردی‌که $V$ با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای $V$ باشد، فرمول بالا برای هربردار $\beta$ در $V$ برقرار است. به‌بیان دیگر، اگر $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای $V$ باشد، $k$مین مختص $\beta$ درپایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ عبارت است از $(\beta|\alpha_k)$.

**مثال ۱۵.** نتیجهٔ اخیررا روی مجموعه‌های متعامد توصیف شده در مثال ۱۱ به‌کار می‌بندیم وبه‌دست می‌آوریم که

$$\text{(الف)} \qquad \sum_{k=-n}^{n} \left| \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \right|^2 \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikt}\right|^2 dt = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \quad \text{(ب)}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2}\cos 2\pi t + \sqrt{2}\sin 4\pi t)^2 dt = 1+1=2 \quad \text{(پ)}.$$

## تمرین

۱. $R^4$ با ضرب داخلی استانده را درنظر بگیرید. $W$ را زیرفضایی از $R^4$ متشکل از همهٔ بردارهایی که هم بر $\alpha=(1, 0, -1, 1)$ و هم بر $\beta=(2, 3, -1, 2)$ عمود هستند فرض کنید و پایه‌ای برای $W$ بیابید.

۲. فرایندگرام ـ اشمیت را بر بردارهای $\beta_1=(1, 0, 1)$، $\beta_2=(1, 0, -1)$، و $\beta_3=(0, 3, 4)$ به‌کاربندید تا پایهٔ متعامدیکه‌ای برای $R^3$ با ضرب داخلی استانده به‌دست آورید.

۳. $C^3$ را با ضرب داخلی استانده درنظر بگیرید. یك پایهٔ متعامد یکه بـرای زیرفضای پدیدآمده توسط $\beta_1=(1, 0, i)$ و $\beta_2=(2, 1, 1+i)$ بیابید.

۴. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی باشد. **فاصلهٔ** بین دوبردار $\alpha$ و $\beta$ در $V$ با

$$d(\alpha, \beta)=\|\alpha-\beta\|$$

تعریف می‌شود. نشان‌دهید که

(الف) $d(\alpha, \beta)\geqslant 0$ ؛

(ب) $d(\alpha, \beta)=0$ اگر وتنها اگر $\alpha=\beta$ ؛

(پ) $d(\alpha, \beta)=d(\beta, \alpha)$ ؛

(ت) $d(\alpha, \beta)\leqslant d(\alpha, \gamma)+d(\gamma, \beta)$ .

۵. فرض کنید $V$ یك‌فضای ضرب‌داخلی‌باشد، و $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی از $V$ باشند. نشان‌دهید $\alpha=\beta$ اگر وتنها اگر به‌ازای هر $\gamma$ در $V$، $(\alpha|\gamma)=(\beta|\gamma)$.

۶. فرض کنید $W$ زیرفضایی از $R^2$ پدید آمده توسط بردار $(3, 4)$ باشد. بااستفاده از ضرب داخلی استانده، $E$ را تصویر متعامد $R^2$ بروی $W$ بگیرید. مطلوب است:

(الف) فرمولی برای $E(x_1, x_2)$ ؛

(ب) ماتریس $E$ درپایهٔ مرتب استانده ؛

(پ) $W^\perp$ ؛

(ت) پایهٔ متعامد یکه‌ای که در آن $E$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده شود.

۰۷ فرض کنید $V$ فضای داخلی متشکل از $R^2$ همراه با ضرب داخلی باشد که فرم درجهٔ دوم آن طبق

$$||(x_1, x_2)||^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$$

تعریف می‌شود. $E$ را تصویر متعامد $V$ بروی زیرفضای $W$ پدید آمده توسط بردار (۳، ۴) می‌گیریم. اکنون به‌چهار پرسش تمرین ۶ پاسخ دهید.

۰۸ ضربی داخلی روی $R^2$ بیابید که $(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2$.

۰۹ فرض کنید $V$ زیرفضایی از $R[x]$ متشکل از چندجمله‌ایهای از درجهٔ حداکثر ۳ باشد. $V$ را به‌ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

مجهز کنید.

(الف) مکمل متعامد زیرفضای چندجمله‌ایهای اسکالری را بیابید.
(ب) فرایند گرام ـ اشمیت را برپایهٔ $\{1, x, x^2, x^3\}$ به‌کار بندید.

۰۱۰ فرض کنید $V$ فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی $C$ با ضرب داخلی $(A|B) = \operatorname{tr}(AB^*)$ باشد. مکمل متعامد زیرفضای ماتریسهای قطری را بیابید.

۰۱۱ فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامدیکه برای $V$ باشد. نشان‌دهیدکه به‌ازای هر دو بردار $\alpha$ و $\beta$ در $V$

$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha|\alpha_k)\overline{(\beta|\alpha_k)} \,.$$

۰۱۲ فرض کنید $W$ زیرفضایی با بعد متناهی از یك فضای ضرب داخلی $V$، و $E$ تصویر متعامد $V$ روی $W$ باشد. ثابت کنیدکه بازای‌هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $(E\alpha|\beta) = (\alpha|E\beta)$.

۰۱۳ $S$ را زیرمجموعه‌ای ازیك فضای ضرب داخلی $V$ می‌گیریم. نشان‌دهید $(S^\perp)^\perp$ زیرفضای‌پدیدآمده توسط $S$ را دربردارد. وقتی که $V$ با بعد متناهی‌باشد، نشان‌دهید $(S^\perp)^\perp$ همان زیرفضای پدید آمده توسط $S$ است.

۱۴. فرض‌کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای $V$ باشد. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $V$ و $A$ ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشد. ثابت‌کنید

$$A_{ij}=(T\alpha_j|\alpha_i) .$$

۱۵. فرض‌کنید $V=W_1\oplus W_2$ و $f_1$ و $f_2$ بترتیب ضربهایی داخلی روی $W_1$ و $W_2$ باشند. نشان‌دهید ضرب‌داخلی یکتایی چون $f$ روی $V$ وجود داردکه

(الف) $W_2=W_1^\perp$؛

(ب) وقتی $\alpha$ و $\beta$ در $W_k$، $k=1, 2$، باشند، $f(\alpha, \beta)=f_k(\alpha, \beta)$.

۱۶. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی و $W$ زیرفضایی با بعد متناهی از $V$ باشد. (معمولاً) تصویرهای بسیاری یافت می‌شوندکه بردشان $W$ است. یکی‌از اینها، که تصویر متعامد روی $W$ است، این خاصیت را دارد که به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $||E\alpha||\leqslant||\alpha||$. ثابت کنیدکه اگر $E$ یك تصویر با برد $W$ باشد وبه‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $||E\alpha||\leqslant||\alpha||$، آنگاه $E$ تصویر متعامد روی $W$ است.

۱۷. فرض‌کنید $V$ فضای ضرب داخلی حقیقی متشکل‌از فضای توابع پیوستهٔ حقیقی روی فاصلهٔ $-1\leqslant t\leqslant 1$ با ضرب داخلی

$$(f|g)=\int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt$$

باشد. $W$ را زیرفضای توابع فرد، یعنی توابعی که در $f(-t)=-f(t)$ صدق می‌کنند، می‌گیریم. مکمل متعامد $W$ را بیابید.

## ۳.۸. تابعکهای خطی و الحاقیها

قسمت اول این بخش به بحث درمورد تابعکهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی و رابطهٔ آنها با ضرب داخلی اختصاص دارد. نتیجهٔ بنیادی این است که هرتابعك خطی $f$ روی یك‌فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، «ضرب‌ی‌داخلی درازای برداری ثابت ازفضا» است؛ یعنی،چنین $f$ی به‌ازای $\beta$ی ثابتی‌از $V$ به‌صورت $f(\alpha)=(\alpha|\beta)$ است. این‌نتیجه را برای اثبات وجود «الحاقی» عملگری خطی چون $T$ روی $V$، که خود عملگری‌خطی چون $T^*$ باشرط $(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)$ به‌ازای همهٔ $\alpha$ها و $\beta$های در $V$ است، به‌کار می‌بریم. با استفاده از یك پایهٔ متعامدیکه، این‌عمل الحاقی روی عملگرهای خطی (رسیدن از $T$ به $T^*$) همانند با عمل تشکیل ترانهادهٔ مزدوج یك ماتریس، گرفته می‌شود. سپس دربارهٔ شباهت بین عمل‌الحاقی ومزدوج گیری دراعداد مختلط به‌اندك کاوشی می‌پردازیم.

فرض‌کنیم $V$ فضای ضرب داخلی دلخواه و $\beta$ بردار ثابتی از $V$ باشد. تابعی‌چون

$f_\beta$ از $V$ درهیأت اسکالری را طبق

$$f_\beta(\alpha)=(\alpha|\beta)$$

تعریف می‌کنیم. این تابع $f_\beta$ تابعکی خطی روی $V$ است؛ زیـرا ، بنا بر تعریف، $(\alpha|\beta)$ به‌عنوان تابعی از $\alpha$ خطی است. اگر $V$ با بعد متناهی بـاشد، هـر تابعك خطی روی $V$ بدین‌طریق از برداری چون $\beta$ حاصل می‌شود.

**قضیهٔ ۶.** فرض کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $f$ تابعکی خطـی روی $V$ باشد. در این صورت بردار یکتایی چون $\beta$ در $V$ وجود دارد، که به ازای هر $\alpha$ در $V$، $f(\alpha)=(\alpha|\beta)$ .

اثبات. فرض کنیم $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یـك پایـهٔ متعامدیکه برای $V$ بـاشد. می‌نویسیم

$$\beta=\sum_{j=1}^{n}\overline{f(\alpha_j)}\alpha_j \qquad (۸-۱۳)$$

وفرض می‌کنیم $f_\beta$ تابعك خطی تعریف شده توسط

$$f_\beta(\alpha)=(\alpha|\beta)$$

باشد. دراین صورت

$$f_\beta(\alpha_k)=(\alpha_k|\sum_j\overline{f(a_j)}\,\alpha_j)=f(\alpha_k).$$

جون این مطلب به ازای هر $\alpha_k$ درست است، نتیجه می‌شود که $f=f_\beta$. حال فرض‌کنیم $\gamma$ بـرداری در $V$ بـاشد بـه طوری‌کـه بـه ازای هـر $\alpha$ ، $(\alpha|\beta)=(\alpha|\gamma)$. آنگـاه $(\beta-\gamma|\beta-\gamma)=0$ و $\beta=\gamma$. پس، دقیقاً یك بردارچون $\beta$ وجود داردکه تابعك‌خطی $f$ را به طریقه‌ای که ذکر شد، تعیین می‌کند. □

اثبات‌این‌قضیه‌می‌تواند به‌صورت دیگری‌برحسب نمایش تابعکهای خطی دریك‌پایه هم بیان شود. اگرپایه متعامدیکهٔ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ را برای $V$ انتخاب‌کنیم، ضرب‌داخلی $\alpha=x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n$ و $\beta=y_1\alpha_1+\dots+y_n\alpha_n$ برابر است با

$$(\alpha|\beta)=x_1\bar{y}_1+\dots+x_n\bar{y}_n.$$

اگر $f$ تابعکی خطی‌روی $V$ باشد، آنگاه $f$ به ازای‌اسکالرهای ثابتی چون $c_1,\dots,c_n$ که توسط این پایه تعیین می‌شوند، به صورت

$$f(\alpha)=c_1x_1+\dots+c_nx_n$$

نوشته می‌شود. بدیهی است که $c_j=f(\alpha_j)$ . اگر بخواهیم برداری چون $\beta$ در $V$ بیابیم که به ازای هر $\alpha$ ، $(\alpha|\beta)=f(\alpha)$، روشن است که مختصات $y_j$ از $\beta$ باید در $\bar{y}_j=c_j$ یا $y_j=\overline{f(\alpha_j)}$ صدق کنند. ازاین‌رو،

$$\beta=\overline{f(\alpha_۱)}\alpha_۱+\cdots+\overline{f(\alpha_n)}\alpha_n$$

بردار مطلوب است.

چند توضیح دیگرهم درپیش است. اثباتی راکه برای قضیهٔ ۶ ارائه‌کردیم به‌طور رضایت‌بخشی خلاصه است، اما براین واقعیت مهم هندسی کــه $\beta$ در مکمل متعامد فضای پوچ $f$ قــرار دارد هیچ تأکید نمی‌کند. گیریم $W$ فضای پوچ $f$ باشد. در این صورت $V=W+W^\perp$ و $f$ توسط مقادیرش روی $W^\perp$ کاملا تعیین می‌شود. درواقع، اگــر $P$ تصویر متعامد $V$ روی $W^\perp$ باشد، آنگاه به ازای هر $\alpha$ در $V$

$$f(\alpha)=f(P\alpha)\,.$$

فرض‌کنیم $f\neq ۰$ . آنگاه $f$ از رتبهٔ ۱ است و ۱ = بعد $(W^\perp)$ . اگر $\gamma$ برداری غیر صفر در $W^\perp$ باشد، نتیجه می‌شود که به ازای هر $\alpha$ در $V$

$$P\alpha=\frac{(\alpha|\gamma)}{||\gamma||^۲}\gamma.$$

پس، به ازای هر $\alpha$

$$f(\alpha)=(\alpha|\gamma)\cdot\frac{f(\gamma)}{||\gamma||^۲}$$

و $\beta=[\overline{f(\gamma)}/||\gamma||^۲]\gamma$.

**مثال ۱۶.** بهتر است مثالی بزنیم که نشان دهد قضیهٔ ۶ بدون این فرض که $V$ بــا بعد متناهی است، درست نیست. $V$ را فضای برداری چند جمله‌ایهای برروی هیأت‌اعداد مختلط با ضرب داخلی

$$(f|g)=\int_۰^۱ f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

می‌گیریم. این ضرب داخلی رامی‌توان به‌طورجبری نیز تعریف کرد. اگر $f=\sum a_k x^k$ و $g=\sum b_k x^k$ ، آنگاه

$$(f|g)=\sum_{j,k}\frac{۱}{j+k+۱}a_j\bar{b}_k.$$

گیریم $z$ عدد مختلط ثابتی و $L$ تابعك خطی «تعیین مقدار در $z$» باشد:

$$L(f)=f(z).$$

آیا یك چند جمله‌ای چون $g$ وجود داردکه به ازای هر $f$ ، $(f|g)=L(f)$؟ جواب منفی است؛ زیرا فرض‌کنیم به ازای هر $f$ داشته باشیم

$$f(z)=\int_{0}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt .$$

با فرض $h=x-z$ ، به ازای هر $f$ داریم $(hf)(z)=0$ . دراین صورت به ازای هر $f$

$$0=\int_{0}^{1} h(t)f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

بخصوص، این تساوی برای $f=\bar{h}g$ نیز برقرار است، پس

$$\int_{0}^{1} |h(t)|^{2}|g(t)|^{2}dt=0$$

و از این رو، $hg=0$ . چون $h\neq 0$ ، باید داشته باشیم $g=0$ . ولی $L$ تابعك صفر نیست؛ بنابراین، چنین $g$یی وجود ندارد.

این مثال را می‌توان تا اندازه‌ای به حالتی‌که درآن $L$ ترکیبی خطی از تعیین مقدارهای نقطه‌ای باشد تعمیم داد. فرض کنیم اعداد مختلط ثابتی چون $z_1$، $\cdots$، $z_n$ و اسکالرهایی چون $c_1$، $\cdots$، $c_n$ انتخاب شده باشند و

$$L(f)=c_1f(z_1)+\cdots+c_nf(z_n)$$

را درنظربگیریم. دراین صورت $L$ تابعکی خطی روی $V$ است، اما هیچ $g$ با خاصیت $L(f)=(f|g)$ وجود ندارد مگرآنکه $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ . حال عیناً استدلال بالا را با $h=(x-z_1)\cdots(x-z_n)$ تکرار می‌کنیم.

اکنون به مفهوم الحاقی یك عملگر خطی بازمی‌گردیم.

**قضیهٔ ۷.** به ازای هر عملگر خطی $T$ روی یك فضای ضرب داخلی بعدمتناهی $V$ ، عملگر خطی یکتایی چون $T^*$ روی $V$ وجود دارد که به ازای هر $\alpha$ وهر $\beta$ از $V$ ؛

$$(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta). \qquad (۱۴-۸)$$

اثبات. گیریم $\beta$ برداری دلخواه از $V$ باشد. دراین صورت $\alpha\rightarrow(T\alpha|\beta)$ تابعکی خطی روی $V$ است. بنابرقضیهٔ ۶، برداریکتایی چون $\beta'$ در $V$ وجود دارد که به ازای‌هر $\alpha$ در $V$ ، $(T\alpha|\beta)=(\alpha|\beta')$ . فرض‌کنیم $T^*$ نگاشت $\beta\rightarrow\beta'$ را نشان‌دهد:

$$\beta' = T^*\beta.$$

لذا (۸-۱۴) برقرار است، اما باید نشان دهیم که $T^*$ عملگری خطی است. گیریم $\beta$ و $\gamma$ در $V$ و $c$ یك اسکالر باشد. دراین صورت به ازای هر $\alpha$،

$$\begin{aligned}(\alpha|T^*(c\beta+\gamma)) &= (T\alpha|c\beta+\gamma)\\ &= (T\alpha|c\beta)+(T\alpha|\gamma)\\ &= \bar{c}(T\alpha|\beta)+(T\alpha|\gamma)\\ &= \bar{c}(\alpha|T^*\beta)+(\alpha|T^*\gamma)\\ &= (\alpha|cT^*\beta)+(\alpha|T^*\gamma)\\ &= (\alpha|cT^*\beta+T^*\gamma)\,.\end{aligned}$$

پس، $T^*(c\beta+\gamma)=cT^*\beta+T^*\gamma$ و $T^*$ خطی است.

یکتایی $T^*$ واضح است. به ازای هر $\beta$ در $V$، بردار $T^*\beta$ به عنوان بردار $\beta'$ با این شرط که به ازای هر $\alpha$، $(T\alpha|\beta)=(\alpha|\beta')$ به طور یکتا تعیین می‌شود. □

**قضیهٔ ۸.** فرض کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه (مرتب) برای $V$ باشد. $T$ را عملگری خطی روی $V$ و $A$ را ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ می‌گیریم، آنگاه $A_{kj}=(T\alpha_j|\alpha_k)$.

اثبات. چون $\mathcal{B}$ یك پایهٔ متعامد یکه است، داریم

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}(\alpha|\alpha_k)\alpha_k.$$

ماتریس $A$ با

$$T\alpha_j=\sum_{k=1}^{n}A_{kj}\alpha_k$$

تعریف می‌شود، وچون

$$T\alpha_j=\sum_{k=1}^{n}(T\alpha_j|\alpha_k)\alpha_k$$

داریم

$$A_{kj}=(T\alpha_j|\alpha_k).\ \square$$

**نتیجه.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی روی $V$

باشد. در هر پایهٔ متعامد یکه برای $V$، ماتریس $T^*$ عبارت است از ترانهادهٔ مزدوج ماتریس $T$.

اثبات. $\mathcal{B}=\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$ را پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $A=[T]_{\mathcal{B}}$، $B=[T^*]_{\mathcal{B}}$.

بنا بر قضیهٔ ۸

$$A_{kj}=(T\alpha_j|\alpha_k)$$
$$B_{kj}=(T^*\alpha_j|\alpha_k).$$

در این صورت طبق تعریف $T^*$ داریم

$$\begin{aligned} B_{kj} &= (T^*\alpha_j|\alpha_k) \\ &= \overline{(\alpha_k|T^*\alpha_j)} \\ &= \overline{(T\alpha_k|\alpha_j)} \\ &= \overline{A_{jk}}. \square \end{aligned}$$

**مثال ۱۷.** فرض کنیم $V$ یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $E$ تصویر متعامد $V$ روی یک زیرفضای $W$ باشد. در این صورت به ازای هر دو بردار $\alpha$ و $\beta$ در $V$،

$$\begin{aligned} (E\alpha|\beta) &= (E\alpha|E\beta+(۱-E)\beta) \\ &= (E\alpha|E\beta) \\ &= (E\alpha+(۱-E)\alpha|E\beta) \\ &= (\alpha|E\beta). \end{aligned}$$

بنا بر یکتایی عملگر $E^*$ نتیجه می‌شود که $E^*=E$. حال تصویر $E$ توصیف شده در مثال ۱۴ را درنظر می‌گیریم. در این صورت

$$A=\frac{۱}{۱۵۴}\begin{bmatrix} ۹ & ۳۶ & -۳ \\ ۳۶ & ۱۴۴ & -۱۲ \\ -۳ & -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

عبارت است از ماتریس $E$ در پایهٔ متعامد یکه استانده. چون $E=E^*$، $A$ ماتریس $E^*$ نیز هست، و چون $A=A^*$، این مطلب ناقض نتیجهٔ فوق نیست. از طرف دیگر، فرض کنیم

$$\alpha_۱=(۱۵۴, ۰, ۰)$$
$$\alpha_۲=(۱۴۵, -۳۶, ۳)$$

$$\alpha_۳=(-۳۶,\ ۱۰,\ ۱۲).$$

دراین‌صورت $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ یك پایه است و

$$E\alpha_۱=(۹,\ ۳۶,\ -۳)$$

$$E\alpha_۲=(۰,\ ۰,\ ۰)$$

$$E\alpha_۳=(۰,\ ۰,\ ۰).$$

چون $(۹, ۳۶, -۳) = -(۱۵۴, ۰, ۰) - (۱۴۵, -۳۶, ۳)$ ، $B$ ، ماتریس $E$ درپایهٔ $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ ، با تساوی

$$B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود. دراین حالت ، $B \neq B^*$ و $B^*$ ماتریس $E^*=E$ درپایهٔ $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ نیست. با به‌کار بستن نتیجهٔ فوق درمی‌یابیم که $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ یك پایهٔ متعامد یکه نیست. البته، به‌هرحال این مطلب آشکار هست.

**تعریف.** گیریم $T$ عملگری خطی روی یـك فضای ضرب داخلی $V$ باشد. در این صورت‌گوییم **$T$ دارای یك الحاقی روی $V$** است، هرگاه عملگری خطی چون $T^*$ روی $V$ موجود باشدکه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$ ، $(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)$ .

بنا برقضیهٔ ۷، هرعملگر خطی روی یك فضای ضرب‌داخلی با بعد متناهی $V$ دارای یك الحاقی روی $V$ است. درحالت با بعد نامتناهی، این مطلب همیشه درست نیست. ولی درهرصورت، حداکثر یك چنین عملگر $T^*$ وجود دارد؛ وقتی که این عملگر وجود داشته باشد، آن‌را **الحاقی $T$** می‌نامیم.

درحالت بعد متناهی، تذکر دومطلب لازم است.

۱. الحاقی $T$ نه‌تنها به $T$ ، بلکه به‌ضرب داخلی نیز وابسته است.

۲. همان‌طور که درمثال ۱۷ نشان داده شد، درپایهٔ مرتب دلخواهی چون $\mathcal{B}$ ، رابطهٔ بین $[T]_{\mathcal{B}}$ و $[T^*]_{\mathcal{B}}$ پیچیده‌تر از آن است که درنتیجهٔ فوق ارائه شد.

**مثال ۱۸.** $V$ را $C^{n\times ۱}$ ، فضای ماتـریسهای $n\times ۱$ مختلط ، بـا ضـرب داخلـی $(X|Y)=Y^*X$ می گیریم. اگر $A$ ماتـریسی $n\times n$ با درایه‌های مختلط باشد، الحاقـی عملگر خطی $X\to AX$ عبارت است از عملگر $X\to A^*X$ زیرا ،

$$(AX|Y)=Y^*AX=(A^*Y)^*X=(X|A^*Y)\,.$$

خواننده باید خود را متقاعد کند که این مثال در واقع حالت خاصی از نتیجهٔ اخیر است.

**مثال ۱۹.** این مثال مشابه مثال ۱۸ است. $V$ را $C^{n\times n}$ با ضرب داخلی $(A|B)=\operatorname{tr}(B^*A)$ می گیریم. فرض کنیم $M$ ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی $C$ باشد. الحاقی ضرب ازچپ در $M$، برابر ضرب ازچپ در $M^*$ است. بدیهی است که «ضرب از چپ در $M$» عملگر خطی $L_M$ تعریف شده با $L_M(A)=MA$ است.

$$\begin{aligned}(L_M(A)|B)&=\operatorname{tr}(B^*(MA))\\&=\operatorname{tr}(MAB^*)\\&=\operatorname{tr}(AB^*M)\\&=\operatorname{tr}(A(M^*B)^*)\\&=(A|L_M{}^*(B)).\end{aligned}$$

پس $L_M{}^*=(L_M)^*$. درمحاسبهٔ بالا از خاصیت مشخص تابع رد: $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ دوبار استفاده شده است.

**مثال ۲۰.** فرض کنیم $V$ فضای چندجمله‌ایهای برروی هیأت اعداد مختلط با ضرب داخلی

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

باشد. اگر $f$ چندجمله‌ای $f=\sum a_kx^k$ باشد، فرض می کنیم $\bar f=\sum \bar a_kx^k$. درحقیقت، $\bar f$ آن‌چندجمله‌ای است که تابع چندجمله‌ای وابسته بدان مزدوج مختلط تابع چندجمله‌ای برای $f$ است:

$$\bar f(t)=\overline{f(t)}\quad \text{و}\quad \text{حقیقی } t$$

عملگر «ضرب در $f$»، یعنی عملگرخطی $M_f$ تعریف‌شده توسط $M_f(g)=fg$ را درنظر می گیریم. این عملگر دارای یك الحاقی، یعنی عملگر ضرب در $\bar f$ است. زیرا

$$\begin{aligned}(M_f(g)|h)&=(fg|h)\\&=\int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}\,dt\\&=\int_0^1 g(t)[\overline{\overline{f(t)}h(t)}]\,dt\end{aligned}$$

$$= (g|\bar{f}h)$$
$$= (g|M_{\bar{f}}(h))$$

واز این‌رو، $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$.

**مثال ۲۱.** درمثال ۲۰ دیدیم که برخی از عملگرهـای خطی روی فضاهای ضرب داخلی با بعد نامتناهی نیز دارای الحاقی هستند. به‌طوری‌که قبلاً توضیح دادیم، برخی نیز الحاقی ندارند. گیریم $V$ فضای ضرب داخلی مثال ۲۰ و $D$ عملگر مشتق‌گیری روی $C[x]$ باشد. انتگرال‌گیری جزء به‌جزء نشان می‌دهد که

$$(Df|g) = f(۱)g(۱) - f(۰)g(۰) - f(Dg)$$

$g$ را ثابت می‌گیریم وتحقیق می‌کنیم که چه وقت یك چندجمله‌ای چون $D^*g$ وجود دارد که به‌ازای هر $f$، $(Df|g) = (f|D^*g)$. اگرچنین $D^*g$ یــی وجود داشته باشد، خواهیم داشت

$$(f|D^*g) = f(۱)g(۱) - f(۰)g(۰) - (f|Dg)$$

یا

$$(f|D^*g + Dg) = f(۱)g(۱) - f(۰)g(۰).$$

با $g$ ثابت، $L(f) = f(۱)g(۱) - f(۰)g(۰)$ تابعکی خطی از نوع درنظر گرفته شده در مثال ۱۶ است و نمی‌تواند به‌صورت $L(f) = (f|h)$ باشد مگر آنکه $L = ۰$. اگــر $D^*g$ وجود داشته باشد، آنگاه به‌ازای $h = D^*g + Dg$، البته داریــم $L(f) = (f|h)$ و ازاین‌رو $g(۰) = g(۱) = ۰$. وجود چندجمله‌ای مناسبی چون $D^*g$ ایجاب می‌کند که $g(۰) = g(۱) = ۰$. بعــکس، اگــر $g(۰) = g(۱) = ۰$، چندجمله‌ای $D^*g = -Dg$، به‌ازای هر $f$، در $(Df|g) = (f|D^*g)$ صدق می‌کند. اگریك $g$ انتخاب کنیم که به‌ازای آن $g(۰) \neq ۰$ یا $g(۱) \neq ۰$، نمی‌تــوانیم $D^*g$ را به‌صورت مناسبی تعــریف کنیم و از این‌رو نتیجه می‌گیریم که $D$ دارای الحاقی نیست.

امیدواریم که این مثالها درك خواننده را درمورد الحاقی عملگرهای خطی بیفزاید. می‌بینیم که عمل الحاقی، از $T$ به $T^*$ رسیدن، به‌نحوی شبیه به‌مزدوج‌گیری روی اعداد مختلط رفتار می‌کند. قضیهٔ زیراین شباهت را تقویت می‌کند.

**قضیهٔ ۹.** گیریم $V$ یــك فضای ضرب داخلی با بعــد متناهی باشد. اگــر $T$ و $U$ عملگرهای خطی روی $V$ باشند و $c$ یك اسکالر باشد،

(۱) $(T+U)^* = T^* + U^*$؛

(۲) $(cT)^* = \bar{c}T^*$؛

(۳) $(TU)^*=U^*T^*$؛

(۴) $(T^*)^*=T$.

اثبات. برای اثبات (۱)، $\alpha$ و $\beta$ را بردارهایی دلخواه از $V$ می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}((T+U)\alpha|\beta)&=(T\alpha+U\alpha|\beta)\\&=(T\alpha|\beta)+(U\alpha|\beta)\\&=(\alpha|T^*\beta)+(\alpha|U^*\beta)\\&=(\alpha|T^*\beta+U^*\beta)\\&=(\alpha|(T^*+U^*)\beta).\end{aligned}$$

بنابریکتایی الحاقی، داریم $(T+U)^*=T^*+U^*$. اثبات (۲) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. (۳) و (۴) را از روابط

$$(TU\alpha|\beta)=(U\alpha|T^*\beta)=(\alpha|U^*T^*\beta)$$

$$(T^*\alpha|\beta)=\overline{(\beta|T^*\alpha)}=\overline{(T\beta|\alpha)}=(\alpha|T\beta)$$

به‌دست می‌آوریم. □

قضیهٔ ۹ غالباً به‌صورت زیر بیان می‌شود: نگاشت $T\to T^*$ یاد یکریختی خطی مزدوجی با دورهٔ تناوب ۲ است. شباهت این عمل با مزدوج گیری مختلط، که در بالا ذکر شد، مسلماً بر پایهٔ این مشاهده استوار است که مزدوج گیری مختلط دارای خواص $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$، $\overline{(z_1z_2)}=\bar{z}_1\bar{z}_2$، و $\bar{\bar{z}}=z$ است. باید مواظب باشیم که وارونی ترتیب در یك ضرب، که عمل الحاقی ایجاب می‌کند، رعایت شود: $(UT)^*=T^*U^*$. همچنان که به‌مطالعهٔ خود دربارهٔ عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی ادامه می‌دهیم، گسترش این شباهت را نیز ذکر می‌کنیم. اکنون می‌توانیم مطلبی دراین زمینه بیان کنیم. یك عدد مختلط $z$ حقیقی است اگروتنها اگر $\bar{z}=z$. ممکن است تصور شود که عملگرخطی $T$ با شرط $T=T^*$ بوجهی شبیه به اعداد حقیقی عمل می‌کند. درواقع همین‌طور است. مثلاً، اگر $T$ عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی باشد، آنگاه

$$T=U_1+iU_2 \qquad (۱۵\text{-}۸)$$

که در آن $U_1=U_1^*$ و $U_2=U_2^*$. پس، به یك معنی، $T$ دارای یك «جزء حقیقی» و یك «جزء موهومی» است. عملگرهای $U_1$ و $U_2$، که در $U_1=U_1^*$، $U_2=U_2^*$، و (۸-۱۵) صدق می‌کنند، یکتا هستند، واز روابط

$$U_1 = \frac{1}{2}(T+T^*)$$

$$U_2 = \frac{1}{2i}(T-T^*)$$

به‌دست می‌آیند.

عملگری خطی مانند $T$ که $T=T^*$، **خودالحاق** (یا **هرمیتی**) نامیده می‌شود. اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ باشد، آنگاه

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]^*_{\mathcal{B}}$$

و لذا $T$ خودالحاق است اگروتنها اگرماتریس آن درهرپایهٔ متعامدیکه ماتریسی‌خودالحاق باشد. عملگرهای خودالحاق، نه‌تنها بدین‌دلیل ساده‌که نوعی اجزای حقیقی وموهومی برای عملگرخطی عمومی فراهم می‌آورند، بلکه به‌دلایل زیرنیز از اهمیت برخوردارند: (۱) عملگرهای خودالحاق دارای خواص ویژهٔ بسیاری هستند. مثلاً، برای یك چنین عملگری، پایهٔ متعامدیکه‌ای ازبردارهای سرشت‌نماوجود دارد. (۲) بسیاری ازعملگرهایی که درعمل پیش می‌آیند خودالحاق هستند. خواص ویژهٔ عملگرهای خودالحاق را بعداً مورد رسیدگی قرارخواهیم داد.

## تمرین

۱. $V$ را فضای $C^2$ با ضرب داخلی استانده بگیرید و فرض‌کنید $T$ عملگرخطی تعریف‌شده توسط $T\epsilon_1=(1,-2)$ و $T\epsilon_2=(i,-1)$ باشد. اگر $\alpha=(x_1,x_2)$ آنگاه $T^*\alpha$ را بیابید.

۲. فرض‌کنید $T$ عملگری‌خطی روی $C^2$ باشدکه با $T\epsilon_1=(1+i,2)$ و $T\epsilon_2=(i,i)$ تعریف می‌شود. با استفاده ازضرب داخلی استانده، ماتریس $T^*$ درپایهٔ مرتب استانده را بیابید. آیا $T$ با $T^*$ جابجا می‌شود؟

۳. فرض‌کنید $V$ فضای $C^3$ با ضرب داخلی استانده باشد. فرض‌کنید $T$ عملگری خطی روی $V$ باشدکه ماتریس آن درپایهٔ مرتب استانده با

$$A_{jk}=i^{j+k}, \qquad (i^2=-1)$$

تعریف می‌شود. پایه‌ای برای فضای پوچ $T^*$ بیابید.

۴. فرض‌کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. نشان دهیدکه برد $T^*$ مکمل متعامد فضای پوچ $T$ است.

۵. فرض‌کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد.

اگر $T$ معکوس‌پذیر باشد. نشان‌دهید که $T^*$ نیز معکوس‌پذیر است و $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

۶. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی و $\beta$ و $\gamma$ بردارهای ثابتی از $V$ باشند. نشان دهید که $T\alpha = (\alpha|\beta)\gamma$ عملگری خطی روی $V$ تعریف می‌کند. همچنین نشان‌دهید $T$ دارای یك الحاقی است، و $T^*$ را هم به‌طور صریح توصیف کنید.
اکنون فرض کنید $V$ فضای $C^n$ باضرب داخلی استانده باشد و $\beta = (y_1, \cdots, y_n)$ و $\gamma = (x_1, \cdots, x_n)$، درایهٔ $j, k$ ماتریس $T$ درپایهٔ مرتب استانده چیست؟ رتبهٔ این ماتریس چند است؟

۷. نشان دهید حاصلضرب دوعملگر خودالحاق، عملگری است خودالحاق اگروتنها اگر دوعملگر با یکدیگرجابجا شوند.

۸. فرض کنید $V$ فضای برداری چندجمله‌ایهای برروی $R$ با درجه حداکثر ۳ و باضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

باشد. اگر $t$ عددی حقیقی باشد، چندجمله‌ای $g_t$ در $V$ راکه برای آن به‌ازای هر $f$ در $V$، $(f|g_t) = f(t)$ بیابید.

۹. $V$ را فضای ضرب داخلی تمرین ۸ و $D$ را عملگر مشتق‌گیری روی $V$ بگیرید. $D^*$ را بیابید.

۱۰. فرض کنید $V$ فضای ماتریسهای $n \times n$ برروی اعداد مختلط با ضرب داخلی $(A, B) = \operatorname{tr}(AB^*)$ باشد. فرض کنید $P$ ماتریس معکوس‌پذیر ثابتی از $V$ و $T_P$ عملگری خطی روی $V$ تعریف شده توسط $T_P(A) = P^{-1}AP$ باشد. الحاقی $T_P$ را بیابید.

۱۱. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $E$ عملگرخطی خودتوانی روی $V$ باشد، بدین‌معنی که $E = E^2$. ثابت‌کنید $E$ خودالحاق است اگروتنها اگر $EE^* = E^*E$.

۱۲. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی‌روی $V$ باشد. ثابت کنید که $T$ خودالحاق است اگروتنها اگربه‌ازای هر $\alpha$ در $V$ $(T\alpha|\alpha)$ حقیقی باشد.

www.riazisara.ir


## ۴.۸. عملگرهای یکانی

دراین بخش، مفهوم یکریختی بین دوفضای ضرب داخلی را مورد توجه قرارمی‌دهیم. اگر $V$ و $W$ فضاهایی برداری باشند، یك یکریختی از $V$ بروی $W$ تبدیل خطی یك به‌یکی از $V$ بروی $W$، یعنی، تناظری یك به یك بین عناصر $V$ و عناصر $W$ است که عملهای فضای برداری را هم حفظ می‌کند. اما یك فضای ضرب داخلی متشکل است ازیك فضای برداری ویك ضرب داخلی مشخص روی آن فضا. پس وقتی که $V$ و $W$ فضاهای ضرب داخلی باشند، به‌چنان یکریختی از $V$ بروی $W$ نیاز خواهیم داشت که نه‌تنها عملهای خطی بلکه ضربهای داخلی را نیزحفظ کند. یك یکریختی ازیك فضای ضرب داخلی بروی خودش یك «عملگریکانی» روی آن فضا نامیده می‌شود. ما مثالهای گوناگونی ازعملگرهای یکانی را مورد رسیدگی قرارخواهیم داد وخواص بنیادی آنها را محقق خواهیم ساخت.

**تعریف.** گیریم $V$ و $W$ دو فضای ضرب داخلی برروی یك هیأت و $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد. گوییم $T$ **ضربهای داخلی را حفظ می‌کند** هرگاه به‌ازای هر $\alpha$ و هر $\beta$ در $V$، $(T\alpha|T\beta)=(\alpha|\beta)$. یك **یکریختی** از $V$ بروی $W$ عبارت است از یك یکریختی فضای برداری مانند $T$ از $V$ بروی $W$ که ضربهای داخلی را نیز حفظ کند.

اگر $T$ ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$ ولذا $T$ لزوماً نامنفرد است. پس یك یکریختی از $V$ بروی $W$ را همچنین می‌توان به‌عنوان تبدیلی خطی از $V$ بروی $W$ که ضربهای داخلی را نیزحفظ می‌کند، تعریف کرد. اگر $T$ یك یکریختی از $V$ بروی $W$ باشد، آنگاه $T^{-1}$ یك یکریختی از $W$ بروی $V$ است؛ ازاین‌رو، وقتی که چنین $T$یی موجود باشد، به‌طور ساده خواهیم گفت که $V$ و $W$ **یکریخت** هستند. بدیهی است که یکریختی فضاهای ضرب داخلی، یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

**قضیهٔ ۱۰.** گیریم $V$ و $W$ دوفضای ضرب داخلی با بعدمتناهی و با ابعاد برابربرروی یك هیأت باشند. اگر $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد، احکام ذیل هم‌ارزند.

(۱) $T$ ضربهای داخلی را حفظ می‌کند.

(۲) $T$ یك یکریختی (فضای ضرب داخلی) است.

(۳) $T$ هرپایهٔ متعامد یکه از $V$ را بروی یك پایهٔ متعامد یکه از $W$ انتقال می‌دهد.

(۴) $T$ پایهٔ متعامد یکه‌ای از $W$ را بروی یك پایهٔ متعامد یکه از $W$ انتقال‌می‌دهد.

اثبات. (۲) $\leftarrow$ (۱). اگر $T$ ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$. پس، $T$ نامنفرد است، وچون بعد $(W)=$ بعد $(V)$، می‌دانیم که $T$ یك یکریختی فضای برداری است.

(۳) $\leftarrow$ (۲). فرض کنیم $T$ یك یکریختی باشد. $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ را یك پایهٔ متعامد یکه برای $V$ می‌گیریم. چون $T$ یك یکریختی فضای برداری است و بعد $(V)=$ بعد $(W)$، نتیجه می‌شود که $\{T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای $W$ است.

چون $T$ ضربهای داخلی را نیز حفظ می کند، $(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}$.

(۴) ← (۳). این مرحله نیازی به توضیح ندارد.

(۱) ← (۴). فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ چنان پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ باشد که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ نیز یك پایهٔ متعامد یکه برای $W$ باشد. آنگاه

$$(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}.$$

به‌ازای هر $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$ و $\beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$ در $V$، داریم

$$(\alpha | \beta) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$$

$$\begin{aligned}(T\alpha | T\beta) &= (\sum_j x_j T\alpha_j | \sum_k y_k T\alpha_k)\\ &= \sum_j \sum_k x_j \bar{y}_k (T\alpha_j | T\alpha_k)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j\end{aligned}$$

ولذا $T$ حاصلضربهای داخلی را حفظ می کند. □

**نتیجه.** گیریم $V$ و $W$ دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی برروی یك هیأت باشند. در این صورت $V$ و $W$ یکریختند اگروتنها اگر دارای ابعاد برابر باشند.

اثبات. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای $V$ و $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای $W$ باشد، فرض می کنیم $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشد که با $T\alpha_j = \beta_j$ تعریف می‌شود. دراین صورت $T$ یك یکریختی از $V$ بروی $W$ است. □

**مثال ۲۲.** اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی $n$ بعدی باشد، آنگاه هرپایهٔ متعامد یکهٔ مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یك یکریختی از $V$ بروی $F^n$ با ضرب داخلی استانده، تعیین می کند. این یکریختی چیزی نیست جز تبدیل خطی

$$T(x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

یکریختی ظاهراً متفاوتی از $V$ بروی فضای $F^{n\times 1}$ با $(X|Y) = Y^*X$ به عنوان ضرب داخلی هم وجود دارد که با $\mathcal{B}$ تعیین می‌شود. این یکریختی عبارت است از

$$\alpha \to [\alpha]_{\mathcal{B}}$$

یعنی تبدیلی که $\alpha$ را به‌ماتریس مختصات آن درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ می‌فرستد. به‌ازای هر پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$، این یك یکریختی فضای برداری است؛ اما، این یکریختی، یك یکریختی از دو فضای ضرب داخلی است اگروتنها اگر $\mathcal{B}$ متعامد یکه باشد.

**مثال ۲۳.** دراینجا به‌یکریختی پرمایه‌تری می‌پردازیم. گیریم $W$ فضای همهٔ

ماتریسهای $3\times 3$ چون $A$ برروی $R$ که متقارن کج هستند، یعنی $A^t=-A$ باشد. $W$ را به ضرب داخلی $(A|B)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB^t)$ مجهز می‌کنیم؛ $\frac{1}{2}$ صرفاً به‌منظور راحتی گذاشته شده است. $V$ را فضای $R^3$ با ضرب داخلی‌استانده می‌گیریم. فرض کنیم $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ تعریف شده توسط

$$T(x_1, x_2, x_3)=\begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. دراین صورت $T$ فضای $V$ را بروی $W$ می‌نگارد و با قراردادن

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB^t)&=x_3y_3+x_2y_2+x_3y_3+x_1y_1+x_2y_2+x_1y_1\\&=2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3).\end{aligned}$$

پس، $(\alpha|\beta)=(T\alpha|T\beta)$ و $T$ یك یکریختی فضای برداری است. توجه‌کنید که $T$ پایهٔ استانده $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ را بروی پایهٔ متعامد یکه متشکل از سه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

انتقال می‌دهد.

**مثال ۲۴.** تشریح یك یکریختی همیشه برحسب پایه‌های متعامد یکه نیست که راحت است. مثلاً، $G=P^*P$ را که درآن $P$ ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری با درایه‌های مختلط است در نظر می‌گیریم. فرض‌کنیم $V$ فضای ماتریسهای $n\times 1$ مختلط بـا ضرب داخلی $[X|Y]=Y^*GX$ باشد. $W$ را همان فضـای برداری ولـی با ضـرب داخلی استانده $(X|Y)=Y^*X$ می‌گیریم. می‌دانیم که $V$ و $W$ دوفضای ضرب داخلی یکریخت هستند. به‌نظر می‌رسد که مناسبترین راه برای تشریح یك یکریختی بین $V$ و $W$ طـریق زیر باشد:

گیریم $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ تعریف شده با $T(X)=PX$ باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}(TX|TY)&=(PX|PY)\\&=(PY)^*(PX)\\&=Y^*P^*PX\\&=Y^*GX\\&=[X|Y].\end{aligned}$$

از این رو، $T$ یك یکریختی است.

**مثال ۲۵.** گیریم $V$ فضای همهٔ توابع حقیقی پیوسته روی فاصلهٔ یکـهٔ $0 \leqslant t \leqslant 1$ با ضرب داخلی

$$[f|g]=\int_0^1 f(t)g(t)t^2dt$$

باشد. $W$ را همان فضای برداری ولی با ضرب داخلی

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)\ dt$$

می‌گیریم. فرض‌کنیم $T$ تبدیلی خطی از $V$ در $W$ باشدکه با

$$(Tf)(t)=tf(t)$$

داده می‌شود. دراین صورت $(Tf|Tg)=[f|g]$، و لذا $T$ ضربهای داخلـی را حفظ می‌کند؛ ولی $T$ یك یکریختی از $V$ بروی $W$ نیست، چراکه برد $T$ برابر تمام $W$ نیست. بدیهی است، این امر به این دلیل رخ می‌دهدکه بعد فضای برداری زمینه متناهی نیست.

**قضیهٔ ۱۱.** گیریم $V$ و $W$ دوفضای ضرب داخلی برروی یك هیات و $T$ تبدیلی‌خطی از $V$ در $W$ باشد. دراین صورت $T$ ضربهای داخلی را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$.

اثبات. اگر $T$ ضربهای داخلی را حفظ‌کند، «نرمها را نیز حفظ می‌کند». فـرض کنیم به ازای هر $\alpha$ در $V$، $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$. در این صورت $\|T\alpha\|^2=\|\alpha\|^2$. حال با استفاده از اتحاد قطبی مناسبی چون (۸ـ۳) یا (۸ـ۴) و این واقعیت که $T$ خطی‌است، به‌آسانی دیده می‌شودکه به ازای هر $\alpha$ وهر $\beta$ در $V$، $(\alpha|\beta)=(T\alpha|T\beta)$. □

**تعریف.** یك عملگریکانی روی یك فضای ضرب‌داخلی، عبارت‌است از یك‌یکریختی ازآن فضا بروی خودش.

حاصل‌ضرب دوعملگر یکانی عملگری‌است یکانی زیرا ، اگر $U_1$ و $U_2$ یکانی باشند، آنگاه $U_2U_1$ معکوس‌پذیراست و به‌ازای هر $\alpha$، $\|U_2U_1\alpha\| = \|U_1\alpha\| = \|\alpha\|$. همچنین، معکوس یك عملگر یکانی عملگری است یکانی؛ زیرا $\|U\alpha\| = \|\alpha\|$ حاکی است که $\|U^{-1}\beta\| = \|\beta\|$؛ در اینجا $U\alpha = \beta$. چون عملگر همانی به‌وضوح یکانی است، می بینیم که مجموعهٔ همهٔ عملگرهای یکانی روی یك فضای ضرب داخلی تحت عمل ترکیب یك گروه است.

اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $U$ عملگری خطی روی $V$ باشد ، قضیهٔ ۱۰ حاکی است که $U$ یکانی است اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$ ، $(U\alpha|U\beta) = (\alpha|\beta)$؛ یا ، اگروتنها اگر به‌ازای یك (هر) پایهٔ متعامدیکه $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$، این درست باشد که $\{U\alpha_1, \ldots, U\alpha_n\}$ هم یك پایهٔ متعامد یکه است.

**قضیه ۱۲.** گیریم $U$ عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی $V$ باشد. آنگاه $U$ یکانی است اگر وتنها اگر $U^*$ ، الحاقی $U$ ، وجود داشته باشد و $UU^* = U^*U = I$ .

اثبات. فرض کنیم $U$ یکانی باشد. دراین صورت $U$ معکوس‌پذیر است و به ازای هر $\alpha$ و هر $\beta$

$$(U\alpha|\beta) = (U\alpha|UU^{-1}\beta) = (\alpha|U^{-1}\beta).$$

ازاین رو $U^{-1}$ الحاقی $U$ است.

بعکس، فرض کنیم $U^*$ وجود داشته باشد و $UU^* = U^*U = I$. آنگاه $U$ معکوس‌پذیر است و $U^{-1} = U^*$. لذا، کافی است نشان دهیم که $U$ ضربهای داخلی را حفظ می‌کند به ازای همهٔ $\alpha$ ها و همهٔ $\beta$ ها داریم

$$\begin{aligned}(U\alpha|U\beta) &= (\alpha|U^*U\beta)\\ &= (\alpha|I\beta)\\ &= (\alpha|\beta) \cdot \square\end{aligned}$$

**مثال ۲۶.** $C^{n\times 1}$ را با ضرب داخلی $(X|Y) = Y^*X$ درنظر می گیریم. فرض کنیم $A$ ماتریسی $n\times n$ برروی $C$ و $U$ عملگر خطی تعریف شده توسط $U(X) = AX$ باشد. آنگاه به ازای هر $X$ وهر $Y$

$$(UX|UY) = (AX|AY) = Y^*A^*AX.$$

ازاین رو، $U$ یکانی است اگر وتنها اگر $A^*A = I$ .

**تعریف.** ماتریس $n\times n$ مختلط $A$ **یکانی** نامیده می‌شود ، هرگاه $A^*A = I$.

**قضیهٔ ۱۳.** فرض‌کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $U$ عملگری خطی روی $V$ باشد. در این صورت $U$ یکانی است اگر وتنها اگر ماتریس $U$ دریك (یا هر) پایهٔ

متعامد یکه مرتب ماتریسی یکانی باشد.

اثبات. دراین مرحله ازکار، این چندان قضیه‌ای نیست، ولی ما عمدتاً آن رابرای تأکید بیان می کنیم. اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ پایهٔ متعامدیکهٔ مرتبی برای $V$ و $A$ ماتریس $U$ نسبت به $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه $A^*A=I$ اگر وتنها اگر $U^*U=I$. اکنون نتیجهٔ ازقضیهٔ ۱۲ حاصل می‌شود. □

گیریم $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد. این عبارت که $A$ یکانی است، به‌طور ساده بدین‌معنی است که

$$(A^*A)_{jk}=\delta_{jk}$$

یا

$$\sum_{r=1}^{n}\overline{A_{rj}}A_{rk}=\delta_{jk}\,.$$

به‌بیان دیگر، معنی آن این است که ستونهای $A$ مجموعهٔ متعامدیکه‌ای ازماتریسهای ستونی، نسبت به ضرب داخلی استانده $(X|Y)=Y^*X$، تشکیل می دهند. چون $A^*A=I$ اگر وتنها اگر $AA^*=I$، می‌بینیم که $A$ دقیقاً وقتی یکانی است که سطرهای $A$ متضمن مجموعهٔ متعامد یکه‌ای از $n$ تاییهای واقع در $C^n$ (باضرب داخلی استانده) باشند. لذا، با به‌کارگیری ضربهای داخلی استانده، $A$ یکانی است اگر وتنها اگر سطرها وستونهای $A$ مجموعه‌های متعامد یکه باشند. دراینجا مثالی ازقدرت این قضیه حاکی از اینکه هرمعکوس یك طرفه یك ماتریس یك معکوس دوطرفه آن هم هست، به چشم می‌خورد. همان‌طور که در بالا هم انجام دادیم، با به کاربستن این قضیه مثلا روی ماتریسهای حقیقی، نتیجهٔ زیرعاید می‌شود. فرض کنیم یك آرایهٔ مربعی از اعداد حقیقی داشته باشیم به‌طوری که مجموع توانهای دوم درایه‌های هر سطر برابر ۱، وسطرهای متمایز متعامد باشند. آنگاه مجموع توانهای دوم درایه‌های هرستون برابر ۱ است وستونهای متمایز هم متعامد هستند. اگربدون استفاده‌از هرگونه معلوماتی دربارهٔ ماتریسها، اثبات این مطلب را برای یك آرایهٔ ۳ × ۳ بنویسید، مسلماً تحت تأثیر قرار خواهید گرفت.

**تعریف.** یك ماتریس $n\times n$ حقیقی یا مختلط $A$، **متعامد** نامیده می‌شود، هرگاه $A^tA=I$.

هر ماتریس متعامد حقیقی، یکانی هم هست؛ وهرماتریس یکانی متعامد است اگر و تنها اگر همهٔ درایه‌هایش حقیقی باشند.

**مثال ۲۷.** حال چند مثال ازماتریسهای یکانی ومتعامد عرضه می کنیم.

(الف) ماتریس ۱ × ۱، $[c]$ متعامد است اگر وتنها اگر $c=\pm 1$ ویکانی است اگر

و تنها اگر $\bar{c}c = ۱$، شرط دوم (به‌طور بدیهی) بدین معنی است که $|c| = ۱$ یا $c = e^{i\theta}$ که در آن $\theta$ حقیقی است.

(ب) فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه $A$ متعامد است اگر و تنها اگر

$$A^t = A^{-۱} = \frac{۱}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

بسادگی دیده می‌شود که دترمینان هرماتریس متعامد برابر $\pm ۱$ است. پس $A$ متعامداست اگر و تنها اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

که در آن $a^۲ + b^۲ = ۱$. این دوحالت به وسیلهٔ مقدار $\det A$ مشخص می‌شوند.

(پ) روابط معروف بین توابع مثلثاتی نشان می‌دهند که ماتریس

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

متعامد است. اگر $\theta$ عددی حقیقی باشد، آنگاه $A_\theta$ عبارت است ازماتریس عملگرخطی $U_\theta$، دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\theta$، درپایهٔ مرتب استاندهٔ $R^۲$. این بیان که $A_\theta$ یک ماتریس متعامد حقیقی (و ازاین رو یکانی) است، جز اینکه $U_\theta$ عملگری یکانی است معنایی ندارد واین هم بدین معنی است که ضربهای نقطه‌ای حفظ می‌شوند.

(ت) فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه $A$ یکانی است اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix}\bar{a} & \bar{c}\\ \bar{b} & \bar{d}\end{bmatrix}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

قدرمطلق دترمینان هر ماتریس یکانی برابر ۱ است و از این روعددی مختلط بـه صورت $e^{i\theta}$ ، به ازای عدد حقیقی $\theta$ ، است. پس ، $A$ یکانی است‌اگر وتنها اگر

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & e^{i\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{bmatrix}$$

که‌در آن $\theta$ عددی‌حقیقی است و $a$ و $b$ اعدادی مختلط باشرط $|a|^۲+|b|^۲=۱$ هستند.

همان طور که قبلا هم ذکرشد، عملگرهایی یکانی روی یك فضای ضرب داخلی‌یك گروه تشکیل می‌دهند. ازاین مطلب وقضیهٔ ۱۳ نتیجه می شودکه مجموعهٔ $U(n)$ متشکل از همهٔ‌ماتریسهای یکانی $n\times n$ نیزیك گروه است. پس،معکوس‌یك ماتریس‌یکانی‌وحاصل‌ضرب دوماتریس یکانی ماتریسی است یکانی. البته این مطلب به‌طور مستقیم هم به‌آسانی دیـده می‌شود. ماتریس $n\times n$ای مانند $A$ بـا درایه‌های مختلط یکانـی است اگر و تنها اگـر $A^{-۱}=A^*$. بنابراین، اگر $A$ یکانی باشد، داریم $(A^{-۱})^*=(A^*)^{-۱}=A=(A^{-۱})^{-۱}$. اگر $A$ و $B$ دوماتریس یکانی $n\times n$ باشند، آنگاه

$$(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}=B^*A^*=(AB)^*.$$

فرایندگرام ــ اشمیت در $C^n$ نتیجه‌ای جالب برای ماتریسها داردکه متضمن گروه $U(n)$ است.

**قضیهٔ ۱۴.** به‌ازای هر ماتریس $n\times n$ مختلط معکوس‌پذیر $B$ ماتریس پایین مثلثی یکتایی چون $M$ ، با درایه‌های مثبت روی قطر اصلی، وجود داردکه $MB$ یکانی است.

اثبات. سطرهای $\beta_۱$ ، . . . ، $\beta_n$ از $B$ یك پایه برای $C^n$ تشکیل می‌دهند. گیریم $\alpha_۱$ ، . . . ، $\alpha_n$ بـردارهای حاصل‌از $\beta_۱$ ، . . . ، $\beta_n$ با فـرایند گرام ـ اشمیت باشند. دراین‌صورت، به‌ازای $۱\leqslant k\leqslant n$ ، $\{\alpha_۱,\ \dots,\ \alpha_k\}$ پایهٔ متعامدی‌برای زیرفضای‌پدید‌آمده توسط $\{\beta_۱,\ \dots,\ \beta_k\}$ است و

$$\alpha_k=\beta_k-\sum_{j<k}\frac{(\beta_k|\alpha_j)}{||\alpha_j||^۲}\alpha_j\ .$$

ازاین‌رو، به‌ازای هر $k$ اسکالرهای یکتا چون $C_{kj}$ وجود دارندکه

$$\alpha_k=\beta_k-\sum_{j<k}C_{kj}\beta_j\ .$$

گیریم $U$ ماتریسی یکانی با سطرهای

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}$$

و $M$ ماتریس تعریف شده توسط

$$M_{kj} = \begin{cases} -\frac{1}{\|\alpha_k\|}C_{kj} & \text{هرگاه } j<k \text{،} \\ \frac{1}{\|\alpha_k\|} & \text{هرگاه } j=k \text{،} \\ 0 & \text{هرگاه } j>k \text{،} \end{cases}$$

باشد. دراین‌صورت $M$ پایین مثلثی است، به‌این معنی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن ۰ هستند. درایه‌های $M_{kk}$ از $M$ که روی قطر اصلی قرار دارند همه مثبت هستند و

$$\frac{\alpha_k}{\|\alpha_k\|} = \sum_{j=1}^{n} M_{kj}\beta_j, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

مسلماً این تساویها چیزی جز

$$U = MB$$

را بیان نمی‌کنند. برای اثبات یکتایی $M$، فرض کنیم $T^+(n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای پایین مثلثی $n \times n$ مختلط با درایه‌های مثبت روی قطر اصلی را نشان دهد. فرض کنیم $M_1$ و $M_2$ عناصری از $T^+(n)$ باشند که به‌ازای $i = 1, 2$، $M_iB$ در $U(n)$ قرار داشته باشد. دراین‌صورت چون $U(n)$ یك گروه است

$$(M_1B)(M_2B)^{-1} = M_1M_2^{-1}$$

نیز در $U(n)$ قرار می‌گیرد. ازطرف دیگر، هرچند کلاً آشکار نیست، $T^+(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی یك گروه است. راهی برای‌دیدن این مطلب، درنظرگرفتن خواص هندسی تبدیلهای خطی

$$X \to MX, \qquad (M \text{ در } T^+(n))$$

روی فضای ماتریسهای ستونی است. پس $M_2^{-1}$، $M_1M_2^{-1}$، $(M_1M_2^{-1})^{-1}$ همه در $T^+(n)$ قرار دارند. اماچون $M_1M_2^{-1}$ در $U(n)$ است، $(M_1M_2^{-1})^{-1} = (M_1M_2^{-1})^*$. ترانهاده یا ترانهادهٔ مزدوج هرماتریس پایین مثلثی، یك‌ماتریس بالا مثلثی است. بنابراین، $M_1M_2^{-1}$ هم بالا مثلثی وهم‌پایین مثلثی است، یعنی قطری است. یك ماتریس قطری یکانی است اگر و تنها اگر قدرمطلق هریك‌از درایه‌های روی قطر اصلی‌آن مساوی ۱ باشد؛ اگر درایه‌های قطری همه مثبت باشند، باید برابر ۱ باشند. از این‌رو، $M_1M_2^{-1} = I$ و $M_1 = M_2$. □

فرض کنیم $GL(n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ مختلط معکوس‌پذیر رانشان‌دهد.

آنگاه $GL(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. این گروه را **گروه خطی عمومی** می‌نامیم. قضیهٔ ۱۴ با نتیجهٔ ذیل هم‌ارز است.

**نتیجه.** به‌ازای هر $B$ در $GL(n)$ ماتریسهای یکتایی چون $N$ و $U$ وجود دارند که $N$ در $T^+(n)$ و $U$ در $U(n)$ است، و

$$B = N \cdot U \,.$$

اثبات. بنا بر قضیه، ماتریس یکتایی چون $M$ در $T^+(n)$ وجود دارد که $MB$ در $U(n)$ است. فرض کنیم $MB = U$ و $N = M^{-1}$. دراین‌صورت، $N$ در $T^+(n)$ است و $B = N \cdot U$. از طرف دیگر، اگر دوماتریس $N$ و $U$ داده شده باشند به‌طوری‌که $N$ در $T^+(n)$ و $U$ در $U(n)$ باشد و $B = N \cdot U$، آنگاه $N^{-1}B$ در $U(n)$ قرار دارد و $N^{-1}$ همان ماتریس یکتای $M$ است که قضیه مشخص می‌کند؛ علاوه‌براین، $U$ لزوماً همان $N^{-1}B$ است. □

**مثال ۲۸.** گیریم $x_1$ و $x_2$ اعدادی حقیقی باشند که $x_1^2 + x_2^2 = 1$ و $x_1 \neq 0$. فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با به‌کار بستن فرایند گرام ـ اشمیت برسطرهای $B$، بردارهای

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (x_1, x_2, 0) \\
\alpha_2 &= (0, 1, 0) - x_2(x_1, x_2, 0) \\
&= x_1(-x_2, x_1, 0) \\
\alpha_3 &= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

حاصل می‌شوند. $U$ را ماتریسی باسطرهای $\alpha_1$، $(\alpha_2/x_1)$، و $\alpha_3$ می‌گیریم. دراین‌صورت $U$ یکانی است و

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{x_2}{x_1} & \dfrac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

حال با ضرب در معکوس ماتریس

$$M=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -\frac{x_۲}{x_۱} & \frac{۱}{x_۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

درمی‌یابیم که

$$\begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ x_۲ & x_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ & ۰ \\ -x_۲ & x_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

اکنون باختصار تغییرمختصات دریك‌فضای ضرب داخلی را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $V$ یك‌فضای‌ضرب‌داخلی با بعدمتناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_۱,\cdots,\alpha_n\}$ و $\mathcal{B}'=\{\alpha'_۱,\cdots,\alpha'_n\}$ دوپایهٔ متعامد یکهٔ مرتب برای $V$ باشند. ماتریس $n\times n$ (لـزوماً معکوس‌پذیر) یکتایـی چون $P$ وجود دارد که به ازای هر $\alpha$ در $V$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'}=P^{-۱}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

اگر $V$ یکتا عملگر خطی روی $V$ تعریف شده توسط $U\alpha_j=\alpha'_j$ باشد، آنگاه $P$ عبارت است از ماتریس $U$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$:

$$\alpha'_k=\sum_{j=۱}^{n}P_{jk}\alpha_j.$$

چون $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دوپایهٔ متعامدیکه هستند، $U$ عملگری یکانی و $P$ ماتریسی یکانی است. اگر $T$ عملگر خطی دلخواهی روی $V$ باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'}=P^{-۱}[T]_{\mathcal{B}}P=P^*[T]_{\mathcal{B}}P.$$

**تعریف.** گیریم $A$ و $B$ دوماتریس $n\times n$ مختلط باشند. گوییم $B$ **هم‌ارز یکانی** با $A$ است، هرگاه‌ماتریس یکانی $n\times n$ ی‌مانند $P$ وجودداشته باشد به‌طوری‌که $B=P^{-۱}AP$. گوییم $B$ **هم‌ارزمتعامد** با $A$ است، هرگاه ماتریس متعامد $n\times n$ ی مانند $P$ وجـود داشته باشد به طوری‌که $B=P^{-۱}AP$.

با این تعریف آنچه راکه دربالا مشاهده‌کردیم می‌توانیم به شرح ذیل بیان‌کنیم: اگر $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دوپایهٔ متعامد یکه مرتب برای $V$ باشند، آنگاه به ازای هر عملگر خطی $T$

روی $V$ ماتریس $[T]_{\mathfrak{B}}$ هم‌ارز یکانی با ماتریس $[T]_{\mathfrak{B}}$ است. درحالتی‌که $V$ یك فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، این ماتریسها ، با واسطهٔ یك ماتریس متعامد حقیقی، هم ارز متعامد هستند.

## تمرین

۱. ماتریسی یکانی بیابیدکه متعامد نباشد، وماتریس متعامدی بیابیدکه یکانی نباشد.

۲. فرض‌کنید $V$ فضای ماتریسهای $n\times n$ مختلط با ضرب داخلی $(A|B)=\operatorname{tr}(AB^*)$ باشد. به ازای هر $M$ در $V$ ، $T_M$ را عملگری خطی بگیریدکه بـا $T_M(A)=MA$ تعریف می‌شود. نشان دهید کـه $T_M$ یکانی است اگـر و تنها اگر $M$ ماتریسی یکانی باشد.

۳. فرض‌کنید $V$ مجموعهٔ اعداد مختلط باشدکه به عنوان یك فضای برداری حقیقی درنظر گرفته شده است.

(الف) نشان دهید $(\alpha|\beta)=\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})$ ضربی داخلی روی $V$ تعریف می‌کند.

(ب) یك یکریختی (فضای ضرب داخلی) از $V$ بروی $R^2$ با ضرب داخلی استانده عرضه‌کنید.

(پ) به ازای هرγ در $V$ ، $M_\gamma$ را عملگرخطی‌روی $V$ تعریف شده با $M_\gamma\alpha=\gamma\alpha$ بگیرید ونشان دهید $(M_\gamma)^*=M_{\bar{\gamma}}$

(ت) به ازای‌کدام اعداد مختلط مانند $\gamma$ ، ماتریس $M_\gamma$ خودالحاق است؟

(ث) به ازای‌کدام $\gamma$ ، ماتریس $M_\gamma$ یکانی است؟

(ج) به ازای‌کدام $\gamma$ ، ماتریس $M_\gamma$ مثبت است؟

(چ) $\det(M_\gamma)$ چیست؟

(ح) ماتریس $M_\gamma$ را درپایهٔ $\{1,i\}$ به دست‌آورید.

(خ) اگر $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد، شرایطی لازم وکافی برای $T$ بیابیدکـه به ازای $\gamma$ یی مساوی $M_\gamma$ باشد.

(د) عملگری یکانی روی $V$ بیابیدکه به ازای هر $\gamma$ مساوی $M_\gamma$ نباشد.

۴. فرض‌کنید $V$ فضای $R^2$ باضرب داخلی استانده باشد. اگر $U$ عملگری یکانی روی $V$ باشد، نشان دهیدماتریس $U$ درپایهٔ مرتب‌استانده، به ازای $\theta$ یی‌حقیقی، $0\leqslant\theta<2\pi$. یکی از دوماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$

$U_\theta$ را عملگر خطی متناظر به اولین ماتریس، یعنی $U_\theta$ را دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ بگیرید. حال خود را متقاعد کنید که هر عملگر یکانی روی $V$ یا یك دوران است یا یك انعکاس حول محور $\epsilon_1$ و به دنبالش یك دوران.

(الف) $U_\theta U_\phi$ چیست؟

(ب) نشان دهید که $U^*_\theta = U_\theta$.

(پ) فرض کنید $\phi$ یك عدد حقیقی ثابت و $\mathcal{B}=\{\alpha_1 \text{ و } \alpha_2\}$ پایهٔ متعامد یکهٔ حاصل از دوران $\{\epsilon_1 \text{ و } \epsilon_2\}$ به اندازهٔ زاویه $\phi$ باشد، یعنی $\alpha_j = U_\phi \epsilon_j$. اگر $\theta$ عدد حقیقی دیگری باشد، ماتریس $U_\theta$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ چیست؟

۵. فرض کنید $V$ فضای $R^3$ با ضرب داخلی استانده باشد. فرض کنید $W$ صفحهٔ پدیدآمده توسط $\alpha=(1, 1, 1)$ و $\beta=(1, 1, -2)$ باشد. $U$ را عملگری خطی بگیرید که به‌طور هندسی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $U$ دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ حول خط مستقیم مار ازمبدأ است که بر $W$ عمود است. عملاً دو دوران از این نوع وجود دارد. یکی را انتخاب کنید و ماتریس $U$ را در پایهٔ مرتب استانده بیابید. (یکی از راههایی را که می‌توان در پیش گرفت این است. $\alpha_1$ و $\alpha_2$ یی را که پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $W$ تشکیل می‌دهند، بیابید. $\alpha_3$ را برداری با نرم ۱ بگیرید که بر $W$ عمود باشد. ماتریس $U$ در پایهٔ $\{\alpha_1 \text{ و } \alpha_2 \text{ و } \alpha_3\}$ را بیابید. یك تغییر پایه انجام دهید.)

۶. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $W$ زیرفضایی از $V$ باشد. در این صورت $V=W\oplus W^\perp$؛ یعنی، هر $\alpha$ در $V$ به طور یکتا به صورت $\alpha=\beta+\gamma$ با $\beta$ در $W$ و $\gamma$ در $W^\perp$. قابل بیان است. حال عملگری خطی چون $U$ را طبق $U\alpha=\beta-\gamma$ تعریف کنید.

(الف) ثابت کنید $U$ هم خود الحاق است و هم یکانی.

(ب) اگر $V$ فضای $R^3$ با ضرب داخلی استانده و $W$ زیرفضای پدیدآمده توسط $(1, 0, 1)$ باشد، ماتریس $U$ را در پایهٔ مرتب استانده بیابید.

۷. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی مختلط و $T$ عملگر خطی خودالحاقی روی $V$ باشد. نشان دهید

(الف) به ازای هر $\alpha$ در $V$، $\|\alpha+iT\alpha\|=\|\alpha-iT\alpha\|$

(ب) $\alpha+iT\alpha=\beta+iT\beta$ اگر و تنها اگر $\alpha=\beta$.

(پ) $I+iT$ نامنفرد است.

(ت) $I-iT$ نامنفرد است.

(ث) حال فرض کنید $V$ با بعد متناهی باشد. ثابت کنید

$$U=(I-iT)(I+iT)^{-1}$$

عملگری یکانی است؛ $U$ را **مبدل کیلی** برای $T$ می‌نامیم. بــه معنای خاصی، $U=f(t)$ و $f(x)=\frac{1-ix}{1+ix}$.

۸. اگر $\theta$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید ماتریسهای ذیل به‌طور یکانی هم‌ارزند.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}.$$

۹. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، $T$ عملگــر خطی مثبتی روی $V$ و $P_T$ ضرب داخلی روی $V$ تعریف شده با $p_T(\alpha,\beta)=(T\alpha|\beta)$ باشد. فرض کنید $U$ عملگری خطی روی $V$ و $U^*$ الحاقی آن نسبت به $(\,|\,)$ باشد. ثابت کنید که $U$ نسبت به ضرب داخلی $p_T$ یکانی است اگر وتنها اگر $T=U^*TU$.

۱۰. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. به ازای هــر $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $T_{\alpha,\beta}$ را عملگر خطــی روی $V$ تعریف شــده با $T_{\alpha,\beta}(\gamma)=(\gamma|\beta)\alpha$ بگیرید ونشان دهید:

(الف) $T^*_{\alpha,\beta}=T_{\beta,\alpha}$.
(ب) $\operatorname{tr}(T_{\alpha,\beta})=(\alpha|\beta)$.
(پ) $T_{\alpha,\beta}T_{\gamma,\delta}=T_{\alpha,(\beta|\gamma)\delta}$.
(ت) تحت چه شرایطی $T_{\alpha,\beta}$ خودالحاق است؟

۱۱. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی $m$ بعدی بر روی هیأت $F$ و $L(V,V)$ فضای عملگرهای خطی روی $V$ باشد. نشان دهید یك ضرب‌داخلی یکتا روی $L(V,V)$ با این خاصیت وجود دارد که به ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $\|T_{\alpha,\beta}\|^2=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2$. ($T_{\alpha,\beta}$ عملگر تعریف شده در تمرین ۱۰ است.) یك یکریختی بین $L(V,V)$ با این ضرب‌داخلی‌وفضای‌ماتریسهای $n\times n$ برروی $F$ باضرب‌داخلی $(A|B)=\operatorname{tr}(AB^*)$ بیابید.

۱۲. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. در تمرین ۶ نشان دادیم که عملگرهایی خطی روی $V$ که هم خودالحاق وهم یکانــی باشند چگونــه ساخته می‌شوند. حال ثابت کنید که عملگر دیگری ازاین نوع وجود ندارد، یعنی ثابت کنید که هرعملگر یکانی خودالحاق، اززیرفضایی چون $W$ طبــق آنچه‌که در تمریــن ۶ تشریح شد ناشی می‌شود.

۱۳. فرض کنید $V$ و $W$ دوفضای‌ضرب داخلی بابعد متناهی وبا ابعاد مساوی باشند. فرض کنید $U$ یك یکریختی از $V$ بروی $W$ باشد. نشان دهید:

(الف) نگاشت $T \to UTU^{-1}$ یك یکریختی از فضای برداری $L(V, V)$ بروی فضای برداری $L(W, W)$ است.
(ب) بەازای هر $T$ در $L(V, V)$، $\operatorname{tr}(UTU^{-1}) = \operatorname{tr}(T)$.
(پ) $UT_{\alpha,\beta}U^{-1} = T_{U\alpha, U\beta}$ ($T_{\alpha,\beta}$ درتمرین ۱۰ تعریف شده است).
(ت) $(UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1}$.
(ث) اگر $L(V, V)$ را بەضرب داخلی $(T_1|T_2) = \operatorname{tr}(T_1T_2)^*$ مجهز و بەهمین نحو درمورد $L(W, W)$ عمل کنیم، آنگاه $T \to UTU^{-1}$ یك یکریختی فضاهای ضرب داخلی خواهد بود.

۱۴. اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی باشد، یك **حرکت صلب** عبارت است ازتابعی چون $T$ (نه لزوماً خطی) از $V$ در $V$، بەطوری که بەازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$،

$$\|T\alpha - T\beta\| = \|\alpha - \beta\|.$$

هر عملگر یکانی خطی مثالی ازحرکت صلب است. مثالی دیگر،انتقال بەاندازه یك بردار ثابت $\gamma$ است:

$$T_\gamma(\alpha) = \alpha + \gamma$$

(الف) فرض کنید $V$ فضای $R^2$ باضرب داخلی استانده باشد. فرض کنید $T$ حرکتی صلب از $V$ باشد، و نیز $T(0) = 0$. ثابت کنید $T$ خطی وعملگری یکانی است.
(ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را بەکارگیرید و ثابت کنید کــه هرحرکت صلب از $R^2$ ترکیبی است ازیك انتقال وبەدنبال آن عملگری یکانی.
(پ) اکنون نشان دهید که هرحرکت صلب از $R^2$ یا انتقالی است کــه یك دوران بەدنبال آن می‌آید یا انتقالی است که بەدنبالش یك انعکاس وسپس یك دوران‌می‌آید.

۱۵. یك عملگریکانی روی $R^4$ (باضرب داخلی استانده) بەطور ساده عملگری خطی‌است که فرم درجه دوم

$$\|(x, y, z, t)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

را حفظ می‌کند، یعنــی عملگری خطی چــون $U$ است کــه به ازای هــر $\alpha$ در $R^4$، $\|U\alpha\|^2 = \|\alpha\|^2$. دربخش معینی از نظریهٔ نسبیت یافتن عملگرخطی $T$ که فرم

$$\|(x, y, z, t)\|_L^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

را حفظ کند، موردنظراست. $\| \quad \|_L^2$ منتج‌ازضربی داخلی نیست، بلکه ازچیزی‌بەنام «متریك‌لورنتس[1]» (که وارد بحث آن نمی‌شویم) ناشی می‌شود. بدین‌دلیل، عملگری خطی‌چون $T$ روی $R^4$ که بەازای هر $\alpha$ در $R_4$، $\|T\alpha\|_L^2 = \|\alpha\|_L^2$، یك **تبدیل‌لورنتس** نامیده می‌شود.
(الف) نشان دهید تابع $U$ که با

1. Lorentz

$$U(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، یك یکریختی از $R^4$ بروی فضای برداری حقیقی $H$ متشکل ازهمهٔ ماتریسهای مختلط ۲ × ۲ خودالحاق است.

(ب) نشان دهید $\|\alpha\|_L^2 = \det(U\alpha)$.

(پ) فرض کنید $T$ یك عملگرخطی (حقیقی) روی فضای $H$ متشکل از ماتریسهای خودالحاق ۲ × ۲ باشد. نشان دهید $L = U^{-1}TU$ عملگری خطی روی $R^4$ است.

(ت) گیریم $M$ یك ماتریس مختلط ۲ × ۲ باشد. نشان دهید که $T_M(A) = M^*AM$ عملگری خطی چون $T_M$ روی $H$ تعریف می‌کند. (حتماً بررسی کنیدکه $T_M$، $H$ را در $H$ می‌نگارد.)

(ث) اگر $M$ ماتریسی ۲ × ۲ باشد با $|\det M| = 1$، نشان دهید که $L_M = U^{-1}T_MU$ یك تبدیل لورنتس روی $R^4$ است.

(ج) یك تبدیل لورنتس بیابید که به‌صورت $L_M$ نباشد.

## ۸.۵. عملگرهای نرمال

هدف اصلی دراین بخش حل مسئلهٔ زیراست. اگر $T$ عملگری خطی روی یك فضای‌ضرب داخلی با بعد متناهی $V$ باشد، تحت چه شرایطی $V$ دارای یك پایهٔ متعامد یکهٔ متشکل از بردارهای سرشت‌نمای $T$ است؟ به‌بیان دیگر، چه‌وقت یك‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathcal{B}$ برای $V$وجود داردکه ماتریس $T$ درپایهٔ $\mathcal{B}$ قطری باشد؟

کار خود را با استخراج چند شرط لازم روی $T$ که بعداً نشان خواهیم داد این شرایط کافی نیزهستند، آغاز می‌کنیم. فرض‌کنیم $\mathcal{B}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ با خاصیت

$$T\alpha_j = c_j\alpha_j, \quad j = 1, \dots, n \tag{۸-۱۶}$$

باشد. این شرط صرفاً بیان می‌کندکه ماتریس $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ ماتریسی قطری با درایه‌های قطری $c_1$، ...، $c_n$ است. عملگر الحاقی $T^*$ در همین پایهٔ مرتب توسط ماتریس ترانهادهٔ مزدوج، یعنی ماتریس قطری‌با درایه‌های‌قطری $\bar{c}_1$، ...، $\bar{c}_n$ نمایش داده می‌شود. اگر $V$ یك‌فضای‌ضرب داخلی‌حقیقی‌باشد، اسکالرهای $c_1$، ...، $c_n$ (مسلماً) حقیقی هستند، و از این‌رو باید داشته باشیم $T = T^*$. به‌بیان دیگر، اگر $V$ یك فضای‌ضرب‌داخلی‌حقیقی با بعد متناهی باشد و $T$ هم عملگری خطی‌که برایش یك پایهٔ متعامد یکه از بردارهای سرشت‌نما وجود دارد، آنگاه $T$ باید خودالحاق باشد. اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی مختلط باشد، لزومی ندارد که اسکالرهای $c_1$، ...، $c_n$ حقیقی باشند، یعنی لازم نیست که $T$ خودالحاق باشد. ولی توجه کنیدکه $T$ باید در

www.riazisara.ir



$$TT^* = T^*T \qquad (۱۷-۸)$$

صدق کند. زیرا، هردو ماتریس قطری با هم جابجا می‌شوند وچون $T$ و $T^*$ درپایهٔمرتب $\mathscr{B}$ هردو توسط ماتریسهای قطری نمایش داده می‌شوند، (۸-۱۷) برقرار است. این واقعیت، نسبتاً جالب است که درحالت مختلط هم این شرط برای ایجاب وجود یك پایهٔ متعامدیکه از بردارهای سرشت‌نما کافی است.

**تعریف.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. گوییم $T$ **نرمال** است، هرگاه با الحاقیش جابجا شود، یعنی $TT^* = T^*T$.

هرعملگرخودالحاق نرمال است، همان‌طورکه هرعملگر یکانی هم نرمال است. هرمضرب اسکالری هرعملگر نرمال عملگری است نرمال. اما، مجموع و حاصل‌ضرب عملگرهای نرمال، درحالت عمومی نرمال نیستند. گرچه به‌هیچ‌وجه لازم نیست، ولی ما مطالعهٔ دربارهٔ عملگرهای نرمال را با بررسی عملگرهای خودالحاق آغاز می‌کنیم.

**قضیهٔ ۱۵.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی و $T$ عملگرخطی خودالحاق روی $V$ باشد. در این صورت هرمقدار سرشت‌نمای $T$ حقیقی است و بردارهای سرشت‌نمای $T$ وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای متمایز، متعامد هستند.

اثبات. فرض کنیم $c$ یك مقدار سرشت‌نمای $T$ باشد، یعنی، به‌ازای بردارغیرصفری چون $\alpha$، $T\alpha = c\alpha$. در این صورت:

$$\begin{aligned} c(\alpha|\alpha) &= (c\alpha|\alpha) \\ &= (T\alpha|\alpha) \\ &= (\alpha|T\alpha) \\ &= (\alpha|c\alpha) \\ &= \bar{c}(\alpha|\alpha)\,. \end{aligned}$$

چون $(\alpha|\alpha) \neq 0$، باید داشته باشیم $c = \bar{c}$. همچنین فرض کنیم داشته باشیم $T\beta = d\beta$ با $\beta \neq 0$. آنگاه

$$\begin{aligned} c(\alpha|\beta) &= (T\alpha|\beta) \\ &= (\alpha|T\beta) \\ &= (\alpha|d\beta) \\ &= \bar{d}(\alpha|\beta) \\ &= d(\alpha|\beta)\,. \end{aligned}$$

اگر $c \neq d$، آنگاه $(\alpha|\beta) = 0$. □

باید خاطرنشان کنیم که قضیهٔ ۱۵ مطلبی دربارهٔ وجود مقادیر سرشت‌نما و یا بردارهای سرشت‌نما بیان نمی‌کند.

**قضیهٔ ۱۶.** روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی مثبت، هرعملگر خودالحاق دارای یک بردار سرشت‌نمای (غیرصفر) است.

اثبات. گیریم $V$ یک فضای ضرب داخلی با بعد $n$، $n > 0$، $T$ عملگر خودالحاقی روی $V$ باشد. پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\mathscr{B}$ برای $V$ انتخاب وفرض می کنیم $A = [T]_{\mathscr{B}}$. چون $T = T^*$، داریم $A = A^*$. حال گیریم $W$ فضای ماتریسهای $n \times 1$ روی $C$ باضرب داخلی $(X|Y) = Y^*X$ باشد. دراین صورت $U(X) = AX$ عملگر خطی خودالحاق $U$ روی $W$ را تعریف می کند. چندجمله‌ای سرشت‌نما، $\det(xI - A)$، یک چندجمله‌ای درجهٔ $n$ برروی اعداد مختلط است؛ و هرچندجمله‌ای برروی $C$ از درجهٔ مثبت یک ریشه دارد. پس عدد مختلطی چون $c$ وجود داردکه $\det(cI - A) = 0$ . این بدان معنی است که $A - cI$ منفرد است، یااینکه $X$ غیرصفری وجود داردکه $AX = cX$. چون عملگر $U$ (ضرب در $A$) خودالحاق است، از قضیهٔ ۱۵ نتیجه می‌شود که $c$ حقیقی است. اگر $V$ یک فضای برداری حقیقی باشد، می‌توانیم $X$ را طوری انتخاب کنیم که درایه‌هایش حقیقی باشند. زیرا درآن صورت $A$ و $A - cI$ دارای درایه‌های حقیقی هستند و چون $A - cI$ منفرد است، دستگاه $(A - cI)X = 0$ یک جواب حقیقی غیرصفر $X$ دارد. نتیجه اینکه بردار غیرصفری چون $\alpha$ در $V$ وجود داردکه $T\alpha = c\alpha$. $\square$

چند نکته درمورد اثبات وجود داردکه بهتراست به‌ذکرآنها پرداخته شود.

(۱) اثبات وجود $X$ غیرصفری که $AX = cX$، ربطی به‌این واقعیت که $A$ هرمیتی (خودالحاق)است ندارد. این اثبات نشان می‌دهد که هرعملگرخطی روی یک‌فضای برداری مختلط با بعد متناهی، دارای برداری سرشت‌نماست. درمورد یک فضای ضرب داخلی حقیقی، ازخاصیت خود الحاقی $A$ قویاً استفاده می‌شود تا به‌ما بفهماند که مقادیر سرشت‌نمای $A$ حقیقی هستند و ازاین‌رو می‌توانیم $X$ مناسبی با درایه‌های حقیقی بیابیم.

(۲) استدلال نشان می‌دهد که چندجمله‌ای سرشت‌نمای هرماتریس خودالحاق، علیرغم اینکه درایه‌های این ماتریس ممکن است حقیقی نباشند، ضرایب حقیقی دارد.

(۳) این فرض که $V$ بابعد متناهی است برای اثبات قضیهٔ لازم است؛ یک‌عملگرخودالحاق روی یک فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی ممکن است حتی یک مقدارسرشت‌نما هم نداشته باشد.

**مثال ۲۹.** گیریم $V$ فضای برداری توابع مختلط (یا حقیقی) پیوسته روی فاصلهٔ یکه $0 \leqslant t \leqslant 1$، با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

باشد. عملگـر «ضرب توسط $t$»، $(Tf)(t)=tf(t)$، خـودالحاق است. فرض می‌کنیم $Tf=cf$. دراین صورت

$$(t-c)f(t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

وازاین‌رو، به‌ازای $t\neq c$، $f(t)=0$. چون $f$ پیوسته است، $f=0$. پس، $T$ هیچ مقدار (بردار) سرشت‌نما ندارد.

**قضیهٔ ۱۷.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلـی با بعد متناهی و $T$ عملگـری خطی روی $V$ باشد. فرض‌کنیم $W$ زیرفضایی از $V$ باشدکه تحت $T$ پایاست. دراین صورت مکمل متعامد $W$ تحت $T^*$ هم‌پایاست.

اثبات. یادآوری می‌کنیم این واقعیت که $W$ تحت $T$ پایاست بدین معنی نیست که هر بردار $W$ توسط $T$ ثابت نگهداشته می‌شود؛ بلکه بدین‌معنی است که اگر $\alpha$ در $W$ باشد، آنگاه $T\alpha$ نیز در $W$ قراردارد. $\beta$ را در $W^\perp$ می‌گیریم. باید نشان دهیم کـه $T^*\beta$ در $W^\perp$ قراردارد، یعنی باید نشان دهیم که به‌ازای هر $\alpha$ در $W$، $(\alpha|T^*\beta)=0$. اگر $\alpha$ در $W$ باشـد ، آنـگـاه $T\alpha$ هـم در $W$ قـرار دارد و ازایـن‌رو $(T\alpha|\beta)=0$. ولـی $(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)$. □

**قضیهٔ ۱۸.** گیریم $V$ یك فضای ضـرب داخلی با بعـد متناهی و $T$ عملگـر خطی خودالحاقی روی $V$ باشد. دراین صورت پایهٔ‌متعامد یکه‌ای برای $V$ وجود دارد که‌هربردار آن یك بردار سرشت‌نمای $T$ است.

اثبات. فرض کنیم $0 <$ بعد $(V)$. بنا برقضیهٔ ۱۶، $T$ دارای بـردار سرشت‌نمایی چون $\alpha$ است. بردار $\alpha_1=\alpha/\|\alpha\|$ را درنظرمی‌گیریم و دراین صورت $\alpha_1$ یـك بردار سرشت‌نمای $T$ است که $\|\alpha_1\|=1$. اگر $1 =$ بعد $(V)$،کار تمام است. اکنـون به‌استقرا روی بعد $V$ پیش می‌رویم. فرض‌کنیم قضیه برای فضاهای ضرب داخلی با ابعاد کمتر از بعد $(V)$ درست باشد. $W$ را زیرفضای یك‌بعدی پدید آمده توسط بردار $\alpha_1$ می‌گیریم. این حکم که $\alpha_1$ یك بردار سرشت‌نمای $T$ است، به‌طورساده بدین معنی است که $W$ تحت $T$ پایاست. بنا برقضیهٔ ۱۷،مکمل متعامد $W^\perp$ تحت $T^*=T$ پایاست. حال $W^\perp$، باضرب داخلی $V$، یك فضای ضرب داخلی است که بعدش یکی‌کمتراز بعد $V$ است. $U$ را عملگر خطی القا شده توسط $T$ روی $W^\perp$، یعنی تحدید $T$ به $W^\perp$ می‌گیریم. آنگاه $U$ خودالحاق است، وبنا بر فـرض استقرا، $W^\perp$ پایهٔ متعامد یکه‌ای چـون $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ متشکل از بردارهای سرشت‌نمای $U$ دارد. حال هریك از این بردارها یـك بردار سرشت‌نمای $T$ هم هست وچون $V=W\oplus W^\perp$، نتیجه می‌گیریم که $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایهٔ مطلوب برای $V$ است. □

**نتیجه.** فرض کنیم $A$ یك ماتریس هرمیتی (خودالحاقی) $n\times n$ باشد. دراین صورت

ماتریسی یکانی چون $P$ وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است ($A$ هم‌ارز یکانی با ماتریسی قطری است). اگر $A$ یك ماتریس متقارن حقیقی باشد، یك ماتریس متعامد حقیقی چون $P$ وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است.

اثبات. گیریم $V$ فضای $C^{n\times 1}$ با ضرب داخلی استانده و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده توسط $A$ نمایش داده می‌شود. چون $A=A^*$ داریم $T=T^*$. فرض کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ متعامد یکهٔ مرتبی برای $V$ باشد که $T\alpha_j=c_j\alpha_j$، $j=1, \cdots, n$. اگر $D=[T]_{\mathcal{B}}$، آنگاه $D$ ماتریسی قطری با درایه‌های قطری $c_1$، $\cdots$، $c_n$ است. $P$ را ماتریسی با بردارهای ستونی $\alpha_1$، $\cdots$، $\alpha_n$ می‌گیریم. دراین صورت $D=P^{-1}AP$.

درحالتی که همهٔ درایه‌های $A$ حقیقی باشند، می‌توان $V$را فضای $R^n$ با ضرب‌داخلی استانده گرفت واستدلال را تکرار کرد. دراین حالت، $P$ماتریسی‌یکانی با درایه‌های‌حقیقی، یعنی یك ماتریس متعامد حقیقی خواهد بود. □

از ترکیب قضیهٔ ۱۸ با نکاتی که درابتدای این بخش ذکر شد نتیجهٔ ذیل حاصل می‌شود: اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد، آنگاه $V$ یك پایهٔ متعامد یکه از بردارهای سرشت‌نمای $T$ دارد اگر وتنها اگر $A$ خودالحاق باشد. به‌بیانی هم‌ارز، اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد، یك ماتریس متعامد حقیقی چون $P$ وجود دارد که $P^tAP$ قطری است اگروتنها اگر $A=A^t$. برای ماتریسهای متقارن مختلط چنین‌نتیجه‌ای وجود ندارد. به‌بیان‌دیگر، برای ماتریسهای مختلط، بین شرایط $A=A^t$ و $A=A^*$ تفاوت عمده‌ای وجود دارد.

با تعیین تکلیف حالت خودالحاق، اکنون به‌مطالعهٔ حالت عمومی عملگرهای‌نرمال بازمی‌گردیم. نظیر قضیهٔ ۱۸ را برای عملگرهای نرمال درحالت مختلط، اثبات خواهیم کرد. البته دلیلی برای این محدودیت وجود دارد. یك عملگرنرمال روی یك فضای‌ضرب داخلی حقیقی ممکن است هیچ بردار سرشت‌نمای غیرصفری نداشته باشد. به‌عنوان مثال، این امربرای همهٔ دورانهای در $R^2$، بجز دوتا، صادق است.

**قضیهٔ ۱۹.** فرض کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، $T$ عملگری نرمال روی $V$ و $\alpha$ برداری در $V$ باشد. دراین صورت $\alpha$ یك بردار سرشت‌نمای $T$ با مقدار سرشت‌نمای $c$ است اگر و تنها اگر $\alpha$ یك بردار سرشت‌نمای $T^*$ با مقدار سرشت‌نمای $\bar{c}$ باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم $U$ عملگری نرمال روی $V$ باشد. آنگاه $\|U\alpha\|=\|U^*\alpha\|$. زیرا با به‌کار بردن شرط $UU^*=U^*U$ دیده می‌شود که

$$\|U\alpha\|^2=(U\alpha|U\alpha)=(\alpha|U^*U\alpha)$$
$$=(\alpha|UU^*\alpha)=(U^*\alpha|U^*\alpha)=\|U^*\alpha\|^2.$$

اگر $c$ اسکالر دلخواهی باشد، عملگر $U=T-cI$ نرمال است. زیرا

$$(T-cI)^*=T^*-\bar{c}I$$

وبسادگی ثابت می‌شودکه $UU^*=U^*U$. پس

$$\|(T-cI)\alpha\|=\|(T^*-\bar{c}I)\alpha\|.$$

ازاین‌رو، $(T-cI)\alpha=0$ اگروتنها اگر $(T^*-\bar{c}I)\alpha=0$. □

**تعریف.** ماتریس $n\times n$ مختلط $A$ **نرمال** نامیده می‌شود هرگاه $AA^*=A^*A$.

درك اینکه نرمال بودن ماتریسها یا عملگرها واقعاً به‌چه معنی است، چندان آسان نیست؛ اما، درتلاش جهت ایجاد تصوری برای این مفهوم، لازم است توجه شودکه ماتریسی مثلثی نرمال است اگروتنها اگرقطری باشد.

**قضیهٔ ۲۰.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، $T$ عملگری خطی روی $V$، و $\mathcal{B}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ باشد. فرض کنیم $A$، ماتریس $T$ در پایهٔ $\mathcal{B}$ بالامثلثی باشد. دراین صورت $T$ نرمال است، اگر وتنها اگر $A$ ماتریسی قطری باشد.

اثبات. چون $\mathcal{B}$ یك پایهٔ متعامد یکه است، $A^*$ ماتریس $T^*$ در$\mathcal{B}$ است. اگر$A$قطری باشد، آنگاه $AA^*=A^*A$، واین مطلب ایجاب می‌کند که $TT^*=T^*T$. بعکس، فرض کنیم$T$نرمال‌باشد و$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. آنگاه،چون$A$بالامثلثی است، $T\alpha_1=A_{11}\alpha_1$. بنا برقضیهٔ ۱۹، این مطلب ایجاب می‌کند که $T^*\alpha_1=\bar{A}_{11}\alpha_1$. ازطرف دیگر،

$$T^*\alpha_1=\sum_j (A^*)_{j1}\alpha_j$$

$$=\sum_j \bar{A}_{1j}\alpha_j.$$

بنا براین، به‌ازای هر $j>1$، $A_{1j}=0$ بخصوص، $A_{12}=0$ و چون $A$ بالامثلثی است، نتیجه می گیریم که

$$T\alpha_2=A_{22}\alpha_2.$$

پس، $T^*\alpha_2=\bar{A}_{22}\alpha_2$ وبه‌ازای هر $j\neq 2$، $A_{2j}=0$. با ادامهٔ این روش درمی‌یابیم که $A$ قطری است. □

**قضیهٔ ۲۱.** فرض کنیم $V$یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و$T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. در این صورت پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ وجود دارد که در آن ماتریس $T$ بالامثلثی است.

اثبات. گیریم $n$ بعد $V$ باشد. وقتی $n=1$، قضیه درست است. با استقرا روی $n$ پیش می‌رویم و فرض می کنیم که نتیجه برای عملگرهای خطی روی فضاهای ضرب‌داخلی

مختلط با بعد $n-1$ درست باشد. چون $V$ یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی است، بردار یکه‌ای چون $\alpha$ در $V$ و اسکالری چون $c$ وجود دارند که

$$T^*\alpha = c\alpha.$$

گیریم $W$ مکمل متعامد زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha$ و $S$ تحدید $T$ به $W$ باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۷، فضای $W$ تحت $T$ پایاست. پس $S$ عملگری خطی روی $W$ است. چون $W$ دارای بعد $n-1$ است، فرض استقرا وجود پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ برای $W$ را ایجاب می‌کند که درآن ماتریس $S$ بالامثلثی است. حال فرض می‌کنیم $\alpha_n = \alpha$. آنگاه $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ است که درآن ماتریس $T$ بالامثلثی است. □

این قضیه برای ماتریسها نتیجهٔ زیررا ایجاب می‌کند.

**نتیجه.** به‌ازای هرماتریس $n \times n$ مختلط $A$ ماتریسی یکانی چون $U$ وجود دارد که $U^{-1}AU$ بالامثلثی است.

اکنون با ترکیب قضیهٔ ۲۱ وقضیهٔ ۲۰، بلافاصله مشابه قضیهٔ ۱۸ را به‌شرح زیر برای عملگرهای نرمال به‌دست می‌آوریم.

**قضیهٔ ۲۲.** فرض می‌کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و $T$ عملگر نرمالی روی $V$ باشد. دراین صورت $V$ دارای پایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نمای $T$ است.

مجدداً تعبیری ماتریسی هم وجود دارد.

**نتیجه.** به‌ازای هرماتریس نرمال $A$، ماتریسی یکانی چون $P$ وجود دارد که $P^{-1}AP$ ماتریسی قطری است.

## تمرین

۱. برای هریك از ماتریسهای متقارن حقیقی $A$ در ذیل، یك ماتریس متعامد حقیقی چون $P$ بیابید که $P^tAP$ قطری باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

۲. آیا هرماتریس متقارن مختلط، خودالحاق است؟ آیا نرمال است؟

۰۳ برای

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

یك ماتریس متعامد حقیقی چون $P$ وجود داردکه $P^tAP=D$ قطری است. یکـــی از این ماتریسهای قطری $D$ را بیابید.

۰۴ $V$ را $C^۲$ با ضرب داخلی استانده بگیرید. $T$ را عملگری خطی روی $V$ بگیریدکه‌در پایهٔ مرتب استانده توسط ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & i \\ i & ۱ \end{bmatrix}$$

نمایش‌داده می‌شود. نشان دهیدکه $T$ نرمال است‌وپایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل‌از بردارهای سرشت‌نمای $T$ برای $V$ بیابید.

۰۵ مثالی ازیك ماتریس ۲ × ۲ چون $A$ بیاوریدکه $A^۲$ نرمال باشد ولی $A$ نرمال نباشد.

۰۶ فرض‌کنید $T$ عملگرنرمالی روی یك فضای ضرب داخلی مختلط بـا بعد متناهی باشد. ثابت‌کنید بر حسب اینکه همهٔ مقادیر سرشت‌نمای $T$ حقیقی، مثبت، یـا با قدرمطلق ۱ باشند، $T$ خودالحاق، مثبت، یا یکانی است. (ازقضیهٔ ۲۲ برای تحویل مسئله به‌سؤالی مشابه دربارهٔ ماتریسهای قطری استفاده‌کنید.)

۰۷ $T$ را عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ بگیرید وفـرض‌کنید $T$ هم‌مثبت و هم یکانی باشد. ثابت‌کنید $T=I$.

۰۸ ثابت‌کنید $T$ نرمال است اگروتنها اگر $T=T_۱+iT_۲$، که در آن $T_۱$ و $T_۲$ عملگرهای خودالحاقی هستندکه با یکدیگرجابجا می‌شوند.

۰۹ ثابت‌کنیدکه هرماتریس متقارن حقیقی دارای یك ریشهٔ سوم متقارن حقیقی است، یعنی اگر $A$ متقارن حقیقی باشد، ماتریسی متقارن حقیقی چون $B$ وجود داردکه $B^۳=A$.

۰۱۰ ثابت‌کنیدکه هرماتریس مثبت، مربع یك ماتریس مثبت است.

۰۱۱ ثابت‌کنیدکه هرعملگر نرمال وپوچ‌توان برابرعملگرصفراست.

۰۱۲ اگر $T$ عملگری نرمـال باشد، ثابت‌کنید بردارهای سرشت‌نمای $T$ وابسته به‌مقادیـر

سرشت‌نمای متمایز، متعامدند.

۱۳. فرض کنید $T$ عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعدمتناهی باشد. ثابت کنید یك چندجمله‌ای چون $f$ با ضرایب مختلط وجود دارد که $T^* = f(T)$. ($T$ را توسط ماتریسی قطری نمایش دهید و ببینید $f$ چه باید باشد.)

۱۴. اگر دو عملگر نرمال (با یکدیگر) جابجا شوند، ثابت کنید که حاصل‌ضرب آنها نیز نرمال است.

# ۹

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی

## ۱.۹. مقدمه

بیشتر مطالب مورد بحث در فصل ۸ بنیانی هستند و هر کسی باید آنها را بداند. فصل حاضر برای دانشجویان پیشرفته‌تر یا برای خوانندگانی درنظر گرفته شده است که مشتاق‌اند معلومات خود را دربارهٔ عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی گسترش دهند. به‌استثنای قضیهٔ محور اصلی‌که اساساً چیزی‌جز فرمول‌بندی دیگری ازقضیهٔ ۱۸ دربارهٔ قطری‌کردن متعامد عملگرهای خودالحاق نیست وبجز سایر قضایای بخش۲.۹ مربوط به‌فرمها، مطالب ارائه شده پیچیده‌تر وعموماً درگیر مسایل فنی‌تری هستند. عیناً همان‌طورکه درقسمتهای آخر فصلهای ۵ و ۷ انتظار زیادتری داشتیم دراین فصل نیز از خواننده توقع بیشتری داریم. استدلالها و اثباتها به‌شیوه‌ای فشرده‌تر نوشته شده‌اند و تقریباً هیچ مثالی جهت هموار ساختن راه وجود ندارد. بااین وجود سعی کرده‌ایم تعداد زیادی تمرین در دسترس خواننده بگذاریم.

سه بخش اول به‌نتایج مربوط به‌فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی و رابطهٔ بین فرمها و عملگرهای خطی اختصاص داده شده‌اند. بخش بعد مربوط به‌نظریهٔ طیفی است؛ یعنی بانتایج قضایای ۱۸ و ۲۲ ازفصل ۸ دربارهٔ قطری‌کردن عملگرهای نرمال وخودالحاق سروکار دارد. دربخش آخر، مطالعهٔ عملگرهای نرمال را دنبال می‌کنیم؛ بخصوص به‌حالت حقیقی می‌پردازیم و ضمن عمل، این پرسش را که قضیهٔ تجزیهٔ اولیه ازفصل ۶ دربارهٔ

عملگرهای نرمال چه می‌گوید، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۹.۲. فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی

اگر $T$ عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ باشد، تابع تعریف‌شده روی $V\times V$ طبق

$$f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$$

ممکن است به‌عنوان نوعی جانشین برای $T$ محسوب شود. بسیاری از پرسشهای دربارهٔ $T$ با سؤالاتی دربارهٔ $f$ هم‌ارز هستند. در حقیقت، بسادگی دیده می‌شود که $f$ عملگر $T$ را مشخص می‌کند. زیرا اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه متعامدیکه‌ای برای $V$ باشد، آنگاه درایه‌های ماتریس $T$ در $\mathcal{B}$ با

$$A_{jk}=f(\alpha_k, \alpha_j)$$

تعیین می‌شوند. فهم این نکته مهم است که از دیدگاهی بیشتر تجریدی چگونه $f$ عملگر $T$ را مشخص می‌کند. تعریف ذیل خواص بسیار مهم $f$ را تشریح می‌کند.

**تعریف.** یك فرم (**یك و نیم خطی**) روی یك فضای برداری حقیقی یا مختلط $V$، تابعی چون $f$ روی $V\times V$ با مقادیر درهیأت اسکالرهاست که به‌ازای هر $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ در $V$ وهمهٔ اسکالرهای $c$

$$f(c\alpha+\beta, \gamma)=cf(\alpha, \gamma)+f(\beta, \gamma) \qquad \text{(الف)}$$

$$f(\alpha, c\beta+\gamma)=\bar{c}f(\alpha, \beta)+f(\alpha, \gamma) \qquad \text{(ب)}$$

پس، یك فرم یك‌و نیم خطی $f$ تابعی روی $V\times V$ است که به‌ازای یك $\beta$ ثابت $f(\alpha,\beta)$ تابعی خطی از $\alpha$ باشد و به‌ازای یك $\alpha$ ثابت تابع خطی مزدوجی از $\beta$. درحالت حقیقی $f(\alpha, \beta)$، به‌عنوان تابعی از هریك ازشناسه‌ها، خطی است، به‌بیان دیگر، **یك‌فرم دوخطی** است. درحالت مختلط، فرم یك‌و نیم خطی $f$ دوخطی نیست، مگر آنکه $f=0$. در باقیماندهٔ این فصل، بجز درمواردی‌که ذکر آن مهم به‌نظر برسد صفت «یك‌و نیم خطی» را حذف خواهیم کرد.

اگر $f$ و $g$ دوفرم روی $V$ باشند و $c$ یك اسکالر، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $cf+g$ نیز یك فرم است. ازاین‌مطلب نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی از فرمهای روی $V$، مجدداً یك فرم است. از این‌رو، مجموعهٔ همه فرمهای روی $V$ زیرفضایی از فضای برداری همهٔ توابع اسکالری روی $V\times V$ است.

**قضیهٔ ۱:** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $f$ یك فرم روی $V$ باشد. دراین‌صورت عملگر خطی یکتایی چون $T$ روی $V$ وجود داردکه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$

$$f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$$

ونگاشت $T \to f$ یك یکریختی از فضای فرمها بروی $L(V, V)$ است.

اثبات. بردار ثابت $\beta$ از $V$ را درنظر مـی‌گیریم. آنگاه $\alpha \to f(\alpha, \beta)$ تابعی (تابعکی) خطی روی $V$ است. بنا برقضیهٔ ۶ از فصل ۸ بردار یکتایی چون $\beta'$ در $V$ وجود داردکه به‌ازای هر $\alpha$، $f(\alpha, \beta)=(\alpha|\beta')$. تابعی چون $U$ از $V$ در $V$ را با قراردادن $U\beta=\beta'$ تعریف‌می کنیم. دراین‌صورت به‌ازای هر $\alpha$، $\beta$، و $\gamma$ در $V$ وهمه اسکالرهای $c$

$$\begin{aligned}f(\alpha|c\beta+\gamma)&=(\alpha|U(c\beta+\gamma))\\&=\bar{c}f(\alpha, \beta)+f(\alpha, \gamma)\\&=\bar{c}(\alpha|U\beta)+(\alpha|U\gamma)\\&=(\alpha|cU\beta+U\gamma).\end{aligned}$$

پس $U$ عملگری خطی روی $V$ است و $T=U^*$ عملگری است که به‌ازای هر $\alpha$ و هر $\beta$ داریم $f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$. اگر همچنین داشته باشیم $f(\alpha, \beta)=(T'\alpha|\beta)$، آنگاه به‌ازای هر $\alpha$ وهر $\beta$،

$$(T\alpha-T'\alpha|\beta)=0$$

و ازاین‌رو، به‌ازای هر $\alpha$ داریم $T\alpha=T'\alpha$. پس، به‌ازای هرفرم $f$، عملگر خطی‌یکتایی چون $T_f$ وجود داردکه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$

$$f(\alpha, \beta)=(T_f\alpha|\beta).$$

اگر $f$ و $g$ دوفرم باشند و $c$ یك اسکالر، آنگاه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$

$$\begin{aligned}(cf+g)(\alpha, \beta)&=(T_{cf+g}\alpha|\beta)\\&=cf(\alpha, \beta)+g(\alpha, \beta)\\&=c(T_f\alpha|\beta)+(T_g\alpha|\beta)\\&=((cT_f+T_g)\alpha|\beta).\end{aligned}$$

بنابراین

$$T_{cf+g}=cT_f+T_g$$

و ازاین‌رو، $T_f \to f$ نگاشتی خطی است. به‌ازای هر $T$ در $L(V, V)$، تساوی

$$f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$$

فرمی تعریف می کندکه $T_f=T$ و $T_f=0$ اگر وتنها اگر $f=0$. بنابراین، $f \to T_f$ یك یکریختی است. □

**نتیجه.** تساوی

$$(f\,|\,g)=\mathrm{tr}\,(T_fT_g^*)$$

ضربی داخلی روی فضای فرمها بااین خاصیت تعریف می‌کندکه به‌ازای هرپایهٔ متعامدیکه $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ از $V$

$$(f\,|\,g)=\sum_{j,k}f(\alpha_k\,,\,\alpha_j)\overline{g(\alpha_k\,,\,\alpha_j)}.$$

اثبات. از مثال ۳ فصل ۸ بسادگی نتیجه می‌شود که $(T, U)=\mathrm{tr}\,(TU^*)$ ضربی داخلی‌روی $L(V, V)$ است. چون $f\to T_f$ یك یکریختی است، مثال ۶ ازفصل ۸ نشان می‌دهدکه

$$(f\,|\,g)=\mathrm{tr}\,(T_fT_g^*)$$

نیز یك ضرب داخلی است. حال فرض‌کنیم $A$ و $B$ ماتریسهای $T_f$ و $T_g$ درپایه متعامدیکه $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ باشند. دراین‌صورت

$$A_{jk}=(T_f\alpha_k\,|\,\alpha_j)=f(\alpha_k\,,\,\alpha_j)$$

و $B_{jk}=(T_g\alpha_k\,|\,\alpha_j)=g(\alpha_k, \alpha_j)$. چون $AB^*$ ماتریس $T_fT_g^*$ درپایهٔ $\mathcal{B}$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$(f\,|\,g)=\mathrm{tr}\,(AB^*)=\sum_{j,k}A_{jk}\bar{B}_{jk}.\ \square$$

**تعریف.** اگر $f$ یك فرم باشد و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتب دلخواهی از $V$، ماتریس $A$ با درایه‌های

$$A_{jk}=f(\alpha_k\,,\,\alpha_j)$$

**ماتریس $f$ درپایهٔ مرتب** $\mathcal{B}$ نامیده می‌شود.

وقتی که $\mathcal{B}$ یك پایهٔ متعامدیکه باشد، ماتریس $f$ در $\mathcal{B}$ ماتریس تبدیل خطی $T_f$ نیز هست، اما درحالت عمومی این‌طور نیست.

اگر $A$ ماتریس $f$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ باشد، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای همهٔ اسکالرهای $x_s$ و $y_r$ $(1\leqslant r, s\leqslant n)$

$$f(\sum_s x_s\alpha_s\,,\,\sum_r y_r\alpha_r)=\sum_{r,s}\bar{y}_rA_{rs}x_s\,. \qquad (۱-۹)$$

به‌بیان دیگر، ماتریس $A$ دارای این خاصیت است‌که

$$f(\alpha, \beta)=Y^*AX.$$

دراینجا $X$ و $Y$ بترتیب ماتریسهای مختصات $\alpha$ و $\beta$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هستند. ماتریس $f$

در پایهٔ دیگر

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i, \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

بنا بر معادلهٔ

$$A' = P^* A P \tag{۹-۲}$$

تعیین می‌شود. زیرا

$$\begin{aligned} A'_{jk} &= f(\alpha'_k, \alpha'_j) \\ &= f(\sum_s P_{sk}\alpha_s, \sum_r P_{rj}\alpha_r) \\ &= \sum_{r,s} \overline{P}_{rj} A_{rs} P_{sk} \\ &= (P^* A P)_{jk}. \end{aligned}$$

چون برای ماتریسهای یکانی، $P^* = P^{-1}$، از (۹-۲) چنین برمی‌آید که نتایج مربوط به‌هم ارزی یکانی را می‌توان در مطالعهٔ فرمها هم به‌کار برد.

**قضیهٔ ۲.** گیریم $f$ فرمی روی یك فضای ضرب داخلی مختلط بعدمتناهی $V$ باشد. در این صورت پایهٔ متعامدیکه‌ای برای $V$ وجود داردکه در آن ماتریس $f$ بالا مثلثی است.

اثبات. فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی $V$ باشدکه به ازای هر $\alpha$ و $\beta$، $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$. بنا بر قضیهٔ ۲۱، پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ وجود داردکه درآن ماتریس $T$ بالامثلثی است. از این‌رو وقتی که $j > k$

$$f(\alpha_k, \alpha_j) = (T\alpha_k | \alpha_j) = 0. \square$$

**تعریف.** یك فرم $f$ روی یك فضای برداری حقیقی یا مختلط $V$ **هرمیتی** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$

$$f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}.$$

اگر $T$ عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی $V$ باشد و $f$ فرم

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

آنگاه $\overline{f(\beta, \alpha)} = (\alpha | T\beta) = (T^*\alpha | \beta)$؛ از این رو، $f$ هرمیتی است اگر و تنها اگر $T$ خود الحاق باشد.

وقتی که $f$ هرمیتی باشد، به‌ازای هر$\alpha$، مقدار $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است و این خاصیت روی فضاهای مختلط فرمهای هرمیتی را مشخص می‌سازد.

**قضیهٔ ۳** گیریم $V$ یك فضای برداری مختلط باشد و $f$ فرمی روی $V$ که به ازای هر $\alpha$، $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است. در این صورت $f$ هرمیتی است.

اثبات. گیریم $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی از $V$ باشند. باید نشان دهیم که

$$f(\alpha, \beta)=\overline{f(\beta, \alpha)}$$

اما

$$f(\alpha+\beta, \alpha+\beta)=f(\alpha, \alpha)+f(\alpha, \beta)+f(\beta, \alpha)+f(\beta, \beta).$$

چون $f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)$، $f(\alpha,\alpha)$، و $f(\beta,\beta)$ همه حقیقی هستند، عدد $f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)$ هم حقیقی است. با استفاده از همین برهان ولی با $\alpha+i\beta$ بـه جای $\alpha+\beta$، می‌بینیم که $-if(\alpha, \beta)+if(\beta, \alpha)$ نیز حقیقی است. با این نتیجه‌گیری که دو عدد حقیقی هستند، آنها را برابر مزدوجهای مختلطشان قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم که

$$f(\alpha, \beta)+f(\beta, \alpha)=\overline{f(\alpha, \beta)}+\overline{f(\beta, \alpha)}$$

$$-if(\alpha, \beta)+if(\beta, \alpha)=i\overline{f(\alpha, \beta)}-i\overline{f(\beta, \alpha)}.$$

اگر معادلهٔ دوم را در $i$ ضرب کنیم و نتیجه را به‌معادلهٔ اول بیفزاییم، داریم

$$۲f(\alpha, \beta)=۲\overline{f(\beta, \alpha)}. \square$$

**نتیجه.** گیریم $T$ عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی با بعدمتناهی مختلط باشد. در این صورت $T$ خودالحاق است اگر و تنها اگر بـه ازای هر $\alpha$ در $V$، $(T\alpha|\alpha)$ حقیقی باشد.

**قضیهٔ ۴.** (**قضیهٔ محور اصلی**). بـه ازای هر فرم هرمیتی $f$ روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$، پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ وجود داردکه درآن $f$ با یك ماتریس قطری با درایه‌های حقیقی نمایش داده می‌شود.

اثبات. گیریم $T$ عملگری خطی باشد که به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $f(\alpha,\beta)=(T\alpha|\beta)$. در این صورت چون $f(\alpha, \beta)=\overline{f(\beta, \alpha)}$ و $\overline{(T\beta|\alpha)}=(\alpha|T\beta)$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$

$$(T\alpha|\beta)=\overline{f(\beta, \alpha)}=(\alpha|T\beta)$$

و از این‌رو، $T=T^*$. بنا بر قضیهٔ ۱۸ از فصل ۸، پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ وجوددارد که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای $T$ است. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ‌متعامد یکه باشد و به‌ازای هر $1\leqslant j\leqslant n$

$$T\alpha_j=c_j\alpha_j.$$

در این صورت

$$f(\alpha_k, \alpha_j)=(T\alpha_k|\alpha_j)=\delta_{kj}c_k$$

و بنا بر قضیهٔ ۱۵ در فصل ۸ همهٔ $c_k$ها حقیقی هستند. $\square$

**نتیجه.** تحت شرایط بالا

$$f(\sum_j x_j\alpha_j,\ \sum_k y_k\alpha_k)=\sum_j c_jx_j\bar{y}_j.$$

## تمرین

۱. کدامیك از توابع $f$ ذیل، تعریف‌شده روی بردارهای $\alpha=(x_1, x_2)$، $\beta=(y_1, y_2)$ در $C^2$، فرمهایی (یك و نیم خطی) روی $C^2$ هستند؟

(الف) $f(\alpha, \beta)=1$.

( ب ) $f(\alpha, \beta)=(x_1-\bar{y}_1)^2+x_2\bar{y}_2$.

( پ ) $f(\alpha, \beta)=(x_1+\bar{y}_1)^2-(x_1-\bar{y}_1)^2$.

( ت ) $f(\alpha, \beta)=x_1\bar{y}_2-\bar{x}_2y_1$.

۲. فرض کنید $f$ فرمی روی $R^2$ باشدکه با

$$f(x_1, y_1), (x_2, y_2))=x_1y_1+x_2y_2$$

تعریف می‌شود. ماتریس $f$ در هر یك از پایه‌های ذیل را بیابید:

$$\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(1, -1), (1, 1)\}, \{(1, 2), (3, 4)\}.$$

۳. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

و $g$ فرم (روی‌فضای‌ماتریسهای‌مختلط $2 \times 1$) تعریف‌شده‌توسط $g(X, Y)=Y^*AX$ باشد. آیا $g$ ضربی داخلی است؟

۴. فرض کنید $V$ یــك فضای برداری مختلط و $f$ فرم (یك و نیم خطی) متقارنی روی $V$ باشد: $f(\alpha, \beta)=f(\beta, \alpha)$. $f$ چیست؟

۵. فرض کنید $f$ فرمی باشدکه توسط

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2))=x_1y_1+4x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1$$

تعیین می‌شود. پایهٔ مرتبی بیابیدکه درآن $f$ توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود.

۶. فرم $f$ را **ناتبهگون** (چپ) نامیم، هرگاه بردار ۰ تنها بردار $\alpha$ با ایــن خاصیت باشد که به‌ازای هر $\beta$، $f(\alpha, \beta)=0$. گیریم $f$ فرمی روی یك فضای ضرب داخلی باشد. ثابت کنید $f$ ناتبهگون است اگر وتنها اگرعملگرخطی وابستهٔ $T_f$ (قضیهٔ ۱) نامنفردباشد.

۷. فرض کنید $f$ فرمی روی یك فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد. به تعریف ناتبهگونی چپ ارائه شده در تمرین ۶ توجه کنید. ناتبهگونی راست را تعریف و ثابت کنید که فرم $f$ ناتبهگون چپ است اگر و تنها اگر $f$ ناتبهگون راست باشد.

۸. فرض کنید $f$ فرمی ناتبهگون (تمرینهای ۶ و ۷) روی یك فضای بعد متناهی $V$ باشد. فرض کنید $L$ تابعکی خطی روی $V$ باشد. نشان دهید یك و تنها یك بردار چون $\beta$ در $V$ وجود دارد که به‌ازای هر $\alpha$، $L(\alpha)=f(\alpha, \beta)$.

۹. فرض کنید $f$ فرمی ناتبهگون روی یك فضای بعدمتناهی $V$ باشد. نشان دهید هرعملگر خطی $S$ دارای یك «الحاقی نسبت به $f$» است، یعنی عملگری چون $S'$ وجود دارد که به‌ازای همهٔ $\alpha$ها و $\beta$ها، $f(S\alpha, \beta)=f(\alpha, S'\beta)$.

## ۳.۹. فرمهای مثبت

دراین بخش، دربارهٔ فرمهای (یك‌ونیم خطی) نامنفی و رابطهٔ آنها با ضرب داخلی‌مفروض روی فضای برداری زمینه بحث می‌کنیم.

**تعاریف.** یك فرم $f$ روی یـك فضای برداری حقیقی یـا مختلط $V$ **نامنفی** است، هرگاه هرمیتی باشد و بـه ازای هر $\alpha$ در $V$، $f(\alpha, \alpha)\geqslant 0$. فرم $f$ **مثبت** است، هرگاه $f$ هرمیتی و به ازای هر $\alpha\neq 0$، $f(\alpha, \alpha)>0$ باشد.

یك فرم مثبت روی $V$ چیزی جز ضربی داخلی روی $V$ نیست. هر فـرم نامنفی در همهٔ خواص یك ضرب داخلی صدق می‌کند با این استثنا که برخی از بردارهای غیرصفر ممکن است برخودشان عمود باشند.

گیریم $f$ فرمی‌روی فضای با بعدمتناهی $V$ باشد. فرض کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پـایهٔ مرتبی برای $V$ و $A$ مـاتریس $f$ درپایهٔ $\mathcal{B}$ بـاشد؛ یعنی، $A_{jk}=f(\alpha_k, \alpha_j)$. اگـر $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$، آنگاه

$$
\begin{aligned}
f(\alpha,\alpha) &= f(\sum_j x_j\alpha_j, \sum_k x_k\alpha_k) \\
&= \sum_j \sum_k x_j\bar{x}_k f(\alpha_j, \alpha_k) \\
&= \sum_j \sum_k A_{kj}x_j\bar{x}_k.
\end{aligned}
$$

از این‌رو، می‌بینیم که $f$ نامنفی است اگر و تنها اگر

$$A=A^*$$

و

(۳-۹) به‌ازای همهٔ اسکالرهای $x_1, \cdots, x_n$ $\quad \sum_j \sum_k A_{kj} x_j \bar{x}_k \geqslant 0$.

برای اینکه $f$ مثبت باشد، باید به‌ازای همهٔ $(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ نامساوی (۳-۹) اکید باشد. شرایط استخراج شده حاکی از ایـن هستند که $f$ فرمی مثبت روی $V$ است اگر و تنها اگر تابع

$$g(X, Y) = Y^* AX$$

فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی $n \times 1$ بر روی هیأت اسکالرها باشد.

**قضیهٔ ۵.** گیریم $F$ هیات اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط و $A$ ماتریسی $n \times n$ بر روی $F$ باشد. تابع $g$ تعریف شده توسط

$$g(X, Y) = Y^* AX \tag{۴-۹}$$

فرمی‌مثبت روی فضای $F^{n \times 1}$ است اگر وتنها اگرماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری چون $P$ با درایه‌های واقع در $F$ وجود داشته باشد به‌طوری که $A = P^* P$.

اثبات. به‌ازای هرماتریس $n \times n$ دلخواهی مانند $A$، تابع $g$ در(۴-۹) روی‌فضای ماتریسهای ستونی یك فرم است. قصدمان این است که ثابت‌کنیم $g$ مثبت است اگر و تنها اگر $A = P^* P$. ابتدا، فرض‌کنیم $A = P^* P$. دراین‌صورت $g$ هرمیتی است، و

$$\begin{aligned} g(X, X) &= X^* P^* PX \\ &= (PX)^* PX \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

اگر $P$ معکوس‌پذیر باشد و $X \neq 0$، آنگاه $(PX)^* PX > 0$.

حال، فرض‌کنیم $g$ فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی باشد. در این‌صورت $g$ ضربی داخلی است و از این‌رو، ماتریسهایی ستونی چون $Q_1, \cdots, Q_n$ وجوددارندکه

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= g(Q_j, Q_k) \\ &= Q_k^* A Q_j . \end{aligned}$$

اما این مطلب دقیقاً حاکی است که اگر $Q$ ماتریسی با ستونها $Q_1, \cdots, Q_n$ باشد، آنگاه $Q^* AQ = I$. چون $\{Q_1, \cdots, Q_n\}$ یك پایه است، $Q$ معکوس‌پـذیـر می‌باشد. حال با فرض $P = Q^{-1}$، داریم $A = P^* P$. □

در عمل، بررسی اینکه ماتریس مفروضی چون $A$ معیار مثبت بودنی را که تااینجا عرضه‌کرده‌ایم ارضا می‌کند، آسان نیست. پیامدی از قضیهٔ اخیراین است‌که اگر $g$ مثبت باشد، آنگاه $\det A > 0$، زیرا

$$\det A = \det(P^* P) = \det P^* \det P = |\det P|^2.$$

این واقعیت‌که $\det A > 0$ به‌هیچ وجه برای تضمین مثبت بودن $g$ کافی نیست؛ اما،وابسته

به $A$، $n$ دترمینان وجود دارند که خاصیت ذیل را دارند: اگر $A=A^*$ و اگر هر یك از این دترمینانها مثبت باشند. آنگاه $g$ فرمی مثبت است.

**تعریف.** گیریم $A$ ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت $F$ باشد. **کهادهای اصلی** $A$ اسکالرهای $\Delta_k(A)$ تعریف شده به‌صورت

$$\Delta_k(A)=\det\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{k1} & & A_{kk}\end{bmatrix},\ 1\leqslant k\leqslant n$$

هستند.

**لم.** گیریم $A$ ماتریس $n\times n$ معکوس پذیری با درایه‌های واقع در هیأتی چون $F$ باشد. دو حکم ذیل هم ارزند.

(الف) ماتریسی بالا مثلثی چون $P$ با $P_{kk}=1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ وجود دارد که ماتریس $B=AP$ پایین مثلثی است.

(ب) کهادهای اصلی $A$ همگی مخالف ۰ هستند.

اثبات. $P$ را ماتریس $n\times n$ دلخواهی می‌گیریم و قرار می‌دهیم $B=AP$. آنگاه

$$B_{jk}=\sum_r A_{jr}P_{rk}.$$

اگر $P$ بالامثلثی و به‌ازای هر $k$، $P_{kk}=1$ باشد آنگاه

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr}P_{rk}=B_{jk}-A_{kk},\quad k>1.$$

اما، $B$ پایین مثلثی است مشروط به‌اینکه به ازای $j<k$، $B_{jk}=0$. پس، $B$ پایین مثلثی خواهد بود اگر و تنها اگر

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr}P_{rk}=-A_{kk},\quad \begin{matrix}1\leqslant j\leqslant k-1\\ 2\leqslant k\leqslant n.\end{matrix} \tag{۵-۹}$$

از این‌رو، می‌بینیم که حکم (الف) هم‌ارز با این حکم است که اسکالرهایی چون $P_{rk}$، $1\leqslant r\leqslant k$، $1\leqslant k\leqslant n$ وجوددارند که‌در (۹-۵) صدق می‌کنند و $P_{kk}=1$، $1\leqslant k\leqslant n$.

در (۹-۵)، به ازای هر $k>1$ دستگاهی از $k-1$ معادلهٔ خطی با مجهولهای $P_{1k}$، $P_{2k}$، ...، $P_{k-1,k}$ وجود دارد. ماتریس ضرایب این دستگاه عبارت است از

$$\begin{bmatrix} A_{۱۱} & \cdots & A_{۱,k-۱} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k-۱,۱} & & A_{k-۱,k-۱} \end{bmatrix}$$

و دترمینان آن برابر کهاد اصلی $\Delta_{k-۱}(A)$ است. اگـر هر $\Delta_{k-۱}(A)\neq ۰$ دستگاههای (۹-۵) دارای جوابهای یکتا می‌باشند. تا اینجا نشان داده‌ایم که حکم (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند و ماتریس $P$ یکتاست

حال فرض‌کنیم که (الف) برقرار باشد. آنگاه، همان‌طورکه خواهیم دید

$$\begin{aligned} \Delta_k(A) &= \Delta_k(B) \\ &= B_{۱۱}B_{۲۲}\cdots B_{kk}, \quad k=۱,\cdots,n. \end{aligned} \tag{۹-۶}$$

برای بررسی (۹-۶)، فـرض کنیم $A_۱$ ، ... ، $A_n$ و $B_۱$ ، ... ، $B_n$ بترتیب ستونهای $A$ و $B$ باشند. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} B_۱ &= A_۱ \\ B_r &= \sum_{j=۱}^{r-۱} P_{jr}A_j + A_r, \quad r>۱ \end{aligned} \tag{۹-۷}$$

حال $k$ را ثابت می‌گیریم $۱\leqslant k\leqslant n$ . از (۹-۷) بر می‌آیدکه $r$مین ستون ماتریس

$$\begin{bmatrix} B_{۱۱} & \cdots & B_{۱k} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k۱} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}$$

باافزودن ترکیبی خطی از دیگر ستونها به‌ستون $r$م

$$\begin{bmatrix} A_{۱۱} & \cdots & A_{۱k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k۱} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید. چنین اعمالی دترمینان را تغییر نمی‌دهند. ایـن مطلب ، (۹-۶) را ثابت می‌کند، به‌استثنای این مطلب بدیهی که چون $B$ مثلثی است، $\Delta_k(B)=B_{۱۱}\cdots B_{kk}$. چون $A$ و $P$ معکوس‌پذیرند $B$ نیز معکوس‌پذیر است. بنابراین

$$\Delta(B)=B_{۱۱}\cdots B_{nn}\neq ۰$$

واز این‌رو $\Delta_k(A)\neq ۰$ ، $k=۱,\cdots,n$. □

قضیهٔ۶. گیریم $f$ یك‌فرم روی‌یك فضای برداری‌بعد متناهی $V$ و$A$ ماتریس $f$دریك پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ باشد. دراین‌صورت $f$ یك فرم مثبت است اگر وتنها اگر $A=A^*$ وکهادهای اصلی $A$ همگی مثبت باشند.

اثبات. ابتدا نیمهٔ جالب قضیه را انجام می‌دهیم. فرض کنیم $A=A^*$ و $\Delta_k(A)>0$، $1\leqslant k\leqslant n$. طبق‌لم، یك ماتریس بالا مثلثی (یکتای) $P$ با $P_{kk}=1$ وجود دارد که $B=AP$ پایین مثلثی است. ماتریس $P^*$ نیز پایین مثلثی است، بنابراین $P^*B=P^*AP$ نیز پایین مثلثی است. چون $A$ خود الحاق است، ماتریس $D=P^*AP$ هم خودالحاق می‌باشد. هر ماتریس مثلثی خودالحاق لزوماً ماتریسی قطری است. با همان استدلالی‌که منجر به (۹-۶) شد داریم

$$\begin{aligned}\Delta_k(D)&=\Delta_k(P^*B)\\&=\Delta_k(B)\\&=\Delta_k(A).\end{aligned}$$

چون $D$ قطری است کهادهای اصلی آن عبارتنداز

$$\Delta_k(D)=D_{11}\cdots D_{kk}.$$

بنابر $\Delta_k(D)>0$، $1\leqslant k\leqslant n$، به‌ازای هر$k$، داریم $D_{kk}>0$.

اگر $A$ ماتریس‌فرم $f$ درپایهٔ مرتب $\mathscr{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ باشد، آنگاه $D=P^*AP$ ماتریس $f$ در پایهٔ $\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}$ تعریف شده توسط

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i$$

است. حال به(۹-۲) توجه کنید. چون $D$ قطری است و درایه‌های روی قطرش مثبت هستند، بدیهی است که

$$X^*DX>0,\quad X\neq 0$$

که از آن نتیجه می‌شود $f$ فرمی مثبت است.

حال، فرض‌کنیم با فرم مثبتی چون $f$ آغازکرده باشیم. می‌دانیم که $A=A^*$. چگونه نشان دهیم‌که $\Delta_k(A)>0$، $1\leqslant k\leqslant n$؟ فرض می کنیم $V_k$ زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$، ...، $\alpha_k$ و $f_k$ تحدید $f$ به $V_k\times V_k$ باشد. به‌بیانی هم‌ارز، $f_k$ فرمی مثبت روی $V_k$ است و درپایهٔ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1k}\\\vdots&&\\A_{k1}&\cdots&A_{kk}\end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، به‌عنوان پیامدی ازقضیهٔ ۵، ملاحظه‌کردیم‌که مثبت بودن یك فرم

ایجاب می‌کند که دترمینان هرماتریس نمایش آن هم مثبت باشد. □

برای تکمیل بحث خود دربارهٔ رابطهٔ بین فرمهای مثبت وماتریسها، چند نکته‌وجود دارد که بایدآنها را متذکرشویم. چه‌چیزی مشخص کنندهٔ ماتریسهایی است که فرمهای‌مثبت را نمایش می‌دهند؟ اگر $f$ فرمی روی یک فضای برداری مختلط و $A$ ماتریس $f$ درپایهٔ مرتبی باشد، آنگاه $f$ مثبت خواهد بود اگروتنها اگر $A=A^*$ و

(۸-۹) $\qquad$ به‌ازای هر $X\neq 0$ مختلط $\qquad X^*AX>0$.

از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که شرط $A=A^*$ زاید است، یعنی (۸-۹) شرط $A=A^*$ را هم ایجاب می‌کند. ازطرف دیگر، اگربا یك فضای برداری حقیقی سروکار داشته باشیم، فرم $f$ مثبت خواهد بود اگروتنهااگر $A=A^t$ و

(۹-۹) $\qquad$ به‌ازای هر $X\neq 0$ حقیقی $\qquad X^tAX>0$.

باید تأکیدکنیم که اگرماتریسی حقیقی چون $A$ در (۹-۹) صدق کند، نتیجه نمی‌شود که $A=A^t$. مطلبی که درست است این است که اگر $A=A^t$ و (۹-۹) برقرارباشد، آنگاه (۸-۹) نیزبرقرار است. این امر بدین‌دلیل است که

$$(X+iY)^*A(X+iY)=(X^t-iY^t)A(X+iY)$$
$$=X^tAX+Y^tAY+i[X^tAY-Y^tAX]$$

واگر $A=A^t$ آنگاه $Y^tAX=X^tAY$.

اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های مختلط باشد و اگر $A$ در (۸-۹) صدق کند، $A$ را یك **ماتریس مثبت** خواهیم نامید. نکاتی راکه قریباً متذکر شدیم باگفتن مطلب ذیل می‌توان خلاصه‌کرد: در هریك از حالات حقیقی یا مختلط، فرمی چون $f$ مثبت است اگر وتنهااگر ماتریس آن دریك (درواقع، درهر) پایهٔ مرتب، ماتریسی مثبت باشد.

حال فرض کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد و $f$ فرمی نامنفی روی $V$. عملگرخطی خودالحاق یکتایی چون $T$ روی $V$ وجود داردکه

(۱۰-۹) $\qquad f(\alpha,\beta)=(T\alpha|\beta).$

بعلاوه $T$ دارای این خاصیت اضافی نیزهست که $(T\alpha|\alpha)\geqslant 0$

**تعریف.** عملگری خطی چون $T$ روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ **نامنفی** است هرگاه $T=T^*$ و به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $(T\alpha|\alpha)\geqslant 0$. یك عملگر خطی مثبت عملگری مانند $T$ است که $T=T^*$ و به‌ازای هر $\alpha\neq 0$، $(T\alpha|\alpha)>0$.

اگر $V$ یك فضای برداری (حقیقی یا مختلط) با بعد متناهی و $(\cdot|\cdot)$ ضربی داخلی روی $V$ باشد، روی $V$ ردهٔ وابسته‌ای از عملگرهای خطی مثبت وجود دارد. به واسطهٔ

(۹-۱۰) تناظری یك به‌یك بین این رده از عملگرهای مثبت ودستهٔ همهٔ فرمهای مثبت روی $V$ یافت می‌شود. جهت تأکید روی روابط بین عملگرهای مثبت، فرمهای مثبت، وماتریسهای مثبت ازتمرینات این بخش استفاده خواهیم کرد. آنچه راکه گفتیم خلاصه می کنیم.

اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت اعداد مختلط باشد، احکام زیرهم‌ارزند.

(۱) $A$ مثبت است، یعنی وقتی که $x_1$، . . . ، $x_n$ اعدادی مختلط باشند و لااقل یکی ازآنها ۰ نباشد، آنگاه $\sum_j \sum_k A_{kj} x_j \bar{x}_k > 0$.

(۲) $(X|Y)=Y^*AX$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای مختلط $n\times 1$ است.

(۳) نسبت به‌ضرب داخلی استانده $(X|Y)=Y^*X$ روی ماتریسهای $n\times 1$، عملگر خطی $X \to AX$ مثبت است.

(۴) به‌ازای ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون $P$ روی $C$، $A=P^*P$.

(۵) $A=A^*$ وکهادهای اصلی $A$ همه مثبت هستند.

اگرهمهٔ درایه‌های $A$ حقیقی باشند، این مطالب هم‌ارزند با:

(۶) $A=A^t$ و $\sum_j \sum_k A_{kj} x_j x_k > 0$، درصورتی که $x_1$، . . . ، $x_n$ اعدادی‌حقیقی باشند، ولااقل یکی ازآنها صفرنباشد.

(۷) $(X|Y)=Y^tAX$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای حقیقی $n\times 1$ است.

(۸) نسبت به‌ضرب‌داخلی استاندهٔ $(X|Y)=Y^tX$ روی‌ماتریسهای حقیقی $n\times 1$، عملگر خطی $X \to AX$ مثبت است.

(۹) ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون $P$ با درایه‌های حقیقی وجود دارد که $A=P^tP$.

## تمرین

۱. فرض کنید $V$ فضای $C^2$ با ضرب داخلی استانده باشد. به‌ازای کدام بردار $\alpha$ در $V$، عملگر خطی مثبتی چون $T$ وجود دارد که $\alpha=T\epsilon_1$؟

۲. فرض کنید $V$ فضای $R^2$ با ضرب داخلی استانده باشد. اگر $\theta$ عددی حقیقی باشد، $T$ را عملگر خطی «دوران به‌اندازهٔ $\theta$» بگیرید:

$$T_\theta(x_1, x_2)=(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta,\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta).$$

به‌ازای کدام مقادیر $\theta$، عملگر $T_\theta$ مثبت است؟

۳. $V$را فضای ماتریسهای $n\times 1$ برروی $C$ باضرب داخلی $(X|Y)=Y^*GX$ (که درآن $G$ ماتریس $n\times n$ی است که تابع اخیر یك ضرب داخلی باشد) بگیرید. فرض کنید $A$ ماتریسی $n\times n$ و $T$ عملگر خطی $T(X)=AX$ باشد. $T^*$ را بیابید. اگر $Y$ عنصر ثابتی از $V$ باشد، عنصر $Z$ از $V$ را که تابعك خطی $X \to Y^*X$ را تعیین می کند،

بیابید. به‌بیان دیگر، $Z$ی را بیابید که به‌ازای هر $X$ در $V$، $Y^*X=(X|Z)$.

۴. فرض کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر $T$ و $U$ دوعملگر خطی مثبت روی $V$ باشند ثابت کنید $(T+U)$ هم‌مثبت است. مثالی بیاورید که نشان دهد $TU$ لزوماً مثبت نیست.

۵. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان‌دهید که $A$ مثبت است.

(ب) $V$ را فضای ماتریسهای حقیقی ۱ × ۲ با ضرب داخلی $(X|Y)=Y^tAX$ بگیرید. با به‌کار بستن فرایند گرام‌ـاشمیت برپایهٔ $\{X_۱, X_۲\}$ با فرض

$$X_۱=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \qquad X_۲=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V$ بیابید.

(پ) ماتریس حقیقی ۲ × ۲ معکوس‌پذیری چون $P$ بیابید که $A=P^tP$

۶. کدام‌یك از ماتریسهای ذیل مثبت‌اند؟

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱+i \\ ۱-i & ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}.$$

۷. مثالی از ماتریسی $n\times n$ بیاورید که همهٔ کهادهای اصلی آن مثبت باشند ولی خود ماتریسی مثبت نباشد.

۸. آیا $((x_۱, x_۲)|(y_۱ \;\; y_۲))=x_۱\bar{y}_۱+۲x_۲\bar{y}_۱+۲x_۱\bar{y}_۲+x_۲\bar{y}_۲$ ضربی داخلی روی $C^۲$ تعریف می‌کند؟

۹. ثابت کنید که همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریسی مثبت اعدادی مثبت هستند.

۱۰. فرض کنید $V$ یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر $T$ و $U$ عملگرهایی خطی روی $V$ باشند می‌نویسیم $T<U$ هرگاه $U-T$ عملگر مثبتی باشد. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) $T<U$ و $U<T$ غیرممکن است.
(ب) اگر $T<U$ و $U<S$، آنگاه $T<S$.
(پ) اگر $T<U$ و $S>0$ لزومی ندارد که $ST<SU$

۱۱. فرض کنید $V$ یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $E$ تصویر متعامد $V$ بروی زیر فضای دلخواهی باشد.
(الف) ثابت کنید که به‌ازای هرعدد مثبت $c$، عملگر $cI+E$ مثبت است.
(ب) عملگر خطی خودالحاق $T$ را که $T^2=I+E$ برحسب $E$ بیان کنید.

۱۲. فرض کنید $n$ عددی صحیح مثبت و $A$ ماتریس $n\times n$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید $A$ مثبت است.

۱۳. فرض کنید $A$ ماتریس $n\times n$ خودالحاقی باشد. ثابت کنید عددی حقیقی چون $c$ وجود دارد که ماتریس $cI+A$ مثبت باشد.

۱۴. ثابت کنید حاصل‌ضرب دوعملگرخطی مثبت عملگری است مثبت اگروتنها اگر آن دو عملگر جابجا شوند.

۱۵. فرض کنید $S$ و $T$ دو عملگر مثبت باشند. ثابت کنید که همهٔ مقادیر سرشت‌نمای $ST$ مثبت هستند.

## ۴.۹. چندمطلب دیگردربارهٔ فرمها

این بخش شامل دوقضیه است که اطلاعات مشروح‌تری دربارهٔ فرمهای (یك ونیم‌خطی) به‌دست می‌دهند.

قضیهٔ ۷. گیریم $f$ فرمی روی یك‌فضای برداری حقیقی یامختلط $V$ و $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ پایه‌ای برای زیر فضای بعد متناهی $W$ از $V$ باشد. فرض کنیم $M$ ماتریسی $r\times r$ با درایه‌های

$$M_{jk}=f(\alpha_k, \alpha_j)$$

و $W'$ مجموعهٔ همهٔ بردارهایی چون $\beta$ از $V$ باشدکه به‌ازای هر $\alpha$ در $W$، $f(\alpha, \beta)=0$. دراین‌صورت $W'$ زیرفضایی از $V$ است و $W\cap W'=\{0\}$ اگر و تنها اگر $M$ معکوس‌پذیر باشد. درصورت وقوع چنین وضعی $V=W+W'$

اثبات. اگر $\beta$ و $\gamma$ بردارهایی از $W'$ باشند و $c$ یك اسکالر، آنگاه به‌ازای هر $\alpha$ در $W$

$$\begin{aligned}f(\alpha, c\beta+\gamma)&=\bar{c}f(\alpha, \beta)+f(\alpha, \gamma)\\&=0.\end{aligned}$$

از این‌رو، $W'$ یك زیرفضای $V$ است.

حال فرض کنیم $\alpha=\sum_{k=1}^{r}x_k\alpha_k$ و $\beta=\sum_{j=1}^{r}y_j\alpha_j$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta)&=\sum_{j,k}\bar{y}_jM_{jk}x_k\\&=\sum_k\Big(\sum_j\bar{y}_jM_{jk}\Big)x_k.\end{aligned}$$

ازاین مطلب نتیجه می‌شودکه $W\cap W'\neq\{0\}$ اگروتنها اگردستگاه همگن

$$\sum_{j=1}^{r}\bar{y}_jM_{jk}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant r$$

دارای یك‌جواب غیرصفر $(y_1, \cdots, y_r)$ باشد. ازاین‌رو، $W\cap W'=\{0\}$ اگروتنها اگر $M^*$ معکوس‌پذیر باشد. اما معکوس‌پذیری $M^*$ هم‌ارز با معکوس‌پذیری $M$ است.

فرض کنیم $M$ معکوس‌پذیر باشد وبگیریم

$$A=(M^*)^{-1}=(M^{-1})^*.$$

$g_j$ را روی $V$ بنابرمعادلهٔ

$$g_j(\beta)=\sum_{k=1}^{r}A_{jk}\overline{f(\alpha_k, \beta)}$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه

$$\begin{aligned} g_j(c\beta+\gamma) &= \sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ c\beta+\gamma)} \\ &= c\sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ \beta)}+\sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ \gamma)} \\ &= cg_j(\beta)+g_j(\gamma). \end{aligned}$$

ازاین‌رو، هر $g_j$ تابعی خطی روی $V$ است. پس، می‌توانیم عملگری خطی چون $E$ روی $V$ را با قراردادن

$$E\beta=\sum_{j=1}^{r} g_j(\beta)\alpha_j$$

تعریف کنیم. چون

$$\begin{aligned} g_j(\alpha_n) &= \sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ \alpha_n)} \\ &= \sum_k A_{jk}(M^*)_{kn} \\ &= \delta_{jn} \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که به‌ازای $1 \leqslant n \leqslant r$، $E(\alpha_n)=\alpha_n$. این مطلب ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $\alpha$ در $W$، $E\alpha=\alpha$. بنابراین $E$، $V$ را بروی $W$ می‌نگارد و $E^2=E$. اگر $\beta$ برداری دلخواه از $V$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha_n,\ E\beta) &= f(\alpha_n,\ \sum_j g_j(\beta)\alpha_j) \\ &= \sum_j \overline{g_j(\beta)}f(\alpha_n,\ \alpha_j) \\ &= \sum_j(\sum_k \overline{A}_{jk}f(\alpha_k,\ \beta))f(\alpha_n,\ \alpha_j). \end{aligned}$$

چون $A^*=M^{-1}$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} f(\alpha_n,\ E\beta) &= \sum_k(\sum_j (M^{-1})_{kj}M_{jn})f(\alpha_k,\ \beta) \\ &= \sum_k \delta_{kn}f(\alpha_k,\ \beta) \\ &= f(\alpha_n,\ \beta). \end{aligned}$$

این مطلب ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $\alpha$ در $W$، $f(\alpha,\ E\beta)=f(\alpha,\ \beta)$. از این‌رو به‌ازای هر $\alpha$ در $W$ و هر $\beta$ در $V$

$$f(\alpha,\ \beta-E\beta)=0.$$

پس، $I-E$، $V$ را در $W'$ می‌نگارد. تساوی

$$\beta = E\beta + (I-E)\beta$$

نشان می‌دهد که $V = W + W'$. سرانجام به‌یك نکتهٔ نهایی هم باید اشاره کنیم. چون $W \cap W' = \{0\}$، هر بردار در $V$ به‌طور یکتا عبارت است از مجموع یك بردار در $W$ و یك بردار در $W'$. اگر $\beta$ در $W'$ باشد، نتیجه می‌شود که $E\beta = 0$. ازاین‌رو، $I-E$، $V$ را بروی $W'$ می‌نگارد. □

تصویر $E$ راکه دراثبات ساخته شد می‌توان به‌شرح ذیل مشخص کرد: $E\beta = \alpha$ اگروتنها اگر $\alpha$ در $W$ و $\beta - \alpha$ متعلق به $W'$ باشد. پس، $E$ مستقل از پایه‌ای از $W$است که درساختنش به‌کار رفت. ازاین‌رو، می‌توان به $E$ به‌عنوان **تصویر $V$ روی $W$** که **توسط** تجزیهٔ به‌مجموع مستقیم

$$V = W \oplus W'$$

**تعیین می‌شود** ارجاع کرد. توجه کنید که $E$ یك تصویرمتعامد است اگر و تنها اگر $W' = W^{\perp}$.

قضیهٔ ۸. گیریم $f$ یك فرم روی یك‌فضای برداری حقیقی یامختلط $V$ و $A$ ماتریس $f$ درپایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ از $V$ باشد. فرض کنیم کهادهای اصلی $A$ همگی مخالف ۰ باشند. دراین صورت ماتریس بالامثلثی یکتایی چون $P$ با $P_{kk} = 1$، ($1 \leqslant k \leqslant n$) وجود دارد که

$$P^* A P$$

نیز بالامثلثی باشد.

اثبات. چون $\Delta_k(A^*) = \overline{\Delta_k(A)}$، ($1 \leqslant k \leqslant n$)، کهادهای اصلی $A^*$ همگی مخالف ۰ هستند. از این‌رو، بنابر لمی که در اثبات قضیهٔ ۶ به‌کار رفت ماتریسی بالامثلثی چون $P$ با $P_{kk} = 1$ وجود دارد که $A^*P$ پایین‌مثلثی باشد. بنابراین، $P^*A = (A^*P)^*$ بالامثلثی است. چون حاصل‌ضرب دوماتریس بالامثلثی خود بالامثلثی است، نتیجه می گیریم که $P^*AP$ بالامثلثی می‌باشد. این مطلب وجود $P$، و نه‌یکتایی $P$، را نشان می‌دهد. اما، استدلالی بیشترهندسی هم وجود داردکه می‌تواند هم برای اثبات وجود وهم برای‌اثبات یکتایی $P$ به‌کار رود.

گیریم $W_k$ زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1$، ...، $\alpha_k$ و $W'_k$ مجموعهٔ همهٔ $\beta$های در $V$ باشدکه به‌ازای هر $\alpha$ در $W_k$، $f(\alpha, \beta) = 0$. چون $\Delta_k(A) \neq 0$، ماتریس $M$ با درایه‌های

$$M_{ij} = f(\alpha_j, \alpha_i) = A_{ij}$$

($1 \leqslant i, j \leqslant k$) یك ماتریس $k \times k$ی معکوس‌پذیراست. بنابرقضیهٔ ۷

$$V = W_k \oplus W'_k.$$

$E_k$ را تصویر $V$ روی $W_k$ که توسط این تجزیه تعیین می‌شود می گیریم و قرارمی‌دهیم $E_0=0$. فرض کنیم

$$\beta_k=\alpha_k-E_{k-1}\alpha_k, \quad (1\leqslant k\leqslant n).$$

دراین صورت $\beta_1=\alpha_1$ و به‌ازای هر $k>1$، $E_{k-1}\alpha_k$ به $W_{k-1}$ تعلق دارد. پس وقتی که $k>1$ اسکالرهای یکتایی چون $P_{jk}$ وجود دارند که

$$E_{k-1}\alpha_k=-\sum_{j=1}^{k-1}P_{jk}\alpha_j.$$

پس از قراردادن $P_{kk}=1$ و $P_{jk}=0$ به‌ازای $j>k$، ماتریس بالامثلثی $n\times n$، $P$ با $P_{kk}=1$ و

$$\beta_k=\sum_{j=1}^{k}P_{jk}\alpha_j$$

به‌ازای $k=1, \ldots, n$ را خواهیم داشت. فرض کنیم $1\leqslant i<k$. آنگاه $\beta_i$ در $W_i$ است و $W_i\subset W_{k-1}$. چون $\beta_k$ به $W'_{k-1}$ تعلق دارد، نتیجه می گیریم که $f(\beta_i, \beta_k)=0$. فرض کنیم $B$ ماتریس $f$ درپایهٔ مرتب $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ را نشان دهد. دراین صورت

$$B_{ki}=f(\beta_i, \beta_k)$$

وازاین‌رو، وقتی که $k>i$، $B_{ki}=0$ پس $B$ بالامثلثی است. ازطرف دیگر

$$B=P^*AP.$$

بعکس، فرض کنیم $P$ ماتریس بالامثلثی با $P_{kk}=1$ باشد که $P^*AP$ هم بالامثلثی است. حال می نویسیم

$$\beta_k=\sum_j P_{jk}\alpha_j \ , \quad (1\leqslant k\leqslant n).$$

آنگاه $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ به‌طورآشکار پایه‌ای برای $W_k$ می‌باشد. فرض کنیم $k>1$. در این صورت $\{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}\}$ پایه‌ای برای $W_{k-1}$ است و چون وقتی که $i<k$، $f(\beta_i, \beta_k)=0$ می بینیم که $\beta_k$ برداری از $W'_{k-1}$ است. معادله‌ای که $\beta_k$ راتعریف می کند ایجاب می نماید که

$$\alpha_k=-\left(\sum_{j=1}^{k-1}P_{jk}\alpha_j\right)+\beta_k.$$

حال $\sum_{j=1}^{k-1}P_{jk}\alpha_j$ متعلق به $W_{k-1}$ است، و $\beta_k$ در $W'_{k-1}$ قرار دارد. بنابراین، $P_{1k}$، ...، $P_{k-1k}$ اسکالرهای یکتایی هستند که

$$E_{k-1}\alpha_k = -\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j$$

و ازاین‌رو $P$ همان ماتریس ساخته شدهٔ قبلی است. □

## ۵.۹. نظریهٔ طیفی

دراین بخش، پیامدهای قضایای ۱۸ و ۲۲ در فصل ۸ را دررابطه با قطری کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال دنبال می‌کنیم.

**قضیهٔ ۹ (قضیهٔ طیفی).** گیریم $T$ عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی مختلط بعد متناهی $V$ یا عملگری خودالحاق روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی بعد متناهی $V$ باشد. فرض کنیم $c_1$، ...، $c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ باشند. فرض کنیم $W_j$ فضای سرشت‌نمای وابسته به $c_j$ و $E_j$ تصویر متعامد $V$ روی $W_j$ باشد. دراین‌صورت، وقتی $i \neq j$، $W_j$ بر $W_i$ عمود است، فضای $V$ مجموع مستقیم $W_1$، ...، $W_k$ است و

$$T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k. \tag{۹-۱۱}$$

اثبات. $\alpha$ را برداری از $W_j$، $\beta$ را برداری از $W_i$ می‌گیریم وفرض می‌کنیم $i \neq j$. در این صورت $c_j(\alpha|\beta) = (T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta) = (\alpha|c_i\beta)$. از این‌رو، $(c_j - c_i)(\alpha|\beta) = 0$ وچون $c_j - c_i \neq 0$، نتیجه می‌شود که $(\alpha|\beta) = 0$. پس وقتی $i \neq j$، $W_j$ بر $W_i$ عمود است. بنابراین واقعیت که $V$ دارای پایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نماست (با قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ مقایسه شود) نتیجه می‌گیریم که $V = W_1 + \cdots + W_k$. اگر $\alpha_j$ به $W_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ تعلق داشته باشد و $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$، آنگاه به‌ازای هر $i$

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_i | \sum_j \alpha_j) = \sum_j (\alpha_i|\alpha_j) \\ &= \|\alpha_i\|^2 \end{aligned}$$

وازاین‌رو، $V$ برابر مجموع مستقیم $W_1$، ...، $W_k$ است. بنابراین $E_1 + \cdots + E_k = I$ و

$$\begin{aligned} T &= TE_1 + \cdots + TE_k \\ &= c_1E_1 + \cdots + c_kE_k. \ \square \end{aligned}$$

تجزیهٔ (۹-۱۱)، **تفکیک طیفی** $T$ نامیده می‌شود. این اصطلاح تا اندازه‌ای از کاربردهای فیزیکی که موجب تعریف **طیف** یك عملگر خطی روی یك فضای برداری با بعد متناهی، به‌عنوان مجموعهٔ مقادیر سرشت‌نمای آن عملگر شدند ناشی می‌شود. این مهم است بدانیم که تصویرهای $E_1$،...،$E_k$ به‌طور متعارف به $T$ وابسته‌اند؛ درحقیقت،

اینها چندجمله‌ایهایی برحسب $T$ هستند.

**نتیجه.** اگر $e_j=\prod_{i\neq j}\left(\frac{x-c_i}{c_j-c_i}\right)$، آنگاه به ازای $1\leqslant j\leqslant k$، $E_j=e_j(T)$.

**اثبات.** چون وقتی $i\neq j$، $E_iE_j=0$ لذا نتیجه می‌شود که

$$T^2=c_1^2E_1+\cdots+c_k^2E_k.$$

و نیز با برهان استقرایی ساده‌ای به‌ازای هر عدد صحیح $n\geqslant 0$، داریم

$$T^n=c_1^nE_1+\cdots+c_k^nE_k.$$

به‌ازای هر چند جمله‌ای دلخواه

$$f=\sum_{n=0}^{r}a_nx^n$$

داریم

$$\begin{aligned}f(T)&=\sum_{n=0}^{r}a_nT^n\\&=\sum_{n=0}^{r}a_n\sum_{j=1}^{k}c_j^nE_j\\&=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=0}^{r}a_nc_j^n\right)E_j\\&=\sum_{j=1}^{k}f(c_j)E_j.\end{aligned}$$

از آنجا که $e_j(c_m)=\delta_{jm}$، نتیجه می‌شود که $e_j(T)=E_j$. □

چون $E_1,\cdots,E_k$ به‌طور متعارف به $T$ وابسته هستند و

$$I=E_1+\cdots+E_k$$

خانوادهٔ تصویرهای $\{E_1,\cdots,E_k\}$، **تفکیک همانی تعریف شده توسط** $T$ نامیده‌می‌شود.

نکته‌ای دربارهٔ اثبات قضیهٔ طیفی وجود دارد که باید تذکر داده شود. ما این قضیه را با استفاده از قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ در بارهٔ قطری‌کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال استنتاج کردیم. اثبات دیگری هم وجود دارد که بیشتر جبری است و در آن ابتدا باید نشان داد که چند جمله‌ای مینیمال هر عملگر نرمال برابر حاصل ضربی از سازه‌های اول متمایز است. آنگاه همچون اثبات قضیهٔ تجزیهٔ اولیه (قضیهٔ ۱۲ در فصل ۶) می‌توان به‌پیش رفت. چنین اثباتی را در بخش بعد ارائه خواهیم کرد.

در کاربردهای گوناگون لازم است بدانیم که آیا می‌توان توابع معینی از عملگرها و ماتریسها، مثلاً ریشهٔ دوم آنها را محاسبه کرد یا خیر. این امر را می‌توان به‌طور نسبتاً

ساده در مورد عملگرهای نرمال قطری شدنی انجام داد.

**تعریف.** گیریم $T$ یك عملگر نرمال قطری شدنی روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و

$$T=\sum_{j=1}^{k} f(c_j)E_j$$

تفکیك طیفی آن باشد. فرض کنیم $f$ تابعی باشد که دامنه‌اش طیف $T$ را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. دراین صورت عملگر خطی $f(T)$ بنابر معادلهٔ

$$f(T)=\sum_{j=1}^{k} f(c_j)E_j \qquad (۱۲\text{-}۹)$$

تعریف می‌شود.

**قضیهٔ ۱۰.** گیریم $T$ یك عملگر نرمال قطری‌شدنی باطیف $S$ روی یك فضای‌ضرب داخلی بعد متناهی $V$ باشد. فرض کنیم $f$ تابعی باشد که دامنه‌اش $S$ را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. در این صورت $f(T)$ یك عملگر نرمال قطری‌شدنی با طیف $f(S)$ است. اگر $U$ نگاشتی یکانی از $V$ بروی $V'$ باشد و $T'=UTU^{-1}$، آنگاه $S$ طیف $T'$ هم هست و

$$f(T')=Uf(T)U^{-1}.$$

**اثبات.** نرمال بودن $f(T)$ با محاسبهٔ ساده‌ای از (۹-۱۲) و با استفاده از این واقعیت که

$$f(T)^*=\sum_j \overline{f(c_j)}E_j$$

نتیجه می‌شود. علاوه براین، واضح است که به‌ازای هر $\alpha$ در $E_j(V)$

$$f(T)\alpha=f(c_j)\alpha.$$

پس مجموعهٔ $f(S)$ متشکل از همهٔ $f(c)$ها، به‌ازای $c$ در $S$، درطیف $f(T)$ جای دارد. بعکس، فرض کنیم $\alpha\neq 0$ و

$$f(T)\,\alpha=b\alpha.$$

آنگاه $\alpha=\sum_j E_j\alpha$ و

$$\begin{aligned} f(T)\alpha &= \sum_j f(T)E_j\alpha \\ &= \sum_j f(c_j)E_j\alpha \end{aligned}$$

www.riazisara.ir


$$= \sum_j bE_j\alpha.$$

ازاین‌رو،

$$\|\sum_j (f(c_j)-b)E_j\alpha\|^2 = \sum_j |f(c_j)-b|^2 \|E_j\alpha\|^2$$
$$=0.$$

بنابراین، $f(c_j)=b$ یا $E_j\alpha=0$. بنابه‌فرض، $\alpha\neq 0$ و لذا نمایه‌ای چون $i$ وجود دارد که $E_i\alpha\neq 0$. حال نتیجه می‌گیریم که $f(c_i)=b$ و لذا $f(S)$ خود طیف $f(T)$ است. درواقع فرض کنیم

$$f(S)=\{b_1, \cdots, b_r\}$$

که در آن $b_m\neq b_n$ هرگاه $m\neq n$. گیریم $X_m$ مجموعهٔ نمایه‌هایی چون $i$ باشد که $1\leqslant i\leqslant k$ و $f(c_i)=b_m$. فرض می‌کنیم $P_m=\sum_i E_i$. دراینجا مجموع بر روی نمایه‌های $i$ در $X_m$ گرفته می‌شود. دراین صورت $P_m$ تصویر متعامد $V$ روی زیرفضای بردارهای سرشت‌نمای متعلق به‌مقدار سرشت‌نمای $b_m$ از $f(T)$ است و

$$f(T)=\sum_{m=1}^{r} b_m P_m$$

تفکیك طیفی $f(T)$ است.

حال فرض کنیم $U$ تبدیلی یکانی از $V$ بروی $V'$ باشد و $T'=UTU^{-1}$. دراین صورت معادلهٔ

$$T\alpha=c\alpha$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$T'U\alpha=cU\alpha.$$

پس، $S$ طیف $T'$ است و $U$ هر زیرفضای سرشت‌نما برای $T$ را بروی زیرفضای متناظرش برای $T'$ می‌نگارد. درواقع، با استفاده از (۹-۱۲)، می‌بینیم که

$$T'=\sum_j c_j E'_j, \qquad E'_j=UE_jU^{-1}$$

تفکیك طیفی $T'$ است. ازاین‌رو،

$$f(T')=\sum_j f(c_j)E'_j$$
$$=\sum_j f(c_j)UE_jU^{-1}$$

$$=U(\sum_j f(c_j)E_j)U^{-1}$$
$$=Uf(T)U^{-1}.\ \square$$

هنگام تفکر روی بحث قبل، این مهم است به‌خاطر داشته باشیم که طیف عملگر نرمال $T$ مجموعهٔ

$$S=\{c_1,\ \cdots,\ c_k\}$$

از مقادیر سرشت‌نمای متمایز است. وقتی $T$ توسط ماتریسی قطری در پایه‌ای از بردارهای سرشت‌نما نمایش داده می‌شود، لازم است که هرمقدار $c_j$ به‌تعداد بعد فضای بردارهای سرشت‌نمای متناظرش تکرار بشود. علت تغییر نماد و درنتیجهٔ ذیل همین امر است.

**نتیجه.** با فرضهای قضیهٔ ۱۰، فرض‌کنیم $T$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ توسط ماتریس قطری $D$، با درایه‌های قطری $d_1$، $\cdots$، $d_n$، نمایش داده شود. آنگاه درپایهٔ $\mathcal{B}$، $f(T)$ توسط‌ماتریس قطری $f(D)$ بادرایه‌های قطری $f(d_1)$، $\cdots$، $f(d_n)$ نمایش داده می‌شود. اگر $\mathcal{B}'=\{\alpha'_1,\ \cdots,\ \alpha'_n\}$ پایهٔ مرتب دیگری بوده و $P$ ماتریسی باشدکه

$$\alpha'_j=\sum_j P_{ij}\alpha_i$$

آنگاه $P^{-1}f(D)P$ عبارت است از ماتریس $f(T)$ درپایهٔ $\mathcal{B}'$.

**اثبات.** به‌ازای هرنمایهٔ $i$، نمایهٔ $j$ یکتایی وجود دارد که $1\leqslant j\leqslant k$، $\alpha_i$ متعلق به $E_j(V)$ است، و $d_i=c_j$. پس، به‌ازای هر $i$، $f(T)\alpha_i=f(d_i)\alpha_i$ و

$$f(T)\alpha'_j=\sum_i P_{ij}f(T)\alpha_i$$
$$=\sum_i f(d_i)P_{ij}\alpha_i$$
$$=\sum_i (f(D)P)_{ij}\alpha_i$$
$$=\sum_i (f(D)P)_{ij}\sum_k P^{-1}_{ki}\alpha'_k$$
$$=\sum_k (P^{-1}f(D)P)_{kj}\ \alpha'_k.\ \square$$

ازاین نتیجه چنین استنباط می‌شود که می‌توان از هرماتریس نرمال توابع معینی تشکیل‌داد. زیرا فرض‌کنیم $A$ ماتریسی‌نرمال باشد. دراین‌صورت ماتریس معکوس‌پذیری چون $P$، و درواقع ماتریسی یکانی چون $P$ وجود داردکه $PAP^{-1}$ ماتریسی قطری، مثلاً $D$ با درایه‌های $d_1$، $\cdots$، $d_n$ باشد. گیریم $f$ تابع مختلطی باشدکه بتواند روی $d_1$،$\cdots$،$d_n$ به‌کاربسته شود و $f(D)$ ماتریس قطری با درایه‌های $f(d_1)$، $\cdots$، $f(d_n)$

باشد. دراین صورت $P^{-1}f(D)P$ مستقل از $D$ است و به‌معنی ذیل دقیقاً تابعی از $A$ است. اگر $Q$ ماتریس معکوس‌پذیر دیگر باشد که $QAQ^{-1}$ ماتریسی قطری چون $D'$ است، آنگاه $f$ را می‌توان بردرایه‌های قطری $D'$ به‌کار بست و

$$P^{-1}f(D)P=Q^{-1}f(D')Q.$$

**تعریف.** تحت شرایط بالا، $f(A)$ به‌صورت $P^{-1}f(D)P$ تعریف می‌شود.

ماتریس $f(A)$ را می‌توان به‌طریق دیگری هم مشخص کرد. برای انجام این امر، ذیلاً برخی از نتایج مربوط به‌ماتریسهای نرمال را که با فرمولبندی نظیر ماتریسی قضیهٔ قبل به‌دست می‌آیند بدون اثبات بیان می‌کنیم.

**قضیهٔ ۱۱.** گیریم $A$ ماتریسی نرمال و $c_1$، ...، $c_k$ ریشه‌های مختلط متمایز $\det(xI-A)$ باشند. فرض کنیم

$$e_i=\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-c_j}{c_i-c_j}\right)$$

و $E_i=e_i(A)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. دراین صورت $E_iE_j=0$ (هرگاه $i\neq j$)، $E_i^2=E_i$، $E_i^*=E_i$، و

$$I=E_1+\cdots+E_k.$$

اگر $f$ تابع مختلطی باشدکه دامنهٔ آن شامل $c_1$، ...، $c_k$ است، آنگاه

$$f(A)=f(c_1)E_1+\cdots+f(c_k)E_k$$

و بخصوص، $A=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$.

یادآوری می‌کنیم که هرعملگر روی یک‌فضای ضرب داخلی $V$ نامنفی است، هرگاه $T$ خودالحاق باشد و به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $(T\alpha|\alpha)\geqslant 0$.

**قضیهٔ ۱۲.** فرض‌کنیم $T$ یك عملگر نرمال قطری شدنی روی یك فضای ضرب‌داخلی بعد متناهی $V$ باشد. در این‌صورت $T$ خودالحاق، نامنفی، یایکانی است، برحسب اینکه هرمقدار سرشت‌نمای $T$ حقیقی، نامنفی، یا با قدرمطلق ۱ باشد.

اثبات. اگر $T$ دارای تکفیك طیفی $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$ باشد، آنگاه $T^*=\bar{c}_1E_1+\cdots+\bar{c}_kE_k$. این گفته که $T$ خودالحاق است عیناً مثل این‌است که‌بگوییم $T=T^*$ یا

$$(c_1-\bar{c}_1)E_1+\cdots+(c_k-\bar{c}_k)E_k=0.$$

با استفاده ازاین واقعیت که به‌ازای $i\neq j$ ، $E_iE_j=0$ و نیز ازاینکه هیچ‌یك از $E_j$ها عملگرصفر نیست،می‌بینیم که $T$ خودالحاق است اگروتنها اگر $c_j=\bar{c}_j$، $j=1,\cdots,k$.

برای تشخیص عملگرهای نرمالی که نامنفی می‌باشند، به

$$(T\alpha|\alpha) = \Big(\sum_{j=1}^{k} c_j E_j\alpha \Big| \sum_{i=1}^{k} E_i\alpha\Big)$$
$$= \sum_i \sum_j c_j (E_j\alpha|E_i\alpha)$$
$$= \sum_j c_j \|E_j\alpha\|^2$$

توجه کنید. دراینجا ازاین واقعیت که به‌ازای $i \neq j$ ، $(E_j\alpha|E_i\alpha) = 0$ استفاده کرده‌ایم. ازاین مطلب آشکار است که شرط $(T\alpha|\alpha) \geqslant 0$ برآورده می‌شود اگر وتنها اگر به‌ازای هر $j$ ، $c_j \geqslant 0$ . برای تشخیص عملگرهای یکانی مشاهده می کنیم که

$$TT^* = c_1\bar{c}_1 E_1 + \cdots + c_k\bar{c}_k E_k$$
$$= |c_1|^2 E_1 + \cdots + |c_k|^2 E_k.$$

اگر $TT^* = I$، آنگاه $I = |c_1|^2 E_1 + \cdots + |c_k|^2 E_k$ وبااثر دادن $E_j$،

$$E_j = |c_j|^2 E_j.$$

چون $E_j \neq 0$ داریم $|c_j|^2 = 1$ یا $|c_j| = 1$. بعکس، اگربه‌ازای‌هر $j$، $|c_j|^2 = 1$ واضح است که $TT^* = I$. □

توجه‌به‌این نکته که این‌قضیه، قضیه‌ای درمورد عملگرهای نرمال است حائز اهمیت است. اگر $T$ یك عملگر خطی عمومی روی $V$ با مقادیر سرشت‌نمای حقیقی باشد، نتیجه نمی‌توان گرفت که $T$ خودالحاق است. این قضیهٔ حکم می کندکه اگر $T$ دارای مقادیر سرشت‌نمای حقیقی‌باشد و اگر $T$ قطری شدنی ونرمال باشد، آنگاه $T$ خودالحاق است. قضیه‌ای ازاین نوع، شباهت بین عمل الحاق و فرایند تشکیل مزدوج اعداد مختلط را تقویت‌می کند. اگر به‌ازای‌عدد مختلط $z$ داشته باشیم $z = \bar{z}$ یا $\bar{z}z = 1$، آنگاه یا $z$ عددی حقیقی است یا قدرمطلقش ۱ است. همچنین، اگر به‌ازای عملگر $T$ داشته باشیم $T = T^*$ یا $T^*T = I$ آنگاه یا $T$ عملگری است خودالحاق یا یکانی.

اکنون می‌خواهیم دوقضیهٔ اثبات‌کنیم که نظیر دوحکم زیر هستند:

(۱) هرعدد نامنفی یك جذر (ریشهٔ دوم) نامنفی یکتا دارد.

(۲) هرعددمختلط، به‌صورت $ru$ ، که درآن $r$ نامنفی و $|u| = 1$، قابل بیان است. این همان تجزیهٔ قطبی $z = re^{i\theta}$ برای اعداد مختلط است.

**قضیهٔ ۱۳.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $T$ عملگری نامنفی روی $V$ باشد. در این‌صورت $T$ دارای یك جذر (ریشهٔ دوم) نامنفی یکتاست، یعنی یك وتنها یك عملگر نامنفی چون $N$ روی $V$ وجود داردکه $N^2 = T$.

اثبات. $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$ را تفکیك طیفی $T$ می گیریم. بنابرقضیهٔ ۱۲، هر $c_j$ نامنفی است. اگر $c$ یك عدد حقیقی نامنفی باشد، فرض می کنیم $\sqrt{c}$ جذر نامنفی $c$ را نشان دهد. دراین‌صورت، بنابرقضیهٔ ۱۱ و (۹-۱۲) $N=\sqrt{T}$ عملگر نرمال قطری‌شدنی خوش تعریفی روی $V$ است. بنابرقضیهٔ ۱۲ این عملگر نامنفی است و با محاسبه‌ای ساده $N^2=T$.

حال گیریم $P$ عملگری نامنفی روی $V$ باشد و $P^2=T$. ثابت خواهیم کرد که $P=N$. فرض کنیم

$$P=d_1F_1+\cdots+d_rF_r$$

تفکیك طیفی $P$ باشد. دراین‌صورت به‌ازای هر $j$، $d_j\geqslant 0$ چراکه $P$ نامنفی است. بنابر $P^2=T$ داریم

$$T=d_1^2F_1+\cdots+d_r^2F_r.$$

حال $F_1$، $\cdots$، $F_r$ درشرایط $I=F_1+\cdots+F_r$، $F_iF_j=0$ به‌ازای $i\neq j$ واینکه هیچ یك از $F_j$ها ۰ نیست، صدق می کنند. اعداد $d_1^2$، $\cdots$، $d_r^2$ متمایزند، چرا که اعداد نامنفی متمایز دارای جذرهای متمایز هستند. بنابر یکتایی تفکیك طیفی باید داشته باشیم $r=k$ و (احیاناً با تغییر ترتیب) $F_j=E_j$ و $d_j^2=c_j$. پس $P=N$. □

**قضیهٔ ۱۴.** فرض‌کنیم $V$ یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. در این‌صورت عملگری یکانی چون $U$ روی $V$ و عملگری نامنفی چون $N$ روی $V$ وجود دارند به‌طوری‌که $T=UN$ عملگر نامنفی $N$ یکتاست. اگر $T$ معکوس‌پذیر باشد، عملگر $U$ نیز یکتاست.

اثبات. فرض کنیم داشته باشیم $T=UN$ که در آن $U$ یکانی و $N$ نامنفی است. دراین‌صورت $T^*=(UN)^*=N^*U^*=NU^*$. پس، $T^*T=NU^*UN=N^2$. این مطلب نشان می‌دهد که $N$ به‌گونه‌ای یکتا به‌عنوان جذر نامنفی عملگر نامنفی $T^*T$ تعیین می‌شود.

ازاین‌رو، برای شروع اثبات وجود $U$ و $N$ قضیهٔ ۱۳ را برای تعریف $N$ به‌عنوان یکتا جذر نامنفی $T^*T$ به‌کار می بریم. اگر $T$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $N$ نیز معکوس‌پذیر است، چراکه

$$(N\alpha|N\alpha)=(N^2\alpha|\alpha)=(T^*T\alpha|\alpha)=(T\alpha|T\alpha).$$

دراین حالت $U=TN^{-1}$ را تعریف و اثبات می‌کنیم که $U$ یکانی است. اما $U^*=(TN^{-1})^*=(N^{-1})^*T^*=(N^*)^{-1}T^*=N^{-1}T^*$. پس

$$\begin{aligned}UU^*&=TN^{-1}N^{-1}T^*\\&=T(N^{-1})^2T^*\end{aligned}$$

$$=T(N^{2})^{-1}T^{*}$$
$$=T(T^{*}T)^{-1}T^{*}$$
$$=TT^{-1}(T^{*})^{-1}T^{*}$$
$$=I$$

و $U$ یکانی است.

اگر $T$ معکوس‌پذیر نباشد، برای تعریف $U$ ناگزیر به‌انجام کمی کار بیشتر هستیم. ابتدا $U$ را روی برد $N$ تعریف مـی‌کنیم. گیریم $\alpha$ بـرداری در برد $N$، مثلاً $\alpha=N\beta$ باشد. با این‌انگیزه که می‌خواهیم $UN\beta=T\beta$ باشد، $U\alpha$ را مساوی $T\beta$ تعریف می‌کنیم. باید نشان دهیم که $U$ روی برد $N$ خوش تعریف است؛ به‌بیان دیگر، اگر $N\beta'=N\beta$، آنگاه $T\beta'=T\beta$. قبلاً نشان دادیم که به‌ازای هر $\gamma$ در $V$، $\|N\gamma\|^{2}=\|T\gamma\|^{2}$. پس، به‌ازای $\gamma=\beta-\beta'$ می‌بینیم که $N(\beta-\beta')=0$ اگر وتنها اگر $T(\beta-\beta')=0$. از این‌رو، $U$ روی برد $N$ خوش‌تعریف و واضح است که در جایی کـه تعریف شود، خطی است. حال اگر $W$ برد $N$ باشد، $U$ را روی $W^{\perp}$ تعریف می کنیم. برای انجام این‌کار، به‌مطلب ذیل نیازمندیم. چون فضاهای پوچ $T$ و $N$ مساوی هستند، بعد بردشان نیز مساوی است. درنتیجه، $W^{\perp}$ همان بعدی را داردکه مکمل متعامد برد $T$. بنابراین، یك یکریختی (فضای ضرب داخلی) چون $U_{0}$ از $W^{\perp}$ بروی $T(V)^{\perp}$ وجود دارد. تا اینجا $U$ را روی $W$ تعریف کرده‌ایم، و حالا روی $W^{\perp}$، $U$ را همان $U_{0}$ تعریف می کنیم.

اجازه دهید تعریف $U$ را تکرار کنیم. چون $V=W\oplus W^{\perp}$، هر $\alpha$ در $V$ به‌طور یکتا به‌صورت $\alpha=N\beta+\gamma$ قابل بیان است. دراینجا $N\beta$ در $W$، یعنی دربرد $N$ است و $\gamma$ در $W^{\perp}$. حال تعریف می‌کنیم

$$U\alpha=T\beta+U_{0}\gamma.$$

این $U$ بوضوح خطی است و قبلاً نشان دادیم که خوش تعریف نیزهست. همچنین

$$(U\alpha|U\alpha)=(T\beta+U_{0}\gamma|T\beta+U_{0}\gamma)$$
$$=(T\beta|T\beta)+(U_{0}\gamma|U_{0}\gamma)$$
$$=(N\beta|N\beta)+(\gamma|\gamma)$$
$$=(\alpha|\alpha).$$

پس، $V$ یکانی است. بعلاوه به‌ازای هر $\beta$ داریم $UN\beta=T\beta$. □

$T=UN$ را **تجزیه‌ای قطبی** برای $T$ می‌نامیم. مسلماً نمی‌توانیم آن‌را تنها تجزیهٔ قطبی بنامیم، چراکه $U$ یکتا نیست. حتی وقتی‌که $T$ معکوس‌پذیر و درنتیجه $U$ یکتا باشد این مشکل را داریم که $U$ و $N$ ممکن است جابجا نشوند. در واقع، آنها جابجا می‌شوند

اگروتنها اگر $T$ نرمال باشد. مثلاً، اگر به‌ازای $N$ نامنفی و $U$ یکانی $T=UN=NU$، آنگاه

$$TT^*=(NU)(NU)^*=NUU^*N=N^2=T^*T.$$

عملگر عمومی $T$ نیز تجزیه‌ای چون $T=N_1U_1$ با $N_1$ نامنفی و $U_1$ یکانی خواهد داشت. دراینجا، $N_1$ جذر نامنفی $TT^*$ است. این‌نتیجه را می‌توان با به‌کار بستن قضیه‌ای که قریباً اثبات شد، روی عملگر $T^*$ وسپس با گرفتن الحاقی، به‌دست آورد.

اکنون به‌مسئلهٔ قطری‌کردن همزمان خانواده‌های جابجا شوندهٔ عملگرهای نرمال باز می‌گردیم. برای این‌منظور، اصطلاح ذیل مناسب است.

**تعاریف.** گیریم $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای روی یك فضای ضرب داخلی $V$ باشد. تابعی چون $r$ روی $\mathscr{F}$ با مقادیر درهیأت اسکالرهای $F$، یك ریشهٔ $\mathscr{F}$ نامیده می‌شود هرگاه $\alpha$ی غیر صفری در $V$ وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $T$ در $\mathscr{F}$

$$T\alpha=r(T)\alpha.$$

به‌ازای هرتابع $r$ از $\mathscr{F}$ به $F$، $V(r)$ را مجموعهٔ همهٔ $\alpha$های در $V$ می‌گیریم‌که به‌ازای هر $T$ در $\mathscr{F}$، $T\alpha=r(T)\alpha$.

دراین‌صورت $V(r)$ زیرفضایی از $V$ و $r$ ریشه‌ای از $\mathscr{F}$ است اگر و تنها اگر $V(r)\neq\{0\}$. هر $\alpha$ی غیرصفر در $V(r)$ به‌طور همزمان یك بردار سرشت‌نما برای همهٔ $T$های در $\mathscr{F}$ است.

**قضیهٔ ۱۵.** گیریم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای نرمال قطری شدنی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ باشد. دراین صورت $\mathscr{F}$ تنها دارای تعدادی متناهی ریشه است. اگر $r_1$، ...، $r_k$ ریشه‌های متمایز $\mathscr{F}$ باشند، آنگاه

(۱) وقتی $i\neq j$، $V(r_i)$ بر $V(r_j)$ عمود است، و

(۲) $V=V(r_1)\oplus\cdots\oplus V(r_k)$

اثبات. فرض‌کنیم $r$ و $s$ ریشه‌های متمایز $\mathscr{F}$ باشند. دراین‌صورت عملگری چون $T$ در $\mathscr{F}$ وجود داردکه $r(T)\neq s(T)$. ازآنجاکه بردارهای سرشت‌نمای متعلق به مقادیر سرشت‌نمای متمایز $T$ لزوماً متعامد می‌باشند، نتیجه می‌شودکه $V(r)$ بر $V(s)$ عموداست. چون $V$ با بعد متناهی است این مطلب ایجاب می‌کندکه $\mathscr{F}$ حداکثر تعداد متناهی ریشه داشته باشد. $r_1$، ...، $r_k$ را ریشه‌های $\mathscr{F}$ می‌گیریم. فرض کنیم $\{T_1,\ldots,T_m\}$ یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکسیمال $\mathscr{F}$ باشد و

$$\{E_{i1},E_{i2},\ldots\}$$

تفکیك همانی تعریف شده توسط $T_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. آنگاه تصویرهای $E_{ij}$ خانواده‌ای

جابجایی تشکیل می‌دهند. زیرا هر $E_{ij}$ یك چندجمله‌ای در $T_i$ است و $T_1$، ۰۰۰، $T_m$ با یکدیگر جابجا می‌شوند. چون

$$I=(\sum_{j_1} E_{1j_1})(\sum_{j_2} E_{2j_2}) \cdots (\sum_{j_m} E_{mj_m})$$

هر بردار $\alpha$ در $V$ را می‌توان به‌صورت

$$\alpha=\sum_{j_1, \cdots, j_m} E_{1j_1}E_{2j_2} \cdots E_{mj_m}\alpha \qquad (۱۳\text{-}۹)$$

نوشت. فرض کنیم $j_1$، ۰۰۰، $j_m$ نمایه‌هایی باشند که به‌ازای آنها $\beta=E_{1j_1}E_{2j_2} \cdots E_{mj_m}\alpha \neq 0$.

می‌نویسیم

$$\beta_i=(\prod_{n\neq i} E_{nj_n})\alpha.$$

دراین صورت $\beta=E_{ij_i}\beta_i$؛ پس اسکالری چون $c_i$ وجود دارد که

$$T_i\beta=c_i\beta, \qquad 1\leqslant i\leqslant m.$$

به‌ازای هر $T$ در $\mathscr{F}$ اسکالرهای یکتایی چون $b_i$ وجود دارند که

$$T=\sum_{i=1}^{m} b_iT_i.$$

پس

$$T\beta=\sum_i b_iT_i\beta$$
$$=(\sum_i b_ic_i)\beta.$$

بدیهی است تابع $T \to \sum_i b_ic_i$ یکی از ریشه‌های $\mathscr{F}$، مثلا $r_t$، است و $\beta$ هم در $V(r_t)$ قرار دارد. بنابراین،هر جملهٔ غیرصفر در (۹-۱۳) به‌یکی‌ازفضاهای $V(r_1)$، ۰۰۰، $V(r_k)$ تعلق دارد. از اینجا نتیجه می‌شود که $V$ مجموع مستقیم متعامد $V(r_1)$، ۰۰۰، $V(r_k)$ است. □

**نتیجه.** تحت فرضهای قضیهٔ فوق، $P_j$ را تصویرمتعامد $V$ روی $V(r_j)$، $1\leqslant j\leqslant k$ می‌گیریم. آنگاه وقتی‌که $i\neq j$، $P_iP_j=0$،

$$I=P_1+ \cdots +P_k$$

و هر $T$ در $\mathscr{F}$ می‌تواند به‌صورت

$$T=\sum_j r_j(T)P_j \qquad (۱۴\text{-}۹)$$

نوشته شود.

**تعاریف.** خانوادهٔ تصویرهای متعامد $\{P_1, \ldots, P_k\}$ **به‌تفکیک همانی تعیین‌شده توسط** $\mathcal{F}$ و (۹-۱۴) **به‌تفکیک طیفی** $T$ **برحسب این خانواده**، موسوم است.
با اینکه تصویرهای $P_1$، ...، $P_k$ درنتیجهٔ قبل به‌طور متعارف به خانوادهٔ $\mathcal{F}$ وابسته‌اند، عموماً نه در $\mathcal{F}$ قرار دارند ونه حتی ترکیبهایی خطی از عملگرهای واقع در $\mathcal{F}$ هستند؛ بااین وجود نشان خواهیم دادکه این تصویرها را می‌توان از تشکیل حاصل‌ضربهای معینی از چندجمله‌ایهایی از اعضای $\mathcal{F}$ به‌دست‌آورد.
درمطالعهٔ هرخانواده‌ای از عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی، درنظر گرفتن جبر خودالحاق تولید شده توسط این خانواده معمولاً سودمند است.

**تعریف.** یك **جبر خودالحاق از عملگرهای** روی یك فضای ضرب‌داخلی $V$ زیرجبری خطی از $L(V, V)$ است‌که شامل الحاقی هریك از عناصرش باشد.

مثالی ازیك جبرخودالحاق، خود $L(V, V)$ است. چون‌اشتراك هردسته ازجبرهای خودالحاق مجدداً جبری خودالحاق است، اصطلاح ذیل بامعنی است.

**تعریف.** اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد، **جبر خودالحاق تولید شده توسط** $\mathcal{F}$ عبارت است از کوچکترین جبر خودالحاقی‌که شامل $\mathcal{F}$ باشد.

**قضیهٔ ۱۶.** گیریم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای جابجا شونده از عملگرهای نرمال قطری شدنی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ و $\mathcal{A}$ جبر خودالحاق تولید شده توسط $\mathcal{F}$ و عملگر همانی باشد. فرض‌کنیم $\{P_1, \ldots, P_k\}$ تفکیك همانی تعریف‌شده توسط $\mathcal{F}$ باشد. دراین‌صورت $\mathcal{A}$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای به‌صورت

$$T = \sum_{j=1}^{k} c_j P_j \tag{۹-۱۵}$$

روی $V$ است‌که درآنها $c_1$، ...، $c_k$ اسکالرهایی دلخواه هستند.

اثبات. فرض‌کنیم $\mathcal{C}$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای به‌صورت (۹-۱۵) روی $V$ را نشان دهد. دراین‌صورت $\mathcal{C}$ شامل عملگر همانی والحاقی

$$T^* = \sum_j \bar{c}_j P_j$$

از هریك از عناصرش است. اگر $T = \sum_j c_j P_j$ و $U = \sum_j d_j P_j$، آنگاه به‌ازای هر اسکالر $a$

$$aT+U=\sum_j (ac+d_j)P_j$$

و

$$TU=\sum_{i,j} c_i d_j P_i P_j$$
$$=\sum_j c_j d_j P_j$$
$$=UT.$$

پس $\mathscr{C}$ جبر جابجایی خودالحاقی است شامل $\mathscr{T}$ و عملگر همانی. بنابراین $\mathscr{C}$ شامل $\mathscr{A}$ هم هست.

حال فرض کنیم $r_1$، ...، $r_k$ همهٔ ریشه‌های $\mathscr{T}$ باشند. آنگاه به‌ازای هرجفت از نمایه‌های $(i, n)$ با $i\neq n$، در $\mathscr{T}$ عملگری چون $T_{in}$ وجود دارد که $r_i(T_{in})\neq r_n(T_{in})$. فرض کنیم $a_{in}=r_i(T_{in})-r_n(T_{in})$ و $b_{in}=r_n(T_{in})$. دراین صورت عملگر خطی

$$Q_i=\prod_{n\neq i} a_{in}^{-1}(T_{in}-b_{in}I)$$

عنصری از جبر $\mathscr{A}$ است. نشان خواهیم داد که $Q_i=P_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. برای این منظور، فرض کنیم $j\neq i$ و نیز $\alpha$ بردار دلخواهی از $V(r_j)$ باشد. دراین صورت

$$T_{ij}\alpha=r_j(T_{ij})\alpha$$
$$=b_{ij}\alpha$$

پس $(T_{ij}-b_{ij}I)\alpha=0$. چون سازه‌های در $Q_i$ همگی (با یکدیگر) جابجا می‌شوند، نتیجه می گیریم که $Q_i\alpha=0$. پس درصورتی که $j\neq i$، $Q_i$ روی $V(r_j)$ با $P_i$ مساوی است. حال فرض کنیم $\alpha$ برداری از $V(r_i)$ باشد. آنگاه $T_{in}\alpha=r_i(T_{in})\alpha$ و

$$a_{in}^{-1}(T_{in}-b_{in}I)\alpha=a_{in}^{-1}[r_i(T_{in})-r_n(T_{in})]\alpha=\alpha.$$

پس، $Q_i\alpha=\alpha$ و $Q_i$ روی $V(r_i)$ با $P_i$ مساوی است؛ بنابراین به‌ازای $i=1, \ldots, k$، $Q_i=P_i$. ازاین مطلب نتیجه می‌شود که $\mathscr{C}=\mathscr{A}$. □

این قضیه نشان می‌دهد که جبر $\mathscr{A}$ جابجایی است وهرعنصر $\mathscr{A}$ یك عملگر نرمال قطری‌شدنی است. حال نشان می‌دهیم که $\mathscr{A}$ یك تك مولد هم دارد.

**نتیجه.** تحت فرضهای قضیه، عملگری چون $T$ در $\mathscr{A}$ وجود داردکه هرعنصر $\mathscr{A}$ یك چند‌جمله‌ای برحسب $T$ است.

**اثبات.** فرض کنیم $T=\sum_{j=1}^{k} t_j P_j$ و $t_1$، ...، $t_k$ اسکالرهایی متمایز باشند. دراین صورت به‌ازای $n=1, 2, \ldots$

www.riazisara.ir



$$T^n=\sum_{j=1}^{k}t_j^n P_j\,.$$

اگر

$$f=\sum_{n=1}^{s}a_n x^n$$

نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned}f(T)&=\sum_{n=1}^{s}a_n T^n=\sum_{n=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}a_n t_j^n P_j\\&=\sum_{n=1}^{k}\Big(\sum_{n=1}^{s}a_n t_j^n\Big)P_j\\&=\sum_{j=1}^{k}f(t_j)P_j\,.\end{aligned}$$

به‌ازای هرعملگردلخواه در $\mathcal{A}$ مانند

$$U=\sum_{j=1}^{k}c_j P_j$$

یك چندجمله‌ای چون $f$ وجود داردکه $f(t_j)=c_j$، $1\leqslant j\leqslant k$؛ وبه‌ازای هر $f$ی به‌این صورت‌داریم $U=f(T)$. □

## تمرین

۱. تعریفی معقول از یك ماتریس $n\times n$ نامنفی ارائه کنید، وسپس ثابت کنیدکه چنین ماتریسی دارای جذری نامنفی ویکتاست.

۲. فرض‌کنید $A$ ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های مختلط با شرط $A^*=-A$ باشد وفرض کنید $B=e^A$. نشان دهیدکه

(الف) $\det B=e^{\operatorname{tr} A}$؛

(ب) $B^*=e^{-A}$؛

(پ) $B$ یکانی است.

۳. اگر $U$ و $T$ عملگرهای نرمالی باشندکه جابجا شوند، ثابت‌کنید $U+T$ و $UT$ نیز نرمال‌اند.

۴. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی مختلط بعد متناهی $V$ باشد. ثابت‌کنیدکه ده حکم ذیل دربارهٔ $T$ هم‌ارزند.

(الف) $T$ نرمال است.

(ب) به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $\|T\alpha\|=\|T^*\alpha\|$.

(پ) $T=T_1+iT_2$ که در آن $T_1$ و $T_2$ خودالحاق‌اند و $T_1T_2=T_2T_1$.
(ت) اگر $\alpha$ یك بردار و $c$ یك اسکالر باشد و $T\alpha=c\alpha$، آنگاه $T^*\alpha=\bar{c}\alpha$.
(ث) پایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نمای $T$ برای $V$ وجود دارد.
(ج) پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\mathcal{B}$ وجود داردکه $[T]_{\mathcal{B}}$ قطری است.
(چ) یك چندجمله‌ای چون $g$ با ضرایب مختلط وجود داردکه $T^*=g(T)$
(ح) هرزیرفضایی که تحت $T$ پایا باشد تحت $T^*$ نیز پایاست.
(خ) $T=NU$ که‌درآن $N$ نامنفی و $U$ یکانی است ونیز $N$ با $U$ جابجا می‌شود.
(د) $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$ که درآن $I=E_1+\cdots+E_k$، به‌ازای $i\neq j$ داریم $E_iE_j=0$، و $E_j^2=E_j=E_j^*$.

۵. تمرین ۳ را برای اثبات این مطلب به‌کار برید که هرخانوادهٔ جابجاشونده‌ای از عملگرهای نرمال (نه‌لزوماً عملگرهایی قطری‌شدنی) روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، یك جبرخودالحاق جابجایی از عملگرهای نرمال تولید می‌کند.

۶. فرض‌کنید $V$ یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و $U$ عملگری یکانی‌روی $V$ باشدکه $U\alpha=\alpha$ ایجاب کند $\alpha=0$. فرض کنید

$$f(z)=i\frac{(1+z)}{(1-z)}, \quad z\neq 1$$

ونشان دهیدکه

(الف) $f(U)=i(I+U)(I-U)^{-1}$؛
(ب) $f(U)$ خودالحاق است؛
(پ) به‌ازای هرعملگرخودالحاق $T$ روی $V$، عملگر

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

یکانی است و دارای خاصیت $T=f(U)$ است.

۷. فرض‌کنید $V$ فضای ماتریسهای $n\times n$ مختلط مجهز به‌ضرب داخلی

$$(A|B)=\operatorname{tr}(AB^*)$$

باشد. اگر $B$ عنصری از $V$ باشد، فرض‌کنید $L_B$، $R_B$ و $T_B$ عملگرهای خطی روی $V$ تعریف شده توسط

(الف) $L_B(A)=BA$
(ب) $R_B(A)=AB$
(پ) $T_B(A)=BA-AB$

را نشان بدهند. سه خانواده از عملگرهای حاصل از تغییر $B$ روی همهٔ ماتریسهای

قطری را درنظر بگیرید. نشان‌دهیدهر یك ازاین‌خانواده‌ها یك جبرخودالحاق‌جابجایی است و تفکیکهای طیفیشان را نیز بیابید.

۸. اگر $B$ عنصری دلخواه از فضای ضرب داخلی در تمرین ۷ باشد، نشان دهید که $L_B$ به‌طور یکانی با $R_{B^t}$ هم‌ارز است.

۹. فرض کنید $V$فضای ضرب داخلی درتمرین ۷ و$G$گروه ماتریسهای یکانی در $V$ باشد. اگر $B$ در $G$ باشد، فرض‌کنید $C_B$ عملگرخطی روی $V$ تعریف شده توسط

$$C_B(A)=BAB^{-1}$$

را نشان دهد. ثابت‌کنیدکه

(الف) $C_B$ یك عملگریکانی روی $V$ است؛

(ب) $C_{B_1B_2}=C_{B_1}C_{B_2}$ ؛

(پ) هیچ تبدیلی یکانی چون $U$ روی $V$ وجود نداردکه به‌ازای هر $B$ در $G$

$$UL_BU^{-1}=C_B.$$

۱۰. فرض کنید $\mathscr{F}$ خانواده‌ای دلخواه از عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ و$\mathscr{A}$ جبرخودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ باشد. نشان دهیدکه

(الف) هرریشهٔ $\mathscr{A}$ ریشه‌ای از $\mathscr{F}$ را تعریف می‌کند؛

(ب) هرریشهٔ $r$ از $\mathscr{A}$ یك تابع خطی ضربی روی $A$ است؛ یعنی، به‌ازای همهٔ $T$ها و $U$ های در $\mathscr{A}$ و همهٔ اسکالرهای $c$

$$r(TU)=r(T)r(U)$$
$$r(cT+U)=cr(T)+r(U).$$

۱۱. فرض‌کنید $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای نرمال قطری‌شدنی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ باشد و فرض‌کنید $\mathscr{A}$ جبر خودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ و عملگرهمانی $I$ باشد. نشان دهید هرریشهٔ $\mathscr{A}$ مخالف ۰ است وبه‌ازای هرریشهٔ $r$ از $\mathscr{F}$ ریشهٔ یکتایی چون $s$ از $\mathscr{A}$ وجود داردکه به‌ازای هر$T$ در $\mathscr{F}$، $s(T)=r(T)$.

۱۲. فرض کنید $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجاشونده‌ای ازعملگرهای‌نرمال قطری‌شدنی روی‌یك‌فضای ضرب داخلی با بعد متناهی $V$ و $A_0$ جبر خودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ باشد. $\mathscr{A}$ را جبرخودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ و عملگرهمانی $I$ بگیرید. نشان دهیدکه

(الف) $\mathscr{A}$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای روی $V$ به‌صورت $cI+T$ است که در آن $c$یك اسکالر و $T$ عملگری در $A_0$ است.

(ب) حداکثر یك ریشه‌چون $r$ از $\mathfrak{a}$ وجود دارد که به‌ازای هر $T$ در $A_\circ$، $r(T)=\circ$.
(پ) اگر یکی از ریشه‌های $\mathfrak{a}$ روی $A_\circ$ برابر ۰ باشد، تصویرهای $P_1$، ...، $P_k$ در تفکیك همانی تعریف شده توسط $\mathscr{T}$ را می‌توان به‌طوری نمایه‌گذاری کرد که $A_\circ$ متشکل از همهٔ عملگرهای روی $V$ به‌صورت

$$T=\sum_{j=2}^{k} c_j P_j$$

باشد. دراینجا $c_2$، ...، $c_k$ همه اسکالرهایی دلخواه هستند.
(ت) $\mathfrak{a}=A_\circ$ اگر وتنها اگر به‌ازای هر ریشهٔ $r$ از $\mathfrak{a}$ عملگری چون $T$ در $A_\circ$ موجود باشد که $r(T)\neq\circ$.

## ۶.۹. چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال

دربخش ۵.۸ خواص اساسی عملگرهای خودالحاق و نرمال را با استفاده از ساده‌ترین و مستقیم‌ترین روشهای ممکن گسترش دادیم. در بخش ۵.۹ صور گوناگون نظریهٔ طیفی را بررسی کردیم. دراینجا به‌اثبات برخی قضایا که ازماهیتی بیشترفنی برخوردارند و عمدتاً دربارهٔ عملگرهای نرمال روی فضاهای حقیقی هستند می‌پردازیم.

با اثبات صورت دقیقتری ازقضیهٔ تجزیهٔ اولیه ازفصل ۶ درمورد عملگرهای نرمال، کارخود را آغاز می‌کنیم. این اثبات در هردوحالت حقیقی ومختلط به‌کار می‌رود.

**قضیهٔ ۱۷.** گیریم $T$ عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ باشد. فرض کنیم $p$ چندجمله‌ای مینیمال $T$ و $p_1$، ...، $p_k$ سازه‌های اول تکین متمایز آن باشند. دراین صورت هر $P_j$ با چندگانگی ۱ در تجزیهٔ $p$ ظاهر می‌شود و دارای درجهٔ ۱ یا ۲ است. فرض کنیم $W_j$ فضای پوچ $p_j(T)$ باشد. دراین صورت
(۱) هرگاه $i\neq j$، فضای $W_j$ بر $W_i$ عمود است؛
(۲) $V=W_1\oplus\cdots W_k$؛
(۳) $W_j$ تحت $T$پایاست وچندجمله‌ای مینیمال تحدید $T$ به $W_j$ همان $p_j$ است.
(۴) به‌ازای هر $j$، یك چندجمله‌ای چون $e_j$ با ضرایب در هیأت اسکالری وجود دارد که $e_j(T)$ تصویر متعامد $V$ روی $W_j$ است.

دراثبات از احکام اساسی معینی استفاده خواهیم کرد که آنها را به‌صورت لمهایی بیان می‌کنیم.

**لم ۱.** گیریم $N$عملگری نرمال روی یك‌فضای ضرب داخلی $W$باشد. دراین‌صورت فضای پوچ $N$ مکمل متعامد برد آن است.

اثبات. فرض کنیم به‌ازای همهٔ $\beta$های در$W$، $(\alpha|N\beta)=\circ$. دراین صورت به‌ازای همهٔ $\beta$ها $(N^*\alpha|\beta)=\circ$. ازاین‌رو، $N^*\alpha=\circ$. بنابرقضیهٔ ۱۹ از فصل ۸، این امر ایجاب

می‌کندکه $N\alpha=0$. بعکس، اگر $N\alpha=0$، آنگاه $N^*\alpha=0$ و به‌ازای همهٔ $\beta$های در $W$

$$(N^*\alpha|\beta)=(\alpha|N\beta)=0. \ \square$$

**لم ۲.** اگر $N$ عملگری نرمال و $\alpha$ برداری باشدکه $N^2\alpha=0$، آنگاه $N\alpha=0$.

اثبات. فرض کنیم $N$ نرمال باشد و $N^2\alpha=0$. دراین‌صورت $N\alpha$ در برد $N$ و نیز درفضای پوچ $N$ واقع می‌شود. بنابر لم ۱، این ایجاب می‌کندکه $N\alpha=0$. $\square$

**لم ۳.** گیریم $T$ عملگری نرمال و $f$ چندجمله‌ای دلخواهی با ضرایب درهیأت اسکالری باشد. دراین‌صورت $f(T)$ نیز نرمال است.

اثبات. فرض کنیم $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. دراین‌صورت

$$f(T)=a_0I+a_1T+\cdots a_nT^n$$

و

$$f(T)^*=\bar{a}_0I+\bar{a}_1T^*+\cdots+\bar{a}_n(T^*)^n.$$

چون $T^*T=TT^*$، نتیجه می‌گیریم که $f(T)$ با $f(T)^*$ جابجا می‌شود. $\square$

**لم ۴.** گیریم $T$ عملگری نرمال و $f$ و $g$ دوچندجمله‌ای نسبت به‌هم اول وباضرایب درهیأت اسکالری‌باشند. فرض‌کنیم $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی‌باشندکه $f(T)\alpha=0$ و $g(T)\beta=0$. دراین صورت $(\alpha|\beta)=0$.

اثبات. چندجمله‌ایهایی چون $a$ و $b$ با ضرایب درهیأت اسکالری وجود دارند که $af+bg=1$. پس

$$a(T)f(T)+b(T)g(T)=I$$

و $\alpha=g(T)b(T)\alpha$. نتیجه اینکه

$$(\alpha|\beta)=(g(T)b(T)\alpha|\beta)=(b(T)\alpha|g(T)^*\beta).$$

طبق فرض $g(T)\beta=0$. بنابرلم ۳، $g(T)$ نرمال است. بنابراین طبق قضیهٔ ۱۹ ازفصل۸، $g(T)^*\beta=0$؛ پس، $(\alpha|\beta)=0$. $\square$

اثبات قضیهٔ ۱۷. به‌یاد آوریدکه چندجمله‌ای‌مینیمال $T$ عبارت است ازچندجمله‌ای تکین باکوچکترین درجه دربین همهٔ چندجمله‌ایهایی مانند $f$ که $f(T)=0$. وجودچنین چندجمله‌ایهایی از این فرض ناشی می‌شود که $V$ با بعد متناهی است. فرض کنیم سازهٔ اولی چون $p_j$ از $p$ تکرار شده باشد. دراین صورت به‌ازای یك چندجمله‌ای چون $g$، $p=p_j^2g$. چون $p(T)=0$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $\alpha$ در $V$

$$(p_j(T))^2g(T)\alpha=0\ .$$

بنابر لم ۳، $p_j(T)$ نرمال است. پس، لم ۲ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $\alpha$ در $V$

$$p_j(T)g(T)\alpha = ۰.$$

ولی این مطلب با این فرض که $p$ در بین همهٔ $f$هایی که $f(T) = ۰$ دارای کوچکترین درجه است متناقض است. بنابراین، $p = p_۱ \cdots p_k$. اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی مختلط باشد هر $p_j$ لزوماً به‌صورت

$$P_j = x - c_j$$

است که $c_j$ حقیقی یا مختلط است. ازطرف دیگر، اگر $V$ یك فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، آنگاه یا $p_j = x_j - c_j$ و $c_j$ در $R$ است، یا

$$p_j = (x - c)(x - \bar{c})$$

و $c$ عدد مختلطی غیرحقیقی است.

حال فرض می‌کنیم $f_j = \dfrac{p}{p_j}$. دراین صورت چون $f_۱$، ⋯، $f_k$ نسبت به هم اول‌اند چندجمله‌ایهایی چون $g_j$ با ضرایب درهیأت اسکالری وجود دارند که

$$۱ = \sum_j f_j g_j. \qquad (۹\text{-}۱۶)$$

حال به‌طور خلاصه نشان می‌دهیم که چگونه چنین $g_j$هایی را می‌توان ساخت. اگر $p_j = x - c_j$ ، آنگاه $f_j(c_j) \neq ۰$ و برای $g_j$ چندجمله‌ای اسکالری $۱/f_j(c_j)$ را برمی‌گزینیم. وقتی که هر $p_j$ بدین‌صورت باشد، $f_j g_j$ها چندجمله‌ایهای آشنای لاگرانژ وابسته به $c_۱$، ⋯، $c_k$ هستند. و (۹-۱۶) بوضوح درست است. فرض کنیم یك $p_j$ به‌صورت $p_j = (x - c)(x - \bar{c})$ باشد که در آن $c$ یك عدد مختلط غیرحقیقی است. دراین‌صورت $V$ یك فضای ضرب داخلی حقیقی است و می‌نویسیم

$$g_j = \frac{x - \bar{c}}{s} + \frac{x - c}{\bar{s}}$$

که در آن $s = (c - \bar{c}) f_j(c)$. آنگاه

$$g_j = \frac{(s + \bar{s})x - (cs + \bar{c}\bar{s})}{s\bar{s}}$$

پس، $g_j$ یك چندجمله‌ای باضرایب حقیقی است. اگر درجهٔ $p$ برابر $n$ باشد، آنگاه

$$۱ - \sum_j f_j g_j$$

یك چندجمله‌ای باضرایب حقیقی و بادرجهٔ حداکثر $n - ۱$ است؛ بعلاوه، این چندجمله‌ای به‌ازای هریك از $n$ ریشهٔ (مختلط) $p$ صفر می‌شود ولذا متحداً برابر ۰ است.

حال گیریم $\alpha$ برداری دلخواه از $V$ باشد. دراین‌صورت بنابر (۹-۱۶)

$$\alpha=\sum_j f_j(T)\,g_j(T)\alpha$$

وچون $p_j(T)f_j(T)=0$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $j$، $f_j(T)g_j(T)\alpha$ در $W_j$ قرار دارد. طبق لم۴، درصورتی که $i\neq j$ فضای $W_j$ بر $W_i$ عمود است. بنابراین، $V$ مجموع مستقیم متعامد $W_1$، ...، $W_k$ است. اگر $\beta$ برداری از $W_j$ باشد، آنگاه

$$p_j(T)T\beta=T\,p_j(T)\beta=0$$

پس $W_j$ تحت $T$ پایاست. گیریم $T_j$ تحدید $T$ روی $W_j$ باشد. دراین‌صورت $p_j(T_j)=0$ وازاین‌رو $P_j$ برچندجمله‌ای مینیمال $T_j$ تقسیم‌پذیراست. چون $p_j$ برروی هیأت اسکالری تحویل‌ناپذیر است نتیجه می گیریم که $p_j$ چندجمله‌ای مینیمال $T_j$ است.

حال، فرض کنیم $e_j=f_jg_j$ و $E_j=e_j(T)$. دراین‌صورت به‌ازای هر بردار $\alpha$ در $V$، بردار $E_j\alpha$ در $W_j$ قرار دارد و

$$\alpha=\sum_j E_j\alpha.$$

پس، $\alpha-E_i\alpha=\sum_{j\neq i}E_j\alpha$؛ چون وقتی $j\neq i$ فضای $W_j$ بر $W_i$ عمود است، این مطلب ایجاب می کند که $\alpha-E_i\alpha$ در $W_i^{\perp}$ قرار داشته باشد. اکنون از قضیهٔ ۴ درفصل۸ نتیجه می‌شود که $E_i$ تصویر متعامد $V$ روی $W_i$ است. □

**تعریف.** زیرفضاهای $W_j(1\leqslant j\leqslant k)$ را **مؤلفه‌های اولیهٔ** $V$ **تحت** $T$ می‌نامیم.

**نتیجه.** گیریم $T$ عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ و $W_1$، ...، $W_k$ مؤلفه‌های اولیهٔ $V$ تحت $T$ باشند. فرض‌کنیم $W$ زیرفضایی از $V$ باشدکه تحت $T$ پایاست. دراین‌صورت

$$W=\sum_j W\cap W_j\,.$$

اثبات. واضح است که $W$ شامل $\sum_j W\cap W_j$ است. ازطرف‌دیگر، $W$ که تحت $T$ پایاست تحت هر چندجمله‌ای برحسب $T$ نیز پایاست. بخصوص، $W$ تحت تصویر متعامد $E_j$ از $V$ روی $W_j$ پایاست. اگر $\alpha$ در $W$ باشد نتیجه می گیریم کـه $E_j\alpha$ در $W\cap W_j$ است و درعین‌حال $\alpha=\sum_j E_j\alpha$. بنابراین $W$ مشمول $\sum_j W\cap W_j$ است. □

قضیهٔ ۱۷ نشان می‌دهد که هرعملگر نرمال $T$ روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی به طور متعارف توسط تعدادی متناهی از عملگرهای نرمال $T_j$ مشخص می‌شود، و این عملگرهای نرمال روی مؤلفه‌های اولیهٔ $W_j$ از $V$ تحت $T$ تعریف می‌شوند وهـریك از چندجمله‌ایهای مینیمالشان بر روی هیأت اسکالرها تحویل‌ناپذیر است. بـرای تکمیل

استنباط خود از عملگرهای نرمال، لازم است که عملگرهای نرمال ازاین نوع خاص را بررسی کنیم.

واضح است عملگر نرمالی که چندجمله‌ای مینیمالش از درجهٔ ۱ باشد دقیقاً مضربی اسکالری از عنصرهمانی است. ازطرف دیگر، وقتی که چندجمله‌ای مینیمال، تحویل‌ناپذیر و از درجهٔ ۲ باشد وضعیت پیچیده‌تر است.

**مثال ۱.** فرض کنیم $r>0$ و $\theta$ عددی حقیقی باشد که مضربی درست از $\pi$ نیست. گیریم $T$ عملگر نرمال روی $R^2$ باشد که ماتریس آن در پایهٔ متعامد یکهٔ استانده عبارت است از

$$A=r\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

دراین‌صورت $T$ مضربی اسکالری ازتبدیلی متعامد، و لذا نرمال است گیریم $p$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}p&=\det(xI-A)\\&=(x-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta\\&=x-2r\cos\theta x+r^2.\end{aligned}$$

فرض کنیم $a=r\cos\theta$، $b=r\sin\theta$ و $c=a+ib$. آنگاه $b\neq 0$، $c=re^{i\theta}$،

$$A=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

و $p=(x-c)(x-\bar{c})$. ازاین‌رو، $p$ برروی $R$ تحویل‌ناپذیر است. چون $p$ بر چندجمله‌ای مینیمال $T$ تقسیم‌پذیراست، نتیجه می‌گیریم که $p$ خود چندجمله‌ای مینیمال است.

این مثال حالت عکسی را پیشنهاد می‌کند که ذیلاً عرضه می‌شود.

**قضیهٔ ۱۸.** گیریم $T$ عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی بعد متناهی $V$ و $p$ چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنیم

$$p=(x-a)^2+b^2$$

که درآن $a$ و $b$ اعدادی حقیقی هستند و $b\neq 0$. آنگاه عددی صحیح چون $s>0$ وجود دارد که $p^s$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T$ است و زیرفضاهایی چون $V_1$، ...، $V_s$ از $V$ وجود دارند که

(۱) وقتی $i\neq j$، فضای $V_i$ بر $V_j$ عمود است،

(۲) $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$؛

(۳) هر $V_j$ دارای پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\{\alpha_j, \beta_j\}$ باخاصیت ذیل است

$$T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$$
$$T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j\ .$$

به بیان دیگر، اگر $r=\sqrt{a^2+b^2}$ و $\theta$ به‌نحوی انتخاب شود که $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$، آنگاه $V$ مجموع مستقیم متعامدی از زیرفضاهای دوبعدی $V_j$ است که $T$ روی هریک همچون «$r$ برابر دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta$» عمل می‌کند.

اثبات قضیهٔ ۱۸ برپایهٔ لم ذیل استوار خواهد بود.

**لم.** گیریم $V$ یك فضای ضرب داخلی حقیقی و $S$ عملگر نرمالی روی $V$ باشد که $S^2+I^2=0$. فرض‌کنیم $\alpha$ برداری دلخواه از $V$ باشد و $\beta=S\alpha$. دراین‌صورت

$$S^*\alpha = -\beta \qquad\qquad (۹\text{-}۱۷)$$
$$S^*\beta = \alpha,$$

$(\alpha|\beta)=0$ و $\|\alpha\|=\|\beta\|$.

اثبات. داریم $S\alpha=\beta$ و $S\beta=S^2\alpha=-\alpha$. بنابراین

$$0=\|S\alpha-\beta\|^2+\|S\beta+\alpha\|^2=\|S\alpha\|^2-2(S\alpha|\beta)+\|\beta\|^2$$
$$+\|S\beta\|^2+2(S\beta|\alpha)+\|\alpha\|^2.$$

چون $S$ نرمال است نتیجه می‌گیریم که

$$0=\|S^*\alpha\|^2-2(S^*\beta|\alpha)+\|\beta\|^2+\|S^*\beta\|^2+2(S^*\alpha|\beta)+\|\alpha\|^2$$
$$=\|S^*\alpha+\beta\|^2+\|S^*\beta-\alpha\|^2.$$

این تساوی (۹-۱۷) را ایجاب می‌کند، و درنتیجه

$$(\alpha|\beta)=(S^*\beta|\beta)=(\beta|S\beta)$$
$$=(\beta|-\alpha)$$
$$=-(\alpha|\beta)$$

و $(\alpha|\beta)=0$. به‌طورمشابه

$$\|\alpha\|^2=(S^*\beta|\alpha)=(\beta|S\alpha)=\|\beta\|^2.$$

اثبات قضیهٔ ۱۸. گیریم $V_1$، ...، $V_s$ دسته ماکسیمالی از زیرفضاهای دوبعدی باشندکه شرایط (۱) و (۲)، ونیز شرایط اضافی

$$T^*\alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s \qquad (۱۸\text{-}۹)$$
$$T^*\beta_j = b\alpha_j + a\beta_j,$$

را برمی‌آورند. همچنین فرض کنیم $W = V_1 + \cdots + V_s$. دراین‌صورت $W$ مجموع مستقیم متعامد $V_1$، ...، $V_s$ است. نشان خواهیم داد که $W = V$. فرض کنیم این‌طور نباشد، آنگاه $W^\perp \neq \{0\}$. بعلاوه، چون (۳) و (۹-۱۸) ایجاب می‌کنند که $W$ تحت $T$ و $T^*$ پایا باشد، نتیجه می‌گیریم که $W^\perp$ تحت $T^*$ پایاست و $T = T^*$. گیریم $S = b^{-1}(T - aI)$. دراین‌صورت $S^* = b^{-1}(T^* - aI)$، $S^*S = SS^*$ و $W^\perp$ تحت $S$ و $S^*$ پایاست. چون $(T - aI)^2 + b^2 I = 0$، نتیجه می‌گیریم که $S^2 + I = 0$. $\alpha$ را هر برداری با نرم ۱ از $W^\perp$ درنظرمی‌گیریم و می‌نویسیم $\beta = S\alpha$. آنگاه $\beta$ در $W^\perp$ قرار دارد و $S\beta = -\alpha$. چون $T = aI + bS$، این مطلب ایجاب می‌کند که

$$T\alpha = a\alpha + b\beta$$
$$T\beta = -b\alpha + a\beta.$$

مطابق لم، $S^*\alpha = -\beta$، $S^*\beta = \alpha$، $(\alpha|\beta) = 0$ و $\|\beta\| = 1$. چون $T^* = aI + bS^*$، نتیجه می‌شود که

$$T^*\alpha = a\alpha - b\beta$$
$$T^*\beta = b\alpha + a\beta.$$

ولی این مطلب با این واقعیت که $V_1$، ...، $V_s$ دستهٔ ماکسیمالی از زیر فضاهایی است که در (۱)، (۳)، و (۹-۱۸) صدق می‌کنند متناقض است. بنابراین $W = V$، ونظر به اینکه

$$\det\begin{bmatrix} x - a & b \\ -b & x - a \end{bmatrix} = (x - a)^2 + b^2$$

از (۱)، (۲)، و (۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\det(xI - T) = [(x - a)^2 + b^2]^s. \quad \square$$

**نتیجه.** تحت شرایط قضیهٔ فوق، $T$ معکوس‌پذیر است و

$$T^* = (a^2 + b^2)T^{-1}.$$

**اثبات.** چون

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

از (۳) و (۹-۱۸) نتیجه می‌شود که $TT^*=(a^2+b^2)I$. پس $T$ معکوس‌پذیر است و $T^*=(a^2+b^2)T^{-1}$. □

**قضیهٔ ۱۹.** گیریم $T$ عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ باشد. دراین‌صورت هرعملگر خطی‌که با $T$ جابجا شود با $T^*$ نیز جابجا می‌شود. بعلاوه، هر زیرفضای پایای تحت $T$ تحت $T^*$ نیز پایاست.

اثبات. فرض کنیم $U$ عملگری خطی روی $V$ باشد که با $T$ جابجا می‌شود. $E_j$ را تصویر متعامد $V$ روی مؤلفهٔ اولیهٔ $W_j$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ از $V$ تحت $T$ می گیریم. آنگاه $E_j$ یك چندجمله‌ای برحسب $T$ است و ازاین‌رو با $U$ جابجا می‌شود. پس،

$$E_jUE_j=UE_j^2=UE_j.$$

بدین‌سان، $U(W_j)$ زیرمجموعه‌ای از $W_j$ است. فرض کنیم $T_j$ و $U_j$ تحدیدهای $T$ و $U$ روی $W_j$ را نشان دهند. فرض‌کنیم $I_j$ عملگر همانی روی $W_j$ باشد. دراین صورت $U_j$ با $T_j$ جابجا می‌شود و اگر $T_j=c_jI_j$، بوضوح $U_j$ نیز با $T_j^*=\bar{c}_jI_j$ جابجا می‌شود. ازطرف دیگر، اگر $T_j$ مضربی اسکالری از $I_j$ نباشد، آنگاه $T_j$ معکوس‌پذیر است و اعدادی حقیقی چون $a_j$ و $b_j$ وجود دارند که

$$T_j^*=(a_j^2+b_j^2)T_j^{-1}.$$

چون $U_jT_j=T_jU_j$، نتیجه می گیریم که $T_j^{-1}U_j=U_jT_j^{-1}$. بنابراین $U_j$ درهردوحالت با $T_j^*$ جابجا می‌شود. اما $T^*$ نیز با $E_j$ جابجا می‌شود و ازاین‌رو $W_j$ تحت $T^*$ پایاست. بعلاوه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $W_j$

$$(T_j\alpha|\beta)=(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)=(\alpha|T_j^*\beta).$$

چون $T^*(W_j)$ مشمول $W_j$ است، این مطلب ایجاب می کندکه $T_j^*$ تحدید $T^*$ روی $W_j$ باشد. بنابراین، به‌ازای‌هر $\alpha_j$ در $W_j$

$$UT^*\alpha_j=T^*U\alpha_j\,.$$

چون $V$ مجموع $W_1$، ...، $W_k$ است، نتیجه می گیریم که به‌ازای هر $\alpha$ در $V$

$$UT^*\alpha=T^*U\alpha,$$

پس $U$ با $T^*$ جابجا می‌شود.

حال فرض‌کنیم $W$ زیرفضایی از $V$ باشد که تحت $T$ پایاست، ونیز فرض کنیم $Z_j=W\bigcap W_j$. بنابر نتیجهٔ قضیهٔ ۱۷، $W=\sum_j Z_j$. پس کافی است نشان دهیم که هر $Z_j$ تحت $T_j^*$ پایاست. هر گاه $T_j=c_jI$ این مطلب روشن است. وقتی این‌طور نباشد، $T_j$ معکوس‌پذیراست و $Z_j$ را در، وازاین‌رو روی $Z_j$، می‌نگارد. بنابراین، $T_j^{-1}(Z_j)=Z_j$ وچون

$$T_j^* = (a_j^2 + b_j^2)T_j^{-1}$$

نتیجه می گیریم که به‌ازای هر $j$، $T^*(Z_j)$ مشمول $Z_j$ است. □

فرض کنیم $T$ عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی $V$ باشد. و $W$ زیرفضایی پایا تحت $T$. دراین‌صورت نتیجهٔ قبل نشان می‌دهد که $W$ تحت $T^*$ نیز پایاست. ازاین مطلب نتیجه می‌شود که $W^\perp$ تحت $T = T^{**}$ (و درنتیجه تحت $T^*$ نیز) پایاست. بااستفاده از این واقعیت، بآسانی می‌توان حالت تقویت شدهٔ ذیل از قضیهٔ تجزیهٔ دوری راکه درفصل ۷ آمده است، اثبات کرد.

**قضیهٔ ۲۰.** گیریم $T$ عملگر خطی نرمالی روی یك فضای ضرب داخلی بعدمتناهی $V$ (۱ $\geqslant$ بعد$(V)$) باشد. دراین‌صورت $r$ بردار غیرصفر $\alpha_1$، ...، $\alpha_r$ در $V$ بترتیب با $T$-پوچساز‌های $e_1$، ...، $e_r$ وجود دارندکه

(۱) $V = Z(\alpha_1 ; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r ; T)$؛

(۲) اگر $1 \leqslant k \leqslant r-1$، آنگاه $e_{k+1}$ چندجمله‌ای $e_k$ را عاد می‌کند؛

(۳) وقتی $j \neq k$، فضای $Z(\alpha_j ; T)$ بر $Z(\alpha_k ; T)$ عموداست. بعلاوه عددصحیح $r$ وپوچسازهای $e_1$، ...، $e_r$ به‌طوریکتا توسط شرایط (۱) و (۲) واین واقعیت‌که هیچ‌یك از $\alpha_k$ها صفر نیستند تعیین می‌شوند.

**نتیجه.** اگر $A$ ماتریس نرمالی بادرایه‌های حقیقی (مختلط) باشد، آنگاه یك ماتریس متعامد حقیقی (یکانی) چون $P$ وجود داردکه $P^{-1}AP$ درفرم متعارف گویاست.

نتیجه اینکه دو ماتریس نرمال $A$ و $B$ به‌طوریکانی هم‌ارزند اگر وتنها اگر دارای فرم گویای مساوی باشند؛ $A$ و $B$ به‌طور متعامد هم‌ارز هستند هرگاه دارای درایه‌های حقیقی باشند و فرم گویای مساوی‌هم داشته باشند.

ازطرف‌دیگر، معیار ساده‌تری‌هم برای هم‌ارزی یکانی ماتریسهای نرمال وعملگرهای نرمال وجود دارد.

**تعاریف.** گیریم $V$ و $V'$ دوفضای ضرب داخلی برروی هیأت مفروضی باشند. تبدیلی خطی چون

$$U : V \rightarrow V'$$

یك **تبدیل یکانی** نامیده می‌شود، هرگاه $V$ را بروی $V'$ بنگارد و ضربهای داخلی راحفظ کند. اگر $T$ عملگری خطی روی $V$ و $T'$ عملگری خطی روی $V'$ باشد، آنگاه $T$ **هم‌ارز یکانی** با $T'$ است، هرگاه تبدیلی یکانی چون $U$ از $V$ بروی $V'$ وجود داشته‌باشدکه

$$UTU^{-1} = T'.$$

**لم.** گیریم $V$ و $V'$ دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی برروی هیأت مفروضی باشند. فرض کنیم $T$ عملگری خطی روی $V$ و $T'$ عملگری خطی روی $V'$ باشد. آنگاه $T$ هم‌ارزیکانی با $T'$ است اگر وتنها اگرپایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}$ از $V$ ونیز پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}'$ از $V'$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T']_{\mathcal{B}'} \cdot$$

اثبات. فرض کنیم تبدیلی یکانی چون $U$ از $V$ بروی $V'$ وجود داشته باشد به‌طوری که $UTU^{-1} = T'$. $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ را پایهٔ متعامدیکهٔ (مرتب) دلخواهی برای $V$ می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $\alpha'_j = U\alpha_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. آنگاه $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای $V'$ است و با قراردادن

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\alpha_k$$

دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} T'\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= \sum_k A_{kj}U\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k. \end{aligned}$$

پس $[T]_{\mathcal{B}} = A = [T']_{\mathcal{B}'}$.

بعکس، فرض کنیم پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}$ از $V$ و پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}'$ برای $V'$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T']_{\mathcal{B}'}$$

و گیریم $A = [T]_{\mathcal{B}}$. همچنین فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$. اگر $U$ تبدیل خطی از $V$ در $V'$ باشرط $U\alpha_j = \alpha'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ باشد، آنگاه $U$ تبدیلی یکانی از $V$ بروی $V'$ است و

$$\begin{aligned} UTU^{-1}\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= U\sum_k A_{kj}\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k \cdot \end{aligned}$$

بنابراین، $UTU^{-1}\alpha'_j = T'\alpha'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$، که‌خود ایجاب می‌کند که $UTU^{-1} = T'$. □

از لم بلافاصله نتیجه می‌شود که عملگرهای هم‌ارزیکانی روی فضاهای با بعد

متناهی چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند. برای عملگرهای نـرمال، حالت عکس‌هم درست است.

**قضیهٔ ۲۱.** گیریم $V$ و $V'$ دوفضای ضرب داخلی بابعد متناهی برروی هیأت مفروضی باشند. فرض‌کنیم $T$ عملگری نرمال روی $V$ و $T'$ عملگری نرمال روی $V'$ باشد. آنگاه $T$ هم‌ارز یکانی با $T'$ است اگر وتنها اگر $T$ و $T'$ دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی باشند.

اثبات. فرض‌کنیم $T$ و $T'$ دارای چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی $f$ باشند. $W_j$ها $(1 \leqslant j \leqslant k)$ را مؤلفه‌های اولیهٔ $V$ تحت $T$ و $T_j$ را تحدیـد $T$ روی $W_j$ مـی‌گیریم. فرض‌کنیم $I_j$ عملگر همانی روی $W_j$ باشد. دراین‌صورت

$$f = \prod_{j=1}^{k} \det(xI_j - T_j).$$

$p_j$ را چندجمله‌ای مینیمال $T_j$ می‌گیریم. اگر $p_j = x - c_j$، روشن است که

$$\det(xI_j - T_j) = (x - c_j)^{s_j}$$

و درآن $s_j$ بعد $W_j$ است. از طرف دیگر، اگر $p_j = (x - a_j)^2 + b_j^2$ که درآن $a_j$، $b_j$ اعدادی حقیقی‌اند و $b_j \neq 0$ آنگاه از قضیهٔ ۱۸ نتیجه می‌شود که

$$\det(xI_j - T_j) = p_j^{s_j}$$

و دراین‌حالت $2s_j$ بعد $W_j$ است. بنابراین $f = \prod_j p_j^{s_j}$. حال می‌تـوانیم $f$ را با همین روش وبااستفاده از مؤلفه‌های اولیه $V'$ تحت $T'$ هم محاسبه کنیم. چون $p_1$، ...، $p_k$ سازه‌های اول متمایزی هستند، از یکتایی تجزیه به سازه‌های اول $f$ نتیجه مـی‌شود کـه دقیقاً $k$ مؤلفهٔ اولیهٔ $W'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ از $V'$ تحت $T'$ وجود دارد واین مؤلفه‌هارامی‌توان طـوری نمایه‌گذاری کرد کـه $p_j$، چندجملـه‌ای مینیمال برای $T'_j$، تحدید $T'$ به $W'_j$، باشد. اگـر $p_j = x - c_j$ آنگاه $T_j = c_j I_j$ و $T'_j = c_j I'_j$ کـه در آن $I'_j$ عملگر همانی روی $W'_j$ است. دراین‌حالت بدیهی است که $T_j$ هم‌ارزیکانی با $T'_j$ است. اگر مانند بالا $p_j = (x - a_j)^2 + b_j^2$ آنگاه با استفاده از لم وقضیهٔ ۲۰، دوباره می‌بینیم که $T_j$ هم‌ارز یکانی‌با $T'_j$ است. پس، به‌ازای هر $j$ دوپایهٔ متعامدیکهٔ $\mathcal{B}_j$ و $\mathcal{B}'_j$ بترتیب برای $W_j$ و $W'_j$ وجود دار وبه‌طوری که

$$[T_j]_{\mathcal{B}_j} = [T'_j]_{\mathcal{B}'_j}.$$

حال گیریم $U$ تبدیل خطی از $V$ در $V'$ باشدکه‌هر $\mathcal{B}_j$ رابروی $\mathcal{B}'_j$ می‌نگارد. دراین‌صورت $U$ تبدیلی یکانی از $V$ بروی $V'$ است و $UTU^{-1} = T'$. □

# ۱۰

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# فرمهای دوخطی

## ۱.۱۰. فرمهای دوخطی

دراین فصل فرمهای دوخطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی را مورد بحث قرار می‌دهیم. احتمالاً خواننده بین برخی ازمطالب ومباحث دترمینانها ازفصل ۵ وموضوعهای ضربهای داخلی وفرمها از فصل ۸ و فصل ۹ وجه تشابهی مشاهده خواهدکرد. رابطهٔ بین فرمهای دوخطی وضربهای داخلی به‌وجه خاصی محکم است؛ با این وجود، دراین فصل هیچ‌یك ازمطالب فصلهای ۸ یا ۹ دانسته فرض نمی‌شود. خواننده‌ای‌که با ضربهای‌داخلی آشنا نباشد، حین مطالعهٔ مبحث فرمهای دوخطی، اگر اولین بخش فصل ۸ را مطالعه‌کند احتمالاً بهره‌ای خواهد برد.

اولین بخش، فضای فرمهای دوخطی روی یك فضای برداری $n$بعدی را موردبحث قرار می‌دهد. ماتریس یك‌فرم دوخطی درپایهٔ مرتب مفروضی معرفی ویکریختی بین فضای فرمها وفضای ماتریسهای $n\times n$ بنیان گذاشته می‌شود. رتبهٔ یك فرم‌دوخطی تعریف می‌شود وفرمهای دوخطی ناتبهگون معرفی می‌شوند. بخش دوم‌به‌بحث روی فرمهای دوخطی‌متقارن وقطری‌کردن آنها می‌پردازد. بخش سوم فرمهای دوخطی متقارن‌کج را مورد بحث‌قرار می‌دهد. چهارمین بخش‌گروه حافظ یك فرم دوخطی ناتبهگون را با توجه خاصی نسبت به‌گروههای متعامد، گروههای شبه‌متعامد، ویك‌گروه شبه‌متعامد خاص۔گروه لورنتس۔به‌بحث می گذارد.

**تعریف.** گیریم $V$ فضایی برداری برروی هیأت $F$ باشد. **یك فرم دوخطی** روی $V$ تابعی چون $f$ است‌که به‌هرجفت مرتب از بردارهای $\alpha$ و $\beta$ در $V$ یـك اسکالر $f(\alpha, \beta)$ در $F$ را تخصیص دهد و در شرایط زیر صدق کند.

$$f(c\alpha_1+\alpha_2, \beta)=cf(\alpha_1, \beta)+f(\alpha_2, \beta)$$
$$f(\alpha,c\beta_1+\beta_2)=cf(\alpha, \beta_1)+f(\alpha, \beta_2). \qquad (۱-۱۰)$$

اگر فرض کنیم $V\times V$ مجموعهٔ‌همهٔ جفتهای مرتب ازبردارهای واقع در $V$ را نشان دهد، این تعریف می‌تواند به‌شرح زیرهم بیان شود: یك فرم دوخطی روی $V$ تابعی چون $f$ از $V\times V$ در $F$ است که به‌عنوان تابعی ازهریك ازشناسه‌هایش، باشرط ثابت بودن دیگری، خطی باشد. واضح است که تابع صفر از $V\times V$ در $F$ فرمی دوخطی است. این نیز درست است که هرترکیب خطی ازفرمهای دوخطی روی $V$ خودفرمی دوخطی است. برای اثبات این مطلب، کافی است ترکیبات خطی ازنوع $cf+g$ را که‌در آن $f$ و $g$ فرمهایی دوخطی روی $V$ هستند در نظر بگیریم. اثبات این مطلب که $cf+g$ در (۱-۱۰) صدق می‌کند، شبیه بسیاری ازاثباتهای دیگری است که قبلاً دیده‌ایم وازاین‌رو آن‌را حذف می‌کنیم. همهٔ این مطالب می‌توانند باگفتن اینکه مجموعهٔ همه فرمهای دوخطی روی $V$ زیرفضایی است ازفضای همهٔ توابع از $V\times V$ در $F$ (مثال ۳ در فصل ۲) خلاصه شود. فضای فرمهای دوخطی روی $V$ را با $L(V, V, F)$ نشان می‌دهیم.

**مثال ۱.** گیریم $V$ یك فضای برداری برروی هیأت $F$ باشد، و $L_1$ و $L_2$ تابعکهایی خطی روی $V$ باشند. $f$ را با ضابطهٔ

$$f(\alpha, \beta)=L_1(\alpha)L_2(\beta)$$

تعریف می‌کنیم. اگر $\beta$ را ثابت نگاه داریم و $f$ را به‌عنوان تابعی از $\alpha$ محسوب کنیم، آنگاه چیزی جز مضربی اسکالری از تابعك خطی $L_1$ نخواهیم داشت. با ثابت بودن $\alpha$، $f$ مضربی اسکالری از $L_2$ است. پس، واضح است که $f$ فرمی دوخطی روی $V$ است.

**مثال ۲.** فرض کنیم $m$ و $n$ اعدادی صحیح مثبت باشند، و $F$ یك هیأت باشد. $V$ را فضای برداری همهٔ ماتریسهای $m\times n$ بر روی $F$ و $A$ را ماتریس $m\times m$ ثابتی برروی $F$ می‌گیریم. تابع $f_A$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$f_A(X, Y)=\mathrm{tr}\,(X^tAY).$$

دراین صورت $f_A$ فرمی دوخطی روی $V$ است. زیرا، اگر $X$، $Y$، و $Z$ سه ماتریس $m\times n$ برروی $F$ باشند،

$$\begin{aligned}f_A(cX+Z, Y)&=\mathrm{tr}\,[(cX+Z)^tAY]\\&=\mathrm{tr}\,(cX^tAY)+\mathrm{tr}\,(Z^tAY)\\&=cf_A(X, Y)+f_A(Z, Y).\end{aligned}$$

دراینجا ازاین مطلب که عمل ترانهش و تابع ردخطی هستند استفاده شده است. نشان‌دادن اینکه $f_A$ به‌عنوان تابعی از شناسهٔ دومش خطی است ازاین هم ساده‌تر است. درحالت خاص $n=1$، ماتریس $X^tAY$ یك دریك، یعنی یك اسکالر است وفرم دوخطی چیزی‌جز

$$f_A(X, Y) = X^tAY$$
$$= \sum_i \sum_j A_{ij}x_iy_j$$

نیست. بزودی نشان خواهیم داد که هرفرم دوخطی روی فضای ماتریسهای $m\times 1$ ازاین نوع است، یعنی به‌ازای ماتریسی $m\times m$ چون $A$ برابر $f_A$ است.

**مثال ۳.** گیریم $F$ یك هیأت باشد. می‌خواهیم همهٔ فرمهای دوخطی روی فضای $F^2$ را بیابیم. فرض‌کنیم $f$ یك چنین فرم دوخطی باشد. اگر $\alpha=(x_1\ \text{و}\ x_2)$ و $\beta=(y_1, y_2)$ بردارهایی از $F^2$ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}
f(\alpha, \beta) &= f(x_1\epsilon_1+x_2\epsilon_2, \beta)\\
&= x_1f(\epsilon_1, \beta)+x_2f(\epsilon_2, \beta)\\
&= x_1f(\epsilon_1, y_1\epsilon_1+y_2\epsilon_2)+x_2f(\epsilon_2, y_1\epsilon_1+y_2\epsilon_2)\\
&= x_1y_1f(\epsilon_1, \epsilon_1)+x_1y_2f(\epsilon_1, \epsilon_2)+x_2y_1f(\epsilon_2, \epsilon_1)\\
&\qquad +x_2y_2f(\epsilon_2, \epsilon_2).
\end{aligned}$$

پس، $f$ به‌طورکامل توسط چهاراسکالر $A_{ij}=f(\epsilon_i, \epsilon_j)$، بنابر

$$\begin{aligned}
f(\alpha, \beta) &= A_{11}x_1y_1+A_{12}x_1y_2+A_{21}x_2y_1+A_{22}x_2y_2\\
&= \sum_{i,j} A_{ij}x_iy_j
\end{aligned}$$

تعیین می‌شود.

اگر $X$ و $Y$ ماتریسهای مختصات $\alpha$ و $\beta$ و $A$ ماتریس $2\times 2$ با درایه‌های $A(i, j)=A_{ij}=f(\epsilon_i, \epsilon_j)$ باشد، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = X^tAY. \tag{۲-۱۰}$$

در مثال ۲ مشاهده‌کردیم که اگر $A$ ماتریسی $2\times 2$ برروی $F$ باشد، آنگاه (۱۰-۲) فرمی دوخطی روی $F^2$ تعریف می‌کند. می‌بینیم که فرمهای دوخطی روی $F^2$، دقیقاً آنهایی هستند که از ماتریسی $2\times 2$ طبق (۱۰-۲) به‌دست می‌آیند.

بحث مثال ۳ را می‌توان برای تشریح همهٔ فرمهای دوخطی روی یك فضای‌برداری با بعد متناهی تعمیم داد. گیریم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد. فرض کنیم $f$ فرمی دوخطی‌روی $V$ باشد.

www.riazisara.ir


اگر

$$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n \quad \text{و} \quad \alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$$

بردارهایی از $V$ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= f(\sum_i x_i\alpha_i, \beta) \\ &= \sum_i x_i f(\alpha_i, \beta) \\ &= \sum_i x_i f(\alpha_i, \sum_j y_j\alpha_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j f(\alpha_i, \alpha_j). \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $A_{ij}=f(\alpha_i, \alpha_j)$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \sum_i \sum_j A_{ij} x_i y_i \\ &= X^t AY \end{aligned}$$

که در آن $X$ و $Y$ ماتریسهای مختصات $\alpha$ و $\beta$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هستند، پس، هرفرم دوخطی روی $V$، به‌ازای ماتریس $n\times n$ ی چون $A$ برروی $F$ از نوع

$$f(\alpha, \beta)=[\alpha]^t_{\mathcal{B}} A[\beta]_{\mathcal{B}} \tag{۳-۱۰}$$

است. بعکس، اگر ماتریس $n\times n$ ی مانند $A$ داده شده باشد، بسهولت دیده می‌شود که (۳-۱۰) فرمی دوخطی چون $f$ روی $V$ تعریف می‌کند و $A_{ij}=f(\alpha_i, \alpha_j)$.

**تعریف.** گیریم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد. اگر $f$ فرمی دوخطی روی $V$ باشد، **ماتریس $f$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$** عبارت است از ماتریس $n\times n$ ی $A$ با درایه‌های $A_{ij}=f(\alpha_i, \alpha_j)$. گاهی این ماتریس را با $[f]$ نشان خواهیم داد.

**قضیهٔ ۱.** گیریم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت $F$ باشد. به‌ازای هرپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ از $V$ تابعی که به‌هرفرم دو خطی روی $V$ ماتریسش در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ را مربوط سازد، یك یکریختی ازفضای $L(V, V, F)$ بروی فضای ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت $F$ است.

اثبات. قبلاً دیدیم که $f \rightarrow [f]_{\mathcal{B}}$ تناظری یك‌به‌یك بین مجموعهٔ فرمهای دوخطی روی $V$ ومجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی $F$ است. اینکه این تناظر تبدیلی خطی است، مطلبی است که به‌آسانی دیده می‌شود، زیرا به‌ازای هر $i$ و $j$

$$(cf+g)(\alpha_i, \alpha_j)=cf(\alpha_i, \alpha_j)+g(\alpha_i, \alpha_j).$$

واین چیزی نیست جز

$$[cf+g]_{\mathscr{B}}=c[f]_{\mathscr{B}}+[g]_{\mathscr{B}}.\ \square$$

**نتیجه.** اگر $\mathscr{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ و $\mathscr{B}^*=\{L_1, \cdots, L_n\}$ پایهٔ دوگان برای $V^*$ باشد، آنگاه $n^2$ فرم دوخطی

$$f_{ij}(\alpha, \beta)=L_i(\alpha)L_j(\beta),\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n$$

پایه‌ای برای فضای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. بویژه، بعد $L(V, V, F)$ برابر $n^2$ است.

اثبات. پایهٔ دوگان $\{L_1, \cdots, L_n\}$ اساساً بنابراین واقعیت که $L_i(\alpha)$ (به‌ازای هر $\alpha$ در $V$) $i$امین مختص $\alpha$ درپایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ است تعریف می‌شود. حال توابع $f_{ij}$ تعریف‌شده توسط

$$f_{ij}(\alpha, \beta)=L_i(\alpha)L_j(\beta)$$

فرمهای دوخطی ازنوع بررسی شده درمثال ۱ هستند. اگر

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n \quad \text{و} \quad \beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$$

آنگاه

$$f_{ij}(\alpha, \beta)=x_iy_j.$$

گیریم $f$ فرمی دوخطی روی $V$ و $A$ ماتریس $f$ درپایهٔمرتب $\mathscr{B}$ باشد. دراین‌صورت

$$f(\alpha, \beta)=\sum_{i,j}A_{ij}x_iy_j$$

که چیزی جز

$$f=\sum_{i,j}A_{ij}f_{ij}$$

نیست. اکنون واضح‌است که $n^2$ فرم $f_{ij}$ پایه‌ای برای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. $\square$

اثبات این نتیجه را می‌توان به‌صورت ذیل هم بیان کرد. فرم دوخطی $f_{ij}$ «یکهٔ» ماتریسی $E^{i,j}$ راکه تنها درایهٔ غیرصفرش یك ۱ درسطر $i$ وستون $j$ است، به‌عنوان‌ماتریس خود در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ دارد. چون این یکه‌های ماتریسی پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n\times n$ بنا می‌کنند، فرمهای $f_{ij}$ یك پایه برای فضای فرمهای دوخطی تشکیل می‌دهند.

مفهوم ماتریس یك فرم دوخطی دریك پایهٔ مرتب، مشابه با مفهوم ماتریس یك‌عملگر خطی دریك پایهٔ مرتب است. درست نظیرعملگرهای خطی، علاقه‌مندیم تغییرات حاصل در ماتریس نمایش یك فرم دوخطی را هنگامی که پایهٔ مرتبی به‌پایهٔ مرتب دیگری تغییر

می‌یابد بدانیم. لذا فرض می‌کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{B}'=\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$ دو پایهٔ مرتب برای $V$ و $f$ فرمی دوخطی روی $V$ باشد. ماتریسهای $[f]_{\mathcal{B}}$ و $[f]_{\mathcal{B}'}$ چه رابطه‌ای با یکدیگردارند؟ خوب، $P$ را ماتریس $n\times n$ (معکوس‌پذیری) می‌گیریم که به‌ازای هر $\alpha$ در $V$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}=P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

به‌بیان دیگر، $P$ را به‌وسیلهٔ

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$$

تعریف می‌کنیم. به‌ازای هردو بردار $\alpha$ و $\beta$ در $V$

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= [\alpha]^t_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}[\beta]_{\mathcal{B}} \\ &= (P[\alpha]_{\mathcal{B}'})^t[f]_{\mathcal{B}}P[\beta]_{\mathcal{B}'} \\ &= [\alpha]^t_{\mathcal{B}'}(P^t[f]_{\mathcal{B}}P)[\beta]_{\mathcal{B}'}. \end{aligned}$$

بنابرتعریف و یکتایی ماتریسی‌که $f$ را درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ نمایش می‌دهد، باید داشته‌باشیم

$$[f]_{\mathcal{B}'}=P^t[f]_{\mathcal{B}}P. \qquad (۴\text{-}۱۰)$$

**مثال ۴.** گیریم $V$ فضای برداری $R^2$ باشد. فرض می‌کنیم $f$ فرمی دوخطی باشد که روی $\alpha=(x_1, x_2)$ و $\beta=(y_1, y_2)$ بنابر

$$f(\alpha, \beta)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$$

تعریف شود. دراین صورت

$$f(\alpha, \beta)=[x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ولذا ماتریس $f$ درپایهٔ مرتب استانده $\mathcal{B}=\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ عبارت است از

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض می‌کنیم $\mathcal{B}'=\{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}$ پایهٔ مرتب تعریف شده توسط $\epsilon'_1=(1, -1)$ و $\epsilon'_2=(1, 1)$ باشد. در این حالت ماتریس $P$ که مختصات را از $\mathcal{B}'$ به $\mathcal{B}$ تغییرمی‌دهد عبارت است از

$$P=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

پس

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}'} &= P^t[f]_{\mathcal{B}}P \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

معنی این نمایش ماتریسی آن است که اگـر بردارهای $\alpha$ و $\beta$ را به‌وسیلهٔ مختصاتشان در پایهٔ $\mathcal{B}'$ همچون

$$\alpha = x'_۱\epsilon'_۱ + x'_۲\epsilon'_۲ \quad و \quad \beta = y'_۱\epsilon'_۱ + y'_۲\epsilon'_۲$$

بیان کنیم، آنگاه

$$f(\alpha,\ \beta) = ۴x'_۲y'_۲.$$

نتیجه‌ای از فرمول تغییر پایهٔ (۱۰-۴) مطلب زیر است:
اگر $A$ و $B$ ماتریسهایی $n\times n$ باشند که فرم دوخطی مشخصی روی $V$ را در (احتمالاً) پایه‌های مرتب مختلفی نمایش دهند، آنگاه $A$ و $B$ دارای یك رتبه هستند. زیرا، اگر $P$ ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری باشد و $B=P^tAP$، بدیهی است کــه $A$ و $B$ دارای یك رتبه هستند. این مطلب به‌ما امکان می‌دهد که رتبهٔ یك فرم دوخطی روی $V$ را به‌عنوان رتبهٔ هرماتریسی که آن فرم را در پایهٔ مرتبی برای $V$ نمایش می‌دهد، تعریف کنیم.

بهتراست تعریفی طبیعی‌تر برای رتبهٔ یك فرم دوخطی ارائه کنیم. این‌کار رامی‌توان به‌شرح زیرانجام داد: فرض کنیم $f$ فــرمی دوخطی روی فضــای برداری $V$ باشد. اگــر برداری چون $\alpha$ را در $V$ ثابت نگه داریم، آنگاه $f(\alpha,\ \beta)$ به عنوان تابعی از $\beta$ خطی است. بدین طریق، هر$\alpha$ی ثابت، تابعکی خطی روی $V$ تعیین می‌کند. این تابعك خطی را با $L_f(\alpha)$ نشان می‌دهیم. خلاصه می‌کنیم: اگــر $\alpha$ بردار دلخواهی از $V$ باشد، آنگــاه $L_f(\alpha)$ آن تابعك‌خطی روی $V$ است که مقدارآن روی هربردار $\beta$ برابر $f(\alpha,\ \beta)$ است. این مطلب تبدیلی چون $\alpha \rightarrow L_f(\alpha)$ از $V$ در فضای دوگان $V^*$ را به‌دست می‌دهد. چون

$$f(c\alpha_1+\alpha_2,\ \beta)=cf(\alpha_1,\ \beta)+f(\alpha_2,\ \beta)$$

می بینیم که

$$L_f(c\alpha_1+\alpha_2)=cL_f(\alpha_1)+L_f(\alpha_2)$$

یعنی، $L_f$ تبدیلی خطی از $V$ در $V^*$ است.

به طریقی مشابه، $f$ تبدیلی خطی چون $R_f$ از $V$ در $V^*$ را تعیین می‌کند. به‌ازای هر $\beta$ ثابتی از $V$، $f(\alpha,\ \beta)$ به‌عنوان تابعی از $\alpha$ خطی است. $R_f(\beta)$ را آن تابعك خطی روی $V$ تعریف می‌کنیم که مقدار آن روی بردار $\alpha$ برابر $f(\alpha,\ \beta)$ باشد.

**قضیهٔ ۲.** گیریم $f$ فرمی دوخطی روی فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد. فرض‌کنیم $L_f$ و $R_f$ تبدیلهای خطی از $V$ در $V^*$ تعریف‌شده توسط $L_f(\alpha)(\beta)=f(\alpha,\beta)=(R_f\beta)(\alpha)$ باشند. دراین‌صورت رتبهٔ $(R_f)=$ رتبهٔ $(L_f)$.

اثبات. می‌توان اثباتی «مستقل ازمختصات» برای این قضیهٔ ارائه داد. چنین اثباتی شبیه به‌اثبات این مطلب (دربخش ۷.۳) است که رتبهٔ سطری هرماتریس برابر رتبهٔ‌ستونی آن است. لذا، دراینجا اثباتی راعرضه می‌کنیم که با انتخاب یك دستگاه مختصات (پایه) به‌پیش می‌رود وسپس ازقضیهٔ «رتبهٔ سطری برابر رتبهٔ ستونی است» استفاده می‌شود.

برای اینکه، ثابت‌کنیم رتبهٔ $(R_f)=$ رتبهٔ $(L_f)$، کافی است ثابت‌کنیم که $L_f$ و $R_f$ دارای پوچی مساوی هستند. گیریم $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای $V$ باشد و $A=[f]_{\mathcal{B}}$. اگر $\alpha$ و $\beta$ دو بردار در $V$ با ماتریسهای مختصات $X$ و $Y$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشند، آنگاه $f(\alpha,\beta)=X^tAY$. حال $R_f(\beta)=0$ بدین‌معنی‌است که به‌ازای‌هر $\alpha$ در $V$، $f(\alpha,\beta)=0$؛ یعنی، به‌ازای هر ماتریسی $n\times 1$ چون $X$، $X^tAY=0$. شرایط اخیرچیزی جز $AY=0$ نیست. بنابراین، پوچی $R_f$ برابر است با بعد فضای جوابهای $AY=0$.

به‌طور مشابه، $L_f(\alpha)=0$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر ماتریسی $n\times 1$ چون $Y$، $X^tAY=0$. پس، $\alpha$ در فضای پوچ $L_f$ است اگر و تنها اگر $X^tA=0$؛ یعنی، $A^tX=0$. بنابراین، پوچی $L_f$ برابر است با بعد فضای جوابهای $A^tX=0$. چون ماتریسهای $A$ و $A^t$ دارای رتبه‌های ستونی مساوی هستند، می‌بینیم که

$$\text{پوچی}\,(L_f)=\text{پوچی}\,(R_f).\ \square$$

**تعریف.** اگر $f$ فرمی‌دوخطی روی‌فضای بعد متناهی $V$ باشد، رتبهٔ $f$ عبارت‌است‌از عدد صحیح $r=$ رتبهٔ $(R_f)=$ رتبهٔ $(L_f)$.

**نتیجهٔ ۱.** رتبهٔ هرفرم دوخطی برابر است با رتبهٔ ماتریس آن فرم درهرپایهٔ مرتب.

**نتیجهٔ ۲.** اگر $f$ فرمی دوخطی روی فضای برداری $n$ بعدی $V$ باشد، احکام زیر هم‌ارز هستند:

(الف) $n=$ رتبهٔ $(f)$.
(ب) به‌ازای هربردار غیرصفر $\alpha$ در $V$، $\beta$یی در $V$ وجود داردکه $f(\alpha, \beta)\neq 0$.
(پ) به‌ازای هربردار غیرصفر $\beta$ در $V$، $\alpha$یی در $V$ وجود داردکه $f(\alpha, \beta)\neq 0$.
اثبات. حکم (ب) چیزی جز این نیست که فضای پوچ $L_f$ زیرفضای صفر است. حکم (پ) نیز حاکی است که فضای پوچ $R_f$ زیرفضای صفر است. تبدیلهای خطی $L_f$ و $R_f$ دارای پوچی ۰ هستند اگر و تنها اگر دارای رتبهٔ $n$ باشند، یعنی اگر و تنها اگر $n=$ رتبهٔ $(f)$. □

**تعریف.** فرمی دوخطی چون $f$ روی یك فضای برداری $V$ **ناتبهگون** (یا **نامنفرد**) نامیده می‌شود، هرگاه درشرایط (ب) و (پ) نتیجهٔ ۲ صدق کند.

اگر $V$ با بعد متناهی باشد، آنگاه $f$ ناتبهگون است به‌شرط آنکه $f$ در یکی از سه‌شرط نتیجهٔ ۲ صدق کند. بخصوص $f$ ناتبهگون (نامنفرد) است اگر وتنها اگر ماتریس آن در (هر) پایهٔ مرتبی برای $V$ یك ماتریس نامنفرد باشد.

**مثال ۵.** گیریم $V=R^n$ و $f$ فرمی دوخطی‌باشد که به‌ازای $\alpha=(x_1, \cdots, x_n)$ و $\beta=(y_1, \cdots, y_n)$ توسط

$$f(\alpha, \beta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

تعریف می‌شود. دراین‌صورت $f$ یك فرم دوخطی ناتبهگون روی $R^n$ است. ماتریس $f$ درپایهٔ مرتب استانده عبارت است‌از ماتریس همانی $n\times n$:

$$f(X, Y)=X^tY\ .$$

این $f$، معمولاً ضرب نقطه‌ای (یا اسکالری) نامیده می‌شود. خواننده احتمالاً با این فرم دوخطی، دست‌کم درحالت $n=3$ آشنا باشد. ازنظر هندسی، عدد $f(\alpha, \beta)$ عبارت است‌از حاصل‌ضرب طول $\alpha$ درطول $\beta$ درکسینوس زاویهٔ بین $\alpha$ و $\beta$. بخصوص، $f(\alpha, \beta)=0$ اگر وتنها اگر بردارهای $\alpha$ و $\beta$ متعامد (عمودبرهم) باشند.

## تمرین

۱. کدامیك ازتوابع $f$ در زیر تعریف‌شده روی‌بردارهای $\alpha=(x_1, x_2)$و $\beta=(y_1, y_2)$ در $R^2$ فرمهایی دوخطی هستند؟
(الف) $f(\alpha, \beta)=1$.
(ب) $f(\alpha, \beta)=(x_1-y_1)^2+x_2y_2$.
(پ) $f(\alpha, \beta)=(x_1+y_1)^2-(x_1-y_1)^2$.
(ت) $f(\alpha, \beta)=x_1y_2-x_2y_1$.

۲. فرض کنید $f$ فرمی دوخطی روی $R^۲$ تعریف شده توسط

$$f((x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲)) = x_۱y_۱ + x_۲x_۲$$

باشد. ماتریس $f$ را درهریك از پایه‌های زیر بیابید:

$$\{(۱, ۰), (۰, ۱)\}, \{(۱, -۱), (۱, ۱)\}, \{(۱, ۲), (۳, ۴)\}.$$

۳. فرض کنید $V$ فضای همهٔ ماتریسهای $۳ \times ۲$ بر روی $R$ و $f$ فرمی دوخطی روی $V$ تعریف‌شده توسط $f(X, Y) = \operatorname{tr}(X^t AY)$ باشد و

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}.$$

مطلوب است ماتریس $f$ درپایهٔ مرتب

$$\{E^{۱۱}, E^{۱۲}, E^{۱۳}, E^{۲۱}, E^{۲۲}, E^{۲۳}\}$$

که در آن $E^{ij}$ ماتریسی است که تنها درایهٔ غیر صفرش یك ۱ درسطر $i$ و ستون $j$ است.

۴. همهٔ فرمهای دوخطی $f$ روی $R^۳$ را با این خاصیت که به ازای هر $\alpha$ و $\beta$، $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ به‌طور صریح توصیف کنید.

۵. فرمهای دوخطی‌روی $R^۳$ راکه به‌ازای‌همهٔ $\alpha$ها و $\beta$ ها در $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$ صدق می کنند توصیف کنید.

۶. فرض کنید $n$ عددی صحیح مثبت‌و $V$ فضای همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی هیأت اعداد مختلط باشد. نشان‌دهید معادلهٔ

$$f(A, B) = n \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$$

فرمی دوخطی چون $f$ روی $V$ تعریف می کند. آیا این درست است که به‌ازای هر $A$ و $B$، $f(A, B) = f(B, A)$؟

۷. فرض کنید $f$ فرم دوخطی تعریف شده درتمرین ۶ باشد. نشان‌دهید که $f$ تبهگون (غیر ناتبهگون) است. فرض کنید $V_۱$ زیرفضایی از $V$ متشکل‌از ماتریسهای با رد ۰ و $f_۱$ تحدید $f$ روی $V_۱$ باشد. نشان دهید که $f_۱$ ناتبهگون است.

۸. فرض کنید $f$ فرم دوخطی تعریف شده درتمرین ۶ و $V_۲$ زیرفضای $V$ متشکل‌از همهٔ ماتریسهای $A$ باشد که $\operatorname{tr}(A) = ۰$ و $A^* = -A$ ($A^*$ ترانهادهٔ مزدوج $A$ است). تحدید $f$ روی $V_۲$ را با $f_۲$ نشان می‌دهیم. ثابت‌کنید که $f_۲$ معین منفی است، یعنی به‌ازای هر $A$ غیرصفر در $V_۲$، $f_۲(A, A) < ۰$.

۹. فرض کنید $f$ فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ باشد. فرض کنید $W$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $A$ در $V$ باشد که به‌ازای هر $B$، $f(A, B)=0$. نشان دهید $W$ زیرفضایی از $V$ است. $W$ را به‌طور صریح توصیف کنید وسپس آن را بیابید.

۱۰. فرض کنید $f$ فرمی دوخطی روی یك فضای برداری بعد متناهی $V$ و $W$ زیرفضای متشکل ازهمهٔ $\beta$هایی باشد که به‌ازای هر $\alpha$، $f(\alpha, \beta)=0$. نشان دهید

$$\text{بعد}\ (W) - \text{بعد}\ (V) = \text{رتبهٔ}\ (f).$$

این نتیجه ونتیجهٔ تمرین ۹ را به‌کار گیرید تا رتبهٔ فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ را محاسبه کنید.

۱۱. فرض کنید $f$ فرمی دوخطی روی یك فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد. فرض کنید $V_1$ زیرفضایی از $V$ باشد با این خاصیت که تحدید $f$ روی $V_1$ ناتبهگون است. نشان دهید بعد $(V_1) \geqslant$ رتبهٔ $(f)$.

۱۲. فرض کنید $f$ و $g$ فرمهایی دوخطی روی یك فضای برداری بعدمتناهی $V$ باشند. فرض کنید $g$ نامنفرد باشد. نشان دهید که عملگرهای خطی یکتایی چون $T_1$، $T_2$ روی $V$ وجود دارند که به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$

$$f(\alpha, \beta)=g(T_1\alpha, \beta)=g(\alpha, T_2\beta).$$

۱۳. نشان دهید که اگر $g$ منفرد باشد، لزوماً نتیجهٔ به‌دست آمدهٔ در تمرین ۱۲ درست نیست.

۱۴. فرض کنید $f$ فرمی دو خطی روی یك فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد. نشان دهید $f$ می‌تواند به‌صورت حاصل‌ضربی از دو تابعك خطی بیان شود (یعنی، به‌ازای $L_1$ و $L_2$ در $V^*$، $f(\alpha, \beta)=L_1(\alpha)L_2(\beta)$) اگروتنها اگر $f$ دارای رتبهٔ ۱ باشد.

## ۲.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن

هدف اصلی این بخش، پاسخگویی به‌سؤال زیراست: اگر $f$ فرمی دوخطی روی فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد، چه‌وقت پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}$ برای $V$ وجود دارد که در آن $f$ توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود؟ ثابت می‌کنیم که این امر امکان‌پذیراست اگروتنها اگر $f$ فرم دوخطی متقارنی باشد، یعنی $f(\alpha, \beta)=f(\beta, \alpha)$. قضیه تنها وقتی ثابت می‌شود که هیأت اسکالری سرشت‌نمای صفرداشته باشد، بدین معنی که اگر $n$ عدد صحیح مثبتی باشد، مجموع $1+\cdots+1$ ($n$بار) در $F$ صفرنباشد.

**تعریف.** گیریم $f$ فرمی دوخطی روی فضای برداری $V$ باشد. گوییم $f$ **متقارن** است

هرگاه به‌ازای همهٔ بردارهای $\alpha$، $\beta$ در $V$، $f(\alpha, \beta)=f(\beta, \alpha)$.

اگر $V$ با بعد متناهی باشد، فرم دوخطی $f$ متقارن است اگروتنها اگر ماتریس آن، $A$، دریك (یا هر) پایهٔ مرتب، متقارن باشد: $A^t = A$. برای اثبات این مطلب، باید بررسی کنیم که چه‌وقت فرم دوخطی

$$f(X, Y)=X^t AY$$

متقارن است. این فرم متقارن است اگروتنها اگر به‌ازای همهٔ ماتریسهای ستونی $X$ و $Y$، $X^t AY = Y^t AX$. چون $X^t AY$ ماتریسی یــك در یك است، داریم $X^t AY = Y^t A^t X$. پس، $f$ متقارن است اگروتنها اگر به‌ازای هر $X$ و $Y$، $Y^t A^t X = Y^t AX$. واضح است که این دقیقاً بدین‌معنی است کــه $A = A^t$. بخصوص، باید توجه‌کرد که اگــر پایهٔ مرتبی برای $V$ وجود داشته باشد، که در آن $f$ توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود، آنگــاه $f$ متقارن است؛ زیرا هرماتریس قطری یك ماتریس متقارن است.

اگر $f$ فــرم دوخطی متقارنی باشد، **فرم درجهٔ دوم وابسته به** $f$، عبارت است از تابع $q$ از $V$ در $F$ تعریف شده توسط

$$q(\alpha)=f(\alpha, \alpha).$$

اگر $F$ زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد، فرم دوخطی متقارن $f$ به‌طــورکامل توسط فرم درجهٔ دوم وابسته‌اش، طبق **اتحاد قطبی**

$$f(\alpha, \beta)=\frac{1}{4}q(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}q(\alpha-\beta) \qquad (۵\text{-}۱۰)$$

تعیین می‌شود. اثبات (۱۰-۵) محاسبه‌ای عادی است که آن را حذف می‌کنیم. اگر $f$ فرم درجهٔ دوم ضرب نقطه‌ای درمثال ۵ باشد، فرم درجهٔ دوم وابسته به‌آن عبارت است از

$$q(x_1, \cdots, x_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2.$$

به بیان دیگر، $q(\alpha)$ مجذور طول $\alpha$ است. برای فرم دوخطی $f_A(X, Y)=X^t AY$ فرم درجهٔ دوم وابسته عبارت است از

$$q_A(X)=X^t AX=\sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j.$$

یکی از رده‌های مهم فرمهای دوخطی متقارن، ردهٔ ضربهای داخلــی روی فضاهای برداری حقیقی‌هستندکه درفصل ۸موردبحث قرارگرفت. اگر $V$ یك فضای برداری حقیقی باشد، **یك ضرب داخلی** روی $V$ فرم دوخطی متقارنی چون $f$ روی $V$ است که در شرط

$$f(\alpha, \alpha)>0 \text{ ، } \alpha\neq 0 \text{ هرگاه } \qquad (۶\text{-}۱۰)$$

صدق می‌کند. هرفرم دوخطی که در (۱۰-۶) صدق کند، **معین مثبت** نامیــده می‌شود. پس، هرضرب داخلی روی یك فضای برداری حقیقی، یك فرم دوخطی متقارن معین مثبت روی

آن فضاست. توجه کنید که هرضرب داخلی ناتبهگون است. دو بردار $\alpha$ و $\beta$ نسبت به ضرب داخلی $f$ **متعامد** نامیده می‌شوند، هرگاه $f(\alpha, \beta) = 0$. فرم درجهٔ دوم $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ تنها مقادیر نامنفی را می‌پذیرد و $q(\alpha)$ غالباً به عنوان مجذور طول $\alpha$ درنظر گرفته می‌شود. بدیهی است که مفاهیم طول و تعامد، از مهمترین مثال ضربهای داخلی ـ ضرب نقطه‌ای در مثال ۵ ـ ریشه می‌گیرند.

اگر $f$ فرم دوخطی متقارنی روی یك فضای برداری $V$ باشد، مناسب است برخی از اصطلاحات ضربهای داخلی را برای $f$ هم به‌کار ببریم. بویژه مناسب است بگوییم که $\alpha$ و $\beta$ نسبت به $f$ متعامدند، هرگاه $f(\alpha, \beta) = 0$. مصلحت نیست که $f(\alpha, \alpha)$ به عنوان مجذور طول $\alpha$ درنظر گرفته شود؛ برای مثال، اگر $V$ یك فضای برداری مختلط باشد، ممکن است داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = \sqrt{-1}$ یا روی یك فضای برداری حقیقی داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = -2$.

اکنون به قضیهٔ اساسی این بخش می‌پردازیم. درخواندن اثبات، تجسم حالت خاصی که در آن $V$ یك فضای برداری حقیقی و $f$ ضربی داخلی روی $V$ باشد به خواننده کمك خواهد کرد.

**قضیهٔ ۳.** فرض کنیم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی بررویِ هیأتی با سرشت‌نمای صفر و $f$ فرم دوخطی متقارنی روی $V$ باشد. در این صورت پایهٔ مرتبی برای $V$ وجود دارد که درآن $f$ توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود.

اثبات. آنچه را که باید بیابیم پایهٔ مرتبی چون

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1 \cdots, \alpha_n\}$$

است که به‌ازای $i \neq j$، $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. اگر $f = 0$ یا $n = 1$، قضیه به‌طور بدیهی درست است. پس می‌توان فرض کرد که $f \neq 0$ و $n > 1$. اگر به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $f(\alpha, \alpha) = 0$، فرم درجهٔ دوم وابستهٔ $q$ متحداً ۰ است و اتحاد قطبی (۱۰-۵) نشان می‌دهد که $f = 0$. پس در $V$ برداری چون $\alpha$ وجود دارد که $f(\alpha, \alpha) = q(\alpha) \neq 0$. گیریم $W$ زیرفضایی یك بعدی از $V$ باشد که توسط $\alpha$ پدید می‌آید و $W^\perp$ مجموعهٔ همهٔ بردارهای $\beta$ در $V$ که $f(\alpha, \beta) = 0$. اکنون ادعا می‌کنیم که $V = W \oplus W^\perp$. به‌طور یقین زیرفضاهای $W$ و $W^\perp$ مستقل هستند. یك بردار نمونه در $W$، $c\alpha$ است که در آن $c$ یك اسکالر است. اگر $c\alpha$ در $W^\perp$ نیز باشد، آنگاه $f(c\alpha, c\alpha) = c^2 f(\alpha, \alpha) = 0$ ولی $f(\alpha, \alpha) \neq 0$، پس $c = 0$. همچنین، هر بردار در $V$ مجموع برداری در $W$ و برداری در $W^\perp$ است. زیرا، فرض کنیم $\gamma$ برداری دلخواه در $V$ باشد، قرار می‌دهیم

$$\beta = \gamma - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

دراین صورت

www.riazisara.ir



$$f(\alpha,\ \beta)=f(\alpha,\ \gamma)-\frac{f(\gamma,\ \alpha)}{f(\alpha,\ \alpha)}f(\alpha,\ \alpha)$$

و چون $f$ متقارن است، $f(\alpha,\ \beta)=0$. پس، $\beta$ در زیر فضای $W^{\perp}$ قراردارد. عبارت

$$\gamma=\frac{f(\gamma,\ \alpha)}{f(\alpha,\ \alpha)}\alpha+\beta$$

نشان می‌دهد که $V=W+W^{\perp}$.

تحدید $f$ روی $W^{\perp}$ یك فرم دوخطی متقارن روی $W^{\perp}$ است. چون $W^{\perp}$ دارای بعد $(n-1)$ است می‌توانیم بنا به استقرا فرض کنیم که $W^{\perp}$ دارای پایه‌ای چون $\{\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ است که

$$f(\alpha_i,\ \alpha_j)=0,\qquad i\neq j(i\geqslant 2,\ j\geqslant 2)$$

با قراردادن $\alpha=\alpha_1$، پایه‌ای چون $\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ برای $V$ به‌دست می‌آید و به ازای $i\neq j$ داریم $f(\alpha_i,\ \alpha_j)=0$. □

**نتیجه.** گیریم $F$ زیر هیأتی از اعداد مختلط و $A$ ماتریس $n\times n$ متقارنی برروی $F$ باشد. دراین‌صورت ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری‌چون $P$ برروی F وجود داردکه $P^tAP$ قطری است.

درحالتی‌که $F$ هیأت اعداد حقیقی باشد، ماتریس معکوس‌پذیر $P$ در این نتیجه را می‌توان ماتریسی متعامد انتخاب کرد. بدین معنی‌که $P^t=P^{-1}$. به بیان دیگر، اگر $A$ یك ماتریس $n\times n$ متقارن حقیقی باشد، یك ماتریس‌متعامد حقیقی چون $P$ وجود داردکه $P^tAP$ قطری است؛ لکن، این مطلب به‌هیچ وجه از آنچه در بالا انجام شد آشکار نیست (فصل ۸ را ببینید).

**قضیهٔ ۴.** گیریم $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت اعداد مختلط باشد. فرض کنیم $f$ فرم دو خطی متقارنی روی $V$ با رتبهٔ $r$ باشد. دراین صورت برای $V$ پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}=\{\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n\}$ وجود داردکه

(۱) ماتریس $f$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$قطری است

$$f(\beta_j,\ \beta_j)=\begin{cases}1, & j=1,\ \cdots,\ r\\ 0, & j>r\end{cases}\qquad (2)$$

اثبات. بنابر قضیهٔ ۳ پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ برای $V$ وجود داردکه

$$f(\alpha_i,\ \alpha_j)=0\quad \text{به ازای}\quad i\neq j$$

چون $f$ دارای رتبهٔ $r$ است، رتبهٔ ماتریس آن در پـایهٔ مـرتب $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ نیز $r$ است. پس، به‌ازای دقیقاً $r$ مقدار $j$ باید داشته باشیم $f(\alpha_j, \alpha_j)\neq 0$ . با تغییر ترتیب بردارهای $\alpha_j$ ، می‌توان فرض کرد که

$$f(\alpha_j, \alpha_j)\neq 0, \quad j=1, \cdots, r$$

اکنون از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هیأت اسکالرها همان هیأت اعداد مختلط است. اگر $\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}$ نشانگر یکی از ریشه‌های دوم (جذر) مختلط $f(\alpha_j, \alpha_j)$ باشد و اگر قراردهیم

$$\beta_j=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}}\alpha_j, & j=1, \cdots, r\\ \alpha_j, & j>r\end{cases}$$

آنگاه پایهٔ $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ شرایط (۱) و (۲) را ارضا می‌کند. □

بدیهی است، در صورتی که هیأت اسکالری زیر هیأتی از اعداد مختلط باشد که‌در آن هرعنصرش ریشهٔ دومی داشته باشد، قضیهٔ ۴ بازهم معتبر است. این قضیه مثلاً وقتی که هیأت اسکالری هیأت اعـداد حقیقی باشد، معتبر نیست. روی هیأت اعداد حقیقی بجـای قضیهٔ ۴ قضیهٔ زیر را داریم.

**قضیهٔ ۵.** گیریم $V$ یك فضای برداری $n$ بعدی برروی هیأت اعداد حقیقی و $f$ فـرم دوخطی متقارنی‌روی $V$ بارتبهٔ $r$ باشد. دراین‌صورت پایهٔ‌مرتبی‌چون $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ برای $V$ وجود داردکه در آن ماتریس $f$ قطری است

$$f(\beta_j, \beta_j)=\pm 1, \qquad j=1, \cdots, r.$$

بعلاوه تعداد بردارهای پایه‌ای $\beta_j$ کـه به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j)=1$ مستقل از انتخاب پایه است.

**اثبات.** پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای $V$ وجود دارد که

$$f(\alpha_i, \alpha_j)=0, \quad i\neq j$$
$$f(\alpha_j, \alpha_j)\neq 0, \quad 1\leqslant j\leqslant r$$
$$f(\alpha_j, \alpha_j)=0, \quad j>r.$$

گیریم

$$\beta_j=|f(\alpha_j, \alpha_j)|^{-1/2}\alpha_j, \quad 1\leqslant j\leqslant r$$
$$\beta_j=\alpha_j, \quad j>r.$$

آنگاه $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای است با خواص مطلوب.

گیریم $p$ تعداد بردارهای پایه‌ای $\beta_j$ باشد که به‌ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 1$؛ باید نشان دهیم که عدد $p$ مستقل از پایهٔ خاصی است که ما آن را برگزیده‌ایم و در شرایط مذکور صدق می‌کند. گیریم $V^+$ زیرفضایی از $V$ باشد که توسط بردارهای پایه‌ای $\beta_j$ با شرط $f(\beta_j, \beta_j) = 1$ پدید می‌آید، و $V^-$ زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای پایه‌ای $\beta_j$ باشد که به‌ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = -1$. حال بعد $p = (V^+)$ ، پس باید یکتابودن بعد $V^+$ را ثابت کنیم. بسهولت دیده می‌شود که اگر $\alpha$ بردار غیرصفری از $V^+$ باشد، آنگاه $f(\alpha, \alpha) > 0$؛ به بیان‌دیگر، $f$ روی زیرفضای $V^+$ معین‌مثبت است. به‌طورمشابه، اگر $\alpha$ برداری غیرصفر از $V^-$ باشد، آنگاه $f(\alpha, \alpha) < 0$، یعنی $f$ روی زیرفضای $V^-$ معین منفی است. حال گیریم $V^\perp$ زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای پایه‌ای $\beta_j$ باشد که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 0$. اگر $\alpha$ در $V^\perp$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $\beta$ در $V$ ، $f(\alpha, \beta) = 0$.

چون $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای $V$ است، داریم

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp .$$

علاوه‌براین، ادعا می‌کنیم که اگر $W$ زیرفضایی از $V$ باشد که روی آن $f$ معین مثبت است، آنگاه زیر فضاهای $W$ ، $V^-$ ، و $V^\perp$ مستقل هستند. زیرا، فرض‌کنیم، $\alpha$ در $W$، $\beta$ در $V^-$ ، و $\gamma$ در $V^\perp$، و $\alpha + \beta + \gamma = 0$. در این‌صورت

$$0 = f(\alpha, \alpha + \beta + \gamma) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$$
$$0 = f(\beta, \alpha + \beta + \gamma) = f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta) + f(\beta, \gamma) .$$

چون $\gamma$ در $V^\perp$ است $f(\alpha, \gamma) = f(\beta, \gamma) = 0$ ؛ و چون $f$ متقارن است، داریم

$$0 = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta)$$
$$0 = f(\beta, \beta) + f(\alpha, \beta)$$

پس، $f(\alpha, \alpha) = f(\beta, \beta)$. چون $f(\alpha, \alpha) \geqslant 0$ و $f(\beta, \beta) \leqslant 0$ نتیجه می‌گیریم که

$$f(\alpha, \alpha) = f(\beta, \beta) = 0 .$$

ولی $f$ روی $W$ معین مثبت است و روی $V^-$ معین منفی. نتیجه اینکه $\alpha = \beta = 0$ و از این‌رو $\gamma$ نیز برابر صفر است.

چون

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp$$

و $W$، $V^-$ ، و $V^\perp$ مستقل هستند دیده می‌شود که بعد $(W) \leqslant$ بعد $(V^+)$ ، یعنی اگر $W$ زیرفضایی از $V$ باشد که روی‌آن $f$ معین مثبت است، بعد $W$ نمی‌تواند از بعد $V^+$ تجاوز

کند. اگر $\mathcal{B}_1$ پایهٔ مرتب دیگری برای $V$ باشد و درشرایط قضیه صدق کند، زیرفضاهای متناظر $V_1^+$، $V_1^-$، و $V_1^\perp$ را خواهیم داشت؛ و استدلال بالا نشان می‌دهد که بعد$(V^+)\leqslant$ بعد$(V_1^+)$. با وارونه کردن استدلال بعد$(V_1^+)\leqslant$ بعد$(V^+)$ را به‌دست‌می‌آوریم و نتیجتاً

$$\text{بعد}(V_1^+) = \text{بعد}(V^+)\,.\ \square$$

باید نکات چندی را در رابطه با پایهٔ $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ درقضیهٔ ۵ و زیرفضاهای وابستهٔ $V^+$، $V^-$، و $V^\perp$ متذکر شویم. ابتدا، توجه کنید که $V^\perp$ درست همان زیرفضای بردارهایی است که برهمهٔ $V$ «عمود» هستند. قریباً توضیح دادیم که $V^\perp$ مشمول دراین زیرفضاست؛ اما،

$$\text{بعد}(V^\perp) = \text{بعد}(V) - (\text{بعد}(V^+) + \text{بعد}(V^-)) = \text{بعد}(V) - \text{رتبهٔ}(f)$$

لذا هر بردار $\alpha$ که به‌ازای هر $\beta$ داشته باشیم $f(\alpha, \beta)=0$ باید در $V^\perp$ باشد. پس زیرفضای $V^\perp$ یکتاست. زیرفضاهای $V^+$ و $V^-$ یکتا نیستند؛ اما ابعاد آنها یکتا هستند. اثبات قضیهٔ ۵ نشان می‌دهد که بعد $(V^+)$ برابر است با بزرگترین بعد ممکن زیرفضاهایی که روی آنها $f$ معین مثبت است. به‌طور مشابه بعد$(V^-)$ برابر است با بزرگترین بعد زیرفضاهایی که روی آنها $f$ معین منفی است. بدیهی است که

$$\text{رتبهٔ}\,(f) = \text{بعد}\,(V^+) + \text{بعد}\,(V^-).$$

عدد

$$\text{بعد}\,(V^+) - \text{بعد}\,(V^-)$$

غالباً **نشان** $f$ نامیده می‌شود. دلیل معرفی این اصطلاح این است که ابعاد $V^+$ و $V^-$ از روی رتبهٔ $f$ ونشان $f$ بسهولت تعیین می‌شوند.

شاید بهتر باشد دربارهٔ رابطهٔ بین فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی وضربهای‌داخلی به‌نکتهٔ دیگری‌هم اشاره کنیم. فرض کنیم $V$ یك فضای‌برداری‌حقیقی با بعد متناهی و $V_1$، $V_2$، $V_3$ زیرفضاهایی از $V$ باشند که

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

فرض‌کنیم $f_1$ ضربی داخلی روی $V_1$ و $f_2$ ضربی داخلی روی $V_2$ باشد. دراین‌صورت می‌توانیم فرم دوخطی متقارنی چون $f$ روی $V$ به‌شرح زیر تعریف کنیم: اگر $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی از $V$ باشند، آنگاه به‌ازای $\alpha_j$ و $\beta_j$هایی از $V$ می‌توان نوشت

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{و} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

گیریم

$$f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha_1, \beta_1) - f_2(\alpha_2, \beta_2).$$

برای $f$ زیرفضای $V^{\perp}$ عبارت خواهد بود از $V_3$؛ برای $f$، $V_1$ یك $V^+$ مناسب است و $V_2$ یك $V^-$ مناسب. یك قسمت از حکم قضیهٔ ۵ این است که هرفرم دوخطی متقارن روی $V$، به‌همین‌طریق پدید می‌آید. محتوای دیگر قضیه این است که هرضرب داخلی را می‌توان درپایهٔ مرتب معینی توسط ماتریس همانی نمایش داد.

## تمرین

۱. عبارات زیر، فرمهای درجهٔ دوم $q$ روی $R^2$ را تعریف می‌کنند. فرم دوخطی متقارن $f$ متناظر به‌هر $q$ را بیابید.

(الف) $ax_1^2$ (ث) $x_1^2+9x_2^2$

(ب) $bx_1x_2$ (ج) $3x_1x_2-x_2^2$

(پ) $cx_2^2$ (چ) $4x_1^2+6x_1x_2-3x_2^2$.

(ت) $2x_1^2-\frac{1}{3}x_1x_2$

۲. ماتریس درپایهٔ مرتب استانده و رتبهٔ هریك از فرمهای دوخطی تعیین شده در تمرین ۱ را بیابید. مشخص کنید که کدامیك از این فرمها ناتبهگون هستند.

۳. فرض کنید $q(x_1, x_2)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$ فرم درجهٔ دوم وابسته به فرم دوخطی متقارنی چون $f$ روی $R^2$ باشد. نشان‌دهید $f$ ناتبهگون است اگر وتنها اگر $b^2-4ac\neq 0$.

۴. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی زیرهیأتی چون $F$ از اعداد مختلط و $S$ مجموعهٔ همهٔ فرمهای دوخطی متقارن روی $V$ باشد.

(الف) نشان‌دهید $S$ زیرفضایی از $L(V, V, F)$ است.

(ب) بعد $(S)$ را بیابید.

گیریم $Q$ مجموعهٔ همهٔ فرمهای درجهٔ دوم روی $V$ باشد.

(پ) نشان دهید $Q$ زیرفضایی ازفضای همهٔ توابع‌از $V$ در $F$ است.

(ت) بدون رجوع به‌هیچ پایه‌ای یك یکریختی چون $T$ از $Q$ بروی $S$ را به‌طور صریح توصیف کنید.

(ث) فرض‌کنید $U$ عملگری خطی روی $V$ و $q$ عنصری از $Q$ باشد. نشان دهید که معادلهٔ $(U^+q)(\alpha)=q(U\alpha)$ فرم درجهٔ دوم $U^+q$ را روی $V$ تعریف می‌کند.

(ج) اگر $U$ عملگری خطی روی $V$ باشد نشان‌دهید تابع $U^+$ که دربخش (ث) تعریف شد عملگری خطی روی $Q$ است. نشان‌دهید $U^+$ معکوس‌پذیر است اگر وتنها

اگر $U$ معکوس‌پذیر باشد.

۰۵ فرض کنید $q$ فرم درجهٔ دوم روی $R^2$ تعریف شده توسط

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \quad a \neq 0$$

باشد. عملگر خطی معکوس‌پذیری چون $U$ روی $R^2$ بیابید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2) = ax_1^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)x_2^2.$$

(راهنمایی: برای یافتن $U^{-1}$ (و درنتیجه $U$) مربع را کامل کنید. برای تعریف $U^\dagger$ به قسمت (ث) تمرین ۴ رجوع کنید.)

۰۶ فرض کنید $q$ فرم درجهٔ دوم روی $R^2$ داده شده توسط

$$q(x_1, x_2) = 2bx_1x_2$$

باشد. عملگر خطی معکوس‌پذیری چون $U$ روی $R^2$ بیابید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2) = 2bx_1^2 - 2bx_2^2$$

۰۷ فرض کنید $q$ فرم درجهٔ دوم روی $R^3$ داده شده توسط

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$$

باشد. عملگر خطی معکوس‌پذیری چون $U$ روی $R^3$ بیابید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2.$$

(راهنمایی: $U$ را به‌صورت حاصل‌ضرب عملگرهایی شبیه به عملگرهای به‌کار گرفته شدهٔ در تمرینهای ۵ و ۶ بیان کنید.)

۰۸ فرض کنید $A$ ماتریس $n \times n$ متقارنی برروی $R$ و $q$ فرم درجهٔ دوم روی $R^n$ داده‌شده توسط

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j$$

باشد. روش به‌کار گرفته شده درتمرین ۷ را برای نشان دادن این مطلب که عملگرخطی معکوس‌پذیری چون $U$ روی $R^n$ وجود دارد که

$$(U^\dagger q)(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i^2$$

تعمیم دهید. دراینجا $c_i$ به‌ازای $i = 1, \cdots, n$ برابر ۱، ۱ــ، یا ۰ است.

۹. فرض کنید $f$ فرم دوخطی متقارنی‌روی $R^n$ باشد. نتیجهٔ تمرین ۸ را برای اثبات‌وجود پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}$ به‌نحوی که $[f]_{\mathcal{B}}$ قطری باشد به‌کار گیرید.

۱۰. فرض کنید $V$ فضای برداری حقیقی همهٔ ماتریسهای هرمیتی (مختلط) ۲ × ۲ باشد، یعنی ماتریسهای مختلط ۲ × ۲یی چون $A$ باشد که در $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ صدق می‌کنند.
(الف) نشان دهید معادلهٔ $q(A) = \det A$ فرم درجهٔ دوم $q$ را روی $V$ تعریف می‌کند.
(ب) فرض کنید $W$ زیرفضایی از $V$ متشکل‌از ماتریسهای با رد ۰ باشد. نشان‌دهید فرم دوخطی $f$ تعیین شده توسط $q$ روی زیرفضای $W$ معین منفی است.

۱۱. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی و $f$ فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی $V$ باشد. نشان‌دهید که به‌ازای هرعملگر خطی $T$ روی $V$ عملگر خطی یکتایی چون $T'$ روی $V$ وجود دارد که به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $f(T\alpha, \beta) = f(\alpha, T'\beta)$. همچنین نشان‌دهید که

$$(T_1T_2)' = T_2'T_1'$$
$$(c_1T_1 + c_2T_2)' = c_1T_1' + c_2T_2'$$
$$(T')' = T.$$

بدون این فرض که $T$ ناتبهگون است، چه‌مقدار از مطالب بالا معتبر است؟

۱۲. فرض کنید $F$ یك هیأت و $V$ فضای ماتریسهای $n \times 1$ برروی $F$ باشد. فرض کنید $A$ ماتریس $n \times n$ ثابتی برروی $F$ و $f$ فرم‌دوخطی تعریف‌شده توسط $f(X, Y) = X^tAY$ روی $V$ باشد. بعلاوه فرض کنید $f$ متقارن و ناتبهگون باشد. فرض کنید $B$ ماتریسی $n \times n$ برروی $F$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد که $X$ را به $BX$ می‌فرستد. عملگر $T'$ در تمرین ۱۱ را بیابید.

۱۳. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی و $f$ فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی $V$ باشد. وابستهٔ به $f$ یك‌یکریختی «طبیعی» از $V$ بروی‌فضای دوگان $V^*$ وجود دارد که همان تبدیل $L_f$ از بخش ۱.۱۰ است. $L_f$ را به‌کار برید ونشان‌دهید که به‌ازای هرپایهٔ $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ از $V$ پایهٔ یکتایی چون $\mathcal{B}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$ از $V$ وجود دارد که $f(\alpha_i, \alpha_j') = \delta_{ij}$. سپس نشان‌دهید به‌ازای هر بردار $\alpha$ در $V$ داریم

$$\alpha = \sum_i f(\alpha, \alpha_i')\alpha_i = \sum_i f(\alpha_i, \alpha)\alpha_i'.$$

۱۴. فرض کنید $V$، $f$، $\mathcal{B}$، و $\mathcal{B}'$ همچون درتمرین ۱۳ باشند. فرض کنید $T$ عملگری‌خطی

روی $V$ و $T'$ عملگری خطی باشد که $f$ آن‌را همچون در تمرین ۱۱ به $T$ وابسته می‌سازد. نشان دهید

(الف) $[T']_{\mathcal{B}'}=[T]^t_{\mathcal{B}}$.

(ب) $\operatorname{tr}(T)=\operatorname{tr}(T')=\sum_i f(T\alpha_i, \alpha'_i)$.

۱۵. فرض کنید $V$، $f$، $\mathcal{B}$، و $\mathcal{B}'$ همچون در تمرین ۱۳ باشند. فرض کنید $A=[f]_{\mathcal{B}}$. نشان دهید

$$\alpha'_i=\sum_j (A^{-1})_{ij}\alpha_j=\sum_j (A^{-1})_{ji}\alpha_j.$$

۱۶. فرض کنید $F$ یك هیأت و $V$ فضای ماتریسهای $n\times 1$ برروی $F$ باشد. فرض کنید $A$ ماتریس $n\times n$ متقارن معکوس‌پذیری برروی $F$ و نیز $f$ فرم دوخطی روی $V$ تعریف شده توسط $f(X, Y)=X^tAY$ باشد. فرض کنید $P$ ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری برروی $F$ و $\mathcal{B}$ پایهٔ متشکل از ستونهای $P$ برای $V$ باشد. نشان‌دهید که پایهٔ $\mathcal{B}'$ در تمرین ۱۳ متشکل از ستونهای ماتریس $A^{-1}(P^t)^{-1}$ است.

۱۷. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأتی چون $F$ و $f$ فرم دوخطی متقارنی روی $V$ باشد. به‌ازای هر زیرفضای $W$ از $V$، گیریم $W^{\perp}$ مجموعهٔ همهٔ بردارهای $\alpha$ در $V$ باشد که به‌ازای هر $\beta$ در $W$، $f(\alpha, \beta)=0$. نشان‌دهید

(الف) $W^{\perp}$ یك زیرفضاست.

(ب) $V=\{0\}^{\perp}$.

(پ) $V^{\perp}=\{0\}$ اگر وتنها اگر $f$ ناتبهگون باشد.

(ت) بعد$(V^{\perp})$ — بعد$(V)$ = رتبهٔ$(f)$

(ث) اگر بعد$(V)=n$ و بعد$(W)=m$، آنگاه بعد$(W^{\perp})\geqslant n-m$.

(راهنمایی: $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ را پایه‌ای برای $W$ بگیرید ونگاشت

$$\alpha \rightarrow (f(\alpha, \beta_1), \dots, f(\alpha, \beta_m))$$

از $V$ در $F^m$ را موردتوجه قرار دهید.)

(ج) تحدید $f$ روی $W$ ناتبهگون است اگر وتنها اگر

$$W\cap W^{\perp}=\{0\}.$$

(چ) $V=W\oplus W^{\perp}$ اگر وتنها اگر تحدید $f$ روی $W$ ناتبهگون باشد.

۱۸. فرض کنید $V$ یك فضای برداری با بعد متناهی برروی $C$ و $f$ فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی $V$ باشد. ثابت‌کنید پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ از $V$ وجود داردکه $\mathcal{B}'=\mathcal{B}$ (برای تعریف $\mathcal{B}'$ تمرین ۱۳ را ببینید).

## ۳.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن کج

در تمام این بخش، $V$ یك فضای برداری بر روی یك زیرهیأت $F$ از هیأت اعدادمختلط خواهد بود. فرمی دوخطی چون $f$ روی $V$ **متقارن کج** نامیده می‌شود، هر گاه به‌ازای همهٔ بردارهای $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$. در رابطه با ساده کردن ماتریس فرم دوخطی متقارن کجی روی یك فضای بعد متناهی $V$ قضیه‌ای را اثبات خواهیم کرد. ولی بیایید ابتدا به چند مشاهدهٔ عمومی بپردازیم.

فرض کنید $f$ فرم دو خطی دلخواهی روی $V$ باشد، اگر فرض کنیم

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\left[f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)\right]$$

$$h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\left[f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)\right]$$

آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که $g$ فرم دوخطی متقارنی روی $V$ و $h$ فرم دوخطی متقارن کجی روی $V$ است. ازاین گذشته، $f = g + h$. بعلاوه، این عبارت برای $f$، به صورت مجموع فرمی متقارن و فرمی متقارن کج، یکتاست. پس، فضای $L(V, V, F)$ مجموع مستقیم زیرفضای فرمهای متقارن و زیرفضای فرمهای متقارن کج است.

اگر بعد $V$ متناهی باشد، فرم دوخطی $f$ متقارن کج است اگر وتنها اگرماتریس آن $A$، در یك (یا هر) پایهٔ مرتبی متقارن کج باشد: $A^t = -A$. این قضیه، عیناً مثل حکم متناظر دربارهٔ فرمهای دوخطی متقارن اثبات می‌شود. وقتی $f$ متقارن کج باشد همهٔ درایه‌های قطری ماتریس $f$، در هر پایهٔ مرتبی، ۰ خواهند بود. این درست متناظر این مشاهده است که به‌ازای هر $\alpha$ در $V$، $f(\alpha, \alpha) = 0$، چرا که $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha)$.

حال فرض می‌کنیم $f$ فرم دوخطی متقارن کج غیر صفری روی $V$ باشد. چون $f \neq 0$، بردارهایی چون $\alpha$ و $\beta$ در $V$ وجود دارند که $f(\alpha, \beta) \neq 0$.[1] با ضرب $\alpha$ در اسکالرمناسبی، می‌توان فرض کرد که $f(\alpha, \beta) = 1$. گیریم $\gamma$ برداری دلخواه درزیرفضای پدید آمده توسط $\alpha$ و $\beta$، مثلاً $\gamma = c\alpha + d\beta$، باشد. در این صورت

$$f(\gamma, \alpha) = f(c\alpha + d\beta, \alpha) = d f(\beta, \alpha) = -d$$

$$f(\gamma, \beta) = f(c\alpha + d\beta, \beta) = c f(\alpha, \beta) = c$$

و لذا

$$\gamma = f(\gamma, \beta)\alpha - f(\gamma, \alpha)\beta. \qquad (۷\text{-}۱۰)$$

بخصوص، توجه کنید که $\alpha$ و $\beta$ لزوماً مستقل خطی هستند؛ زیرا، اگر $\gamma = 0$، آنگاه

---

۱. این حکم در صورتی امکان‌پذیر است که $2 \leqslant$ بعد $(V)$. در طول بحث، این شرط باید در نظر گرفته شود.ـ م.

$f(\gamma, \alpha) = f(\gamma, \beta) = ۰$.

فرض کنید $W$ زیرفضای دوبعدی پدیدآمده توسط $\alpha$ و $\beta$ باشد. بعلاوه فرض کنید $W^{\perp}$ مجموعهٔ همهٔ بردارهایی چون $\delta$ در $V$ باشد که $f(\delta, \alpha) = f(\delta, \beta) = ۰$؛ یعنی، مجموعهٔ همهٔ $\delta$ هایی باشد که به‌ازای هر $\gamma$ در زیرفضای $W$، $f(\delta, \gamma) = ۰$. ادعامی‌کنیم که $V = W \oplus W^{\perp}$. زیرا، گیریم $\epsilon$ بردار دلخواهی در $V$ باشد و

$$\gamma = f(\epsilon, \beta)\alpha - f(\epsilon, \alpha)\beta$$
$$\delta = \epsilon - \gamma.$$

آنگاه $\gamma$ در $W$ و $\delta$ در $W^{\perp}$ است، چرا که

$$\begin{aligned} f(\delta, \alpha) &= f(\epsilon - f(\epsilon, \beta)\alpha + f(\epsilon, \alpha)\beta, \alpha) \\ &= f(\epsilon, \alpha) + f(\epsilon, \alpha) f(\beta, \alpha) \\ &= ۰ \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه $f(\delta, \beta) = ۰$. پس، هر $\epsilon$ در $V$ به‌صورت $\epsilon = \gamma + \delta$ با فرض $\gamma$ در $W$ و $\delta$ در $W^{\perp}$ است. از (۷-۱۰) واضح است که $W \cap W^{\perp} = \{۰\}$ ولذا $V = W \oplus W^{\perp}$.

حال تحدید $f$ روی $W^{\perp}$ فرم دوخطی متقارن‌کجی روی $W^{\perp}$ است. ایـن تحدید ممکن است فرم صفر باشد. اگر نباشد، بردارهایی چون $\alpha'$ و $\beta'$ در $W^{\perp}$ وجود دارند که $f(\alpha', \beta') = ۱$. اگر فرض‌کنیم $W'$ زیرفضای دوبعدی پدیدآمده توسط $\alpha'$ و $\beta'$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$V = W \oplus W' \oplus W_{۰}$$

که در آن $W_{۰}$ عبارت است از مجموعـهٔ همه بردارهایی چـون $\delta$ در $W^{\perp}$ بـه‌طوری که $f(\alpha', \delta) = f(\beta', \delta) = ۰$. اگـر تحدید $f$ روی $W_{۰}$ فـرم صفر نباشد، مـی‌تـوانیم بردارهایی چون $\alpha''$ و $\beta''$ در $W_{۰}$ را چنان انتخاب‌کنیم که $f(\alpha'', \beta'') = ۱$ و بعد ادامه دهیم.

در حالت بعد متناهـی باید واضح باشد کـه دنباله‌ای متناهی از جفت بردارهای

$$(\alpha_{۱}, \beta_{۱}), (\alpha_{۲}, \beta_{۲}), \cdots, (\alpha_k, \beta_k)$$

با خواص زیر به دست می‌آیند:

(الف) $f(\alpha_j, \beta_j) = ۱$، $j = ۱, \cdots, k$.

(ب) $f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\beta_i, \beta_j) = f(\alpha_i, \beta_j) = ۰$، $i \neq j$.

(پ) اگر $W_j$ زیرفضای دوبعدی پدید آمده توسط $\alpha_j$ و $\beta_j$ باشد، آنگاه

$$V = W_{۱} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus W_{۰}$$

www.riazisara.ir



که درآن هر بردار در $W_0$ بر همهٔ $\alpha_j$ها و $\beta_j$ها «عمود» است و تحدید $f$ روی $W_0$ فرم صفر است.

**قضیهٔ ۶.** گیریم $V$ یك فضای برداری $n$ بعدی برروی زیرهیأتی از اعداد مختلف و $f$ فرم دوخطی مفروضی‌ راحفظ می‌کنند، تحت تشکیل حاصل‌ضربها(ی عملگرها)، بسته است. مرتبی برای $V$ وجود داردکه در آن ماتریس $f$ عبارت است از مجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-r)\times(n-r)$ و $k$ نسخه از ماتریس ۲ × ۲ ی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**اثبات.** فرض می‌کنیم $\alpha_1$، $\beta_1$، ...، $\alpha_k$، $\beta_k$ بردارهایی باشند که در شرایط (الف)، (ب)، و (پ) بالا صدق می‌کنند. گیریم $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ پایهٔ مرتب دلخواهی برای زیرفضای $W_0$ باشد. دراین صورت

$$\mathcal{B}\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$$

پایهٔ مرتبی برای $V$ است. از (الف)، (ب)، و (پ) واضح است که ماتریس $f$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت‌است ازمجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-2k)\times(n-2k)$ و $k$ نسخه از ماتریس ۲ × ۲ ی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{۸-۱۰}$$

بعلاوه، واضح است که رتبهٔ این ماتریس، و در نتیجه $f$، برابر $2k$ است. □

یکی از نتایج مطالب بالا این است که اگر $f$ فرم دوخطی متقارن کج ناتبهگونی روی $V$ باشد، آنگاه بعد $V$ باید زوج باشد. اگر $2k =$ بعد $(V)$، پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k\}$ برای $V$ وجود خواهد داشت که

$$f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\beta_i, \beta_j) = 0.$$

ماتریس $f$ در این پایهٔ مرتب مجموع مستقیم $k$ نسخه از ماتریس متقارن کج ۲ × ۲ ی (۸-۱۰) است. اگر به‌جای پایهٔ مرتب بالا، پایهٔ مرتب

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k, \ldots, \beta_1\}$$

را درنظر بگیریم، صورت استاندهٔ دیگری برای ماتریس یك فرم متقارن کج ناتبهگون

به‌دست می‌آوریم. خواننده باید به آسانی بتواند نشان دهدکه ماتریس $f$ در پایهٔ مرتب اخیر صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix}$$

را داردکه در آن $J$ عبارت است از ماتریس $k\times k$ ی

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## تمرین

۱. فرض‌کنید $V$ فضایی برداری برروی هیأتی چون $F$ باشد. نشان دهیدکه مجموعهٔ همهٔ فرمهای دوخطی متقارن کج روی $V$ زیرفضایی از $L(V, V, F)$ است.

۲. همهٔ فرمهای دوخطی متقارن‌کج روی $R^3$ را بیابید.

۳. پایه‌ای برای فضای همهٔ فرمهای دوخطی متقارن‌کج روی $R^n$ بیابید.

۴. فرض‌کنید $f$ فرم دوخطی متقارنی روی $C^n$ و $g$ فرم دوخطی متقارن‌کجی روی $C^n$ باشد. فرض کنید $f+g=0$. نشان دهید که $f=g=0$.

۵. فرض‌کنید $V$ یك فضای‌برداری $n$ بعدی برروی زیرهیأتی چون $F$ از $C$ باشد. احکام زیر را ثابت‌کنید.

(الف) معادلهٔ $(Pf)(\alpha, \beta)=\frac{1}{2}f(\alpha,\beta)-\frac{1}{2}f(\beta,\alpha)$ یك عملگرخطی $P$ روی $L(V, V, F)$ تعریف می‌کند.

(ب) $P^2=P$، یعنی $P$ یك تصویر است.

(پ) $\frac{n(n-1)}{2}=$ رتبهٔ $(P)$؛ $\frac{n(n+1)}{2}=$ پوچی $(P)$.

(ت) اگر $U$ عملگری‌خطی‌روی $V$ باشد، معادلهٔ $(U^{\dagger}f)(\alpha, \beta)=f(U\alpha, U\beta)$ یك عملگر خطی $U^{\dagger}$ روی $L(V, V, F)$ تعریف می‌کند.

(ث) به‌ازای هرعملگر خطی $U$، تصویر $P$ با $U^{\dagger}$ جابجا می‌شود.

۶. نظیر تمرین ۱۱ دربخش ۲.۱۰، حکمی را برای فرمهای دوخطی متقارن‌کج ناتبهگون ثابت کنید.

۷. فرض کنید $f$ فرمی دوخطی روی یک فضای برداری $V$ باشد. فرض کنید $L_f$ و $R_f$ نگاشتهای از $V$ در $V^*$ وابسته به $f$، داده شده در بخش ۱.۱۰ باشند. ثابت کنید $f$ متقارن کج است اگر وتنها اگر $L_f = -R_f$.

۸. نظیر تمرین ۱۷ دربخش ۲.۱۰، حکمی را برای فرمهای متقارن‌کج ثابت کنید.

۹. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی باشد و $L_1$ و $L_2$ تابعکهایی خطی روی $V$ باشند. نشان‌دهید که معادلهٔ

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha)$$

فرم دوخطی متقارن‌کجی روی $V$ تعریف می‌کند. نشان‌دهید که $f = 0$ اگر وتنها اگر $L_1$ و $L_2$ وابستهٔ خطی باشند.

۱۰. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی از اعداد مختلط و $f$ فرم دوخطی متقارن‌کجی روی $V$ باشد. نشان‌دهید $f$ دارای رتبهٔ ۲ است اگر وتنها اگر تابعکهای خطی مستقل خطی $L_1$ و $L_2$ روی $V$ وجود داشته باشندکه

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۱۱. فرض کنید $f$ فرم دوخطی متقارن‌کجی روی $R^3$ باشد. ثابت کنید تابعکهایی خطی چون $L_1$ و $L_2$ وجود دارند که

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۱۲. فرض کنید $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی زیرهیأتی از اعداد مختلط و $f$ و $g$ دوفرم دوخطی متقارن‌کجی روی $V$ باشند. نشان دهید عملگر خطی معکوس‌پذیری چون $T$ روی $V$ وجود دارد که به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$، $f(T\alpha, T\beta) = g(\alpha, \beta)$ اگر وتنها اگر $f$ و $g$ رتبهٔ مساوی داشته باشند.

۱۳. نشان‌دهید که نتیجهٔ تمرین ۱۲ برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری مختلط معتبر است ولی برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی معتبر نیست.

## ۴.۱۰. گروههای حافظ فرمهای دوخطی

گیریم $f$ فرمی دوخطی روی فضای برداری $V$ و $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد. گوییم $T$ فرم $f$ را **حفظ می‌کند**، هرگاه به‌ازای‌هر $\alpha$ و $\beta$ در $V$، $f(T\alpha, T\beta)=f(\alpha, \beta)$. به‌ازای‌هر $T$ و $f$ بسادگی دیده‌می‌شودکه تابع $g$ تعریف‌شده‌توسط $g(\alpha, \beta)=f(T\alpha, T\beta)$ فرمی دوخطی روی $V$ است. اینکه بگوییم $T$، $f$ را حفظ می‌کند چیزی جزاینکه بگوییم $g=f$ نیست. عملگر همانی، هرفرم دوخطی را حفظ می‌کند. اگر $S$ و $T$ عملگرهایی خطی باشند که $f$ را حفظ کنند حاصل‌ضرب $ST$ نیز $f$ را حفظ می‌کند؛ زیرا $f(ST\alpha, ST\beta)=f(T\alpha, T\beta)=f(\alpha, \beta)$. به‌بیان دیگر، دستهٔ عملگرهای خطی‌که فرم دوخطی مفروضی را حفظ می‌کنند، تحت‌تشکیل حاصل‌ضربها (ی عملگرها)، بسته‌است. درحالت عمومی، دربارهٔ این دسته از عملگرها چیز بیشتری نمی‌توان گفت؛ اما، اگر $f$ ناتبهگون باشد، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

**قضیهٔ ۷.** گیریم $f$ فرم دوخطی ناتبهگونی روی یك فضای برداری بعد متناهی $V$ باشد. مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی روی $V$ که $f$ را حفظ می‌کنند، تحت عمل ترکیب، یك گروه است.

اثبات. گیریم $G$ مجموعهٔ عملگرهایی خطی باشدکه $f$ را حفظ می‌کنند. مشاهده کردیم که عملگرهمانی در $G$ قراردارد، و درصورتی‌که $S$ و $T$ در $G$ باشند، ترکیب $ST$ نیز در $G$ است. بنابراین فرض‌که $f$ ناتبهگون است، ثابت خواهیم‌کردکه هر عملگر $T$ در $G$ معکوس‌پذیر است و $T^{-1}$ نیز در $G$ قرار دارد. فرض‌کنیم $T$ فرم $f$ را حفظ‌کند. گیریم $\alpha$ برداری درفضای پوچ $T$ باشد. دراین‌صورت به‌ازای هر $\beta$ در $V$ داریم

$$f(\alpha, \beta)=f(T\alpha, T\beta)=f(0, T\beta)=0.$$

چون $f$ ناتبهگون است، پس $\alpha=0$. درنتیجه $T$ معکوس‌پذیر است. واضح است که $T^{-1}$ نیز $f$ را حفظ می‌کند؛ زیرا

$$f(T^{-1}\alpha, T^{-1}\beta)=f(TT^{-1}\alpha, TT^{-1}\beta)=f(\alpha, \beta). \square$$

اگر $f$ فرم دوخطی ناتبهگونی روی فضای بعد متناهی $V$ باشد، آنگاه هر پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ برای $V$ گروهی از ماتریسهای «حافظ» $f$ را تعیین می‌کند. مجموعهٔ همهٔ‌ماتریسهای $[T]_{\mathcal{B}}$ که درآن $T$ یك عملگر خطی حافظ $f$ است، تحت ضرب ماتریسی یك گروه‌خواهد بود. برای این گروه از ماتریسها، توصیف دیگری به‌صورت زیرهم وجود دارد. گیریم $A=[f]_{\mathcal{B}}$، بنابراین اگر $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی از $V$ بترتیب با ماتریسهای مختصات $X$ و $Y$ نسبت به $\mathcal{B}$ باشند، خواهیم داشت

$$f(\alpha, \beta)=X^tAY.$$

گیریم $T$ عملگری خطی روی $V$ باشد، و $M=[T]_{\mathcal{B}}$. دراین‌صورت

$$f(T\alpha, T\beta) = (MX)^t A(MY)$$
$$= X^t(M^t AM)Y$$

بنابراین، $T$ فرم $f$ را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر $M^t AM = A$. دراین‌صورت، قضیهٔ ۷ به‌زبان ماتریسی مطلب زیر را بیان می‌کند: اگر $A$ ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری باشد، مجموعهٔ همه ماتریسهای $n \times n$ چون $M$، باشرط $M^t AM = A$ تحت ضرب ماتریسی یك گروه است. اگر $A = [f]_{\mathfrak{B}}$، آنگاه $M$ دراین گروه از ماتریسها است اگــر و تنها اگر $M = [T]_{\mathfrak{B}}$ و $T$ عملگری خطی باشدکه $f$ را حفظ می‌کند.

قبل‌از پرداختن به‌چند مثال، به‌ذکر نکته‌ای دیگر می‌پردازیم. فرض کنیم $f$ فــرم دوخطی متقارنی باشد. عملگر خطی $T$ فرم $f$ را حفظ می‌کند اگــر و تنها اگر $T$ فــرم درجهٔ دوم

$$q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$$

وابسته به $f$ را حفظ‌کند. اگر $T$ فرم $f$ را حفظ کند مطمئناً به‌ازای هر $\alpha$ در $V$ داریم

$$q(T\alpha) = f(T\alpha, T\alpha) = f(\alpha, \alpha) = q(\alpha).$$

به‌عکس، چون $f$ متقارن است، اتحاد قطبی

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4} q(\alpha - \beta)$$

نشان می‌دهد $T$ وقتی $f$ را حفظ می‌کند که به‌ازای‌هر $\gamma$ در $V$، $q(T\gamma) = q(\gamma)$. (دراینجا فرض براین است که هیأت اسکالری زیرهیأتی از اعداد مختلط است.)

**مثال ۶.** گیریم $V$ فضای $R^n$ یا فضای $C^n$ باشد. فرض می‌کنیم $f$ فرم دوخطی

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

باشد که در آن $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$. گــروه حافظ $f$ **گروه متعامد** (حقیقی یا مختلط) $n$بعدی نامیده می‌شود. نام «گروه متعامد» بیشتر به‌گروه وابستهٔ ماتریسهای درپایهٔ مرتب استانده اطلاق می‌شود. چون ماتریس $f$ درپایهٔ استانده همان $I$ است، این‌گروه متشکل‌از ماتریسهای $M$ است کــه در $M^t M = I$ صدق مــی‌کنند. چنین ماتریس $M$ به‌یك **ماتریس متعامد** (حقیقی یا مختلط) $n \times n$ مــوسوم است. این دوگروه متعامد $n \times n$، غالباً به‌صورت $O(n, R)$ و $O(n, C)$ نمایش داده می‌شوند. بدیهی‌است گروه متعامد، همچنین گروهی است‌که فرم درجهٔ دوم

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

را حفظ می‌کند.

**مثال ۰۷** گیریم $f$ فرم دوخطی متقارن روی $R^n$ با فرم درجهٔ دوم

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2$$

باشد. آنگاه $f$ ناتبهگون و دارای نشان $2p-n$ است. گروه ماتریسهای حافظ فرمی ازاین نوع یك **گروه شبه متعامد** نامیده می‌شود. وقتی که $p=n$، گروه متعامد $O(n, R)$ به‌عنوان نوع خاصی از گروههای شبه متعامدبه‌دست می‌آید. به‌ازای‌هریك از $n+1$ مقدار $p=0, 1, 2, \cdots, n$ فرمهای دوخطی مختلفی‌چون $f$ به‌دست می‌آوریم؛ اما، به‌ازای $p=k$ و $p=n-k$، فرمها قرینهٔ یکدیگراند وازاین‌رو دارای گروههای وابستهٔ مساوی هستند. پس، وقتی که $n$ فرد باشد، $(n+1)/2$ گروه شبه متعامد از ماتریسهای $n \times n$، وهنگامی که $n$ زوج‌باشد، $(n+2)/2$ ازچنین گروههایی حاصل می‌شوند.

**قضیهٔ ۰۸** گیریم $V$ یك فضای برداری $n$ بعدی برروی هیأت اعداد مختلط و $f$ فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی $V$ باشد. دراین صورت گروه حافظ $f$ باگروه متعامد مختلط $O(n, C)$ یکریخت است.

اثبات. بدیهی است که منظورمان از یك یکریختی بین دوگروه، یك تناظر یك‌به‌یك بین اعضای آنهاست که عمل گروه را «حفظ می‌کند». گیریم $G$ گروه عملگرهای خطی روی $V$ باشدکه فرم دوخطی $f$ را حفظ می‌کنند. چون $f$ هم‌متقارن و هم‌ناتبهگون است قضیهٔ ۴ حاکی است که پایهٔ مرتبی چون$\mathcal{B}$ برای $V$ وجود داردکه‌درآن $f$ توسط ماتریس همانی $n \times n$ نمایش‌داده می‌شود. بنابراین، عملگری خطی چون $T$ فرم $f$ را حفظ‌می‌کند اگر و تنها اگر ماتریس آن درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ ماتریس متعامد مختلطی باشد. ازاین‌رو،

$$T \to [T]_{\mathcal{B}}$$

یك یکریختی از $G$ بروی $O(n, C)$ است. □

**قضیهٔ ۰۹** گیریم $V$ یك فضای برداری $n$ بعدی برروی هیأت اعداد حقیقی و $f$ فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی $V$ باشد. دراین‌صورت‌گروه حافظ $f$ باگروه $n \times n$ شبه متعامدی یکریخت است.

اثبات. اثبات قضیهٔ ۸ را با استفاده از قضیهٔ ۵ به‌جای قضیهٔ ۴ تکرار کنید. □

**مثال ۰۸** گیریم $f$ فرم دوخطی متقارن روی $R^4$ با فرم درجهٔ دوم

$$q(x, y, z, t) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

باشد. عملگری خطی چون$T$ روی $R^4$ که این فرم دوخطی (یا درجهٔ دوم) خاص راحفظ می‌کند،یك **تبدیل لورنتس** نامیده می‌شود وگروه حافظ $f$ به **گروه لورنتس** موسوم‌است. می‌خواهیم یکی از روشهای تشریح چند تبدیل لورنتس را به‌دست می‌دهیم.

گیریم$H$ فضای‌برداری حقیقی همهٔ ماتریسهای‌مختلط $A$ی $2 \times 2$ که هرمیتی‌هستند،

$A = A^*$، باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد که

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یك یکریختی $\Phi$ از $R^4$ بروی فضای $H$ تعریف می‌کند. تحت این یکریختی، فرم درجهٔ دوم $q$ بروی تابع دترمینان برده می‌شود؛ یعنی

$$q(x, y, z, t) = \det \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یا

$$q(\alpha) = \det \Phi(\alpha).$$

این مطلب اشاره براین دارد که بامطالعهٔ عملگرهای خطی روی $H$ که دترمینانها را حفظ می‌کنند می‌توان تبدیلهای لورنتس روی $R^4$ را بررسی کرد.

$M$ را ماتریس $2 \times 2$ مختلط دلخواهی می‌گیریم و برای هر ماتریس هرمیتی $A$ تعریف می‌کنیم:

$$U_M(A) = MAM^*.$$

حال $MAM^*$ نیز هرمیتی است. ازاین مطلب بآسانی دیده می‌شود که $U_M$ یك عملگر خطی (حقیقی) روی $H$ است. می‌خواهیم بدانیم چه‌وقت این مطلب درست است که $U_M$ دترمینانها را «حفظ می‌کند»؛ یعنی به‌ازای هر $A$ در $H$، $\det [U_M(A)] = \det A$. چون دترمینان $M^*$ برابر مزدوج مختلط دترمینان $M$ است، می‌بینیم که

$$\det [U_M(A)] = |\det M|^2 \det A.$$

پس $U_M$ دترمینانها را درست وقتی حفظ می‌کند که $\det M$ دارای قدرمطلق ۱ باشد.

لذا اکنون ماتریس مختلط $2 \times 2$یی چون $M$ را که $|\det M| = 1$ انتخاب می‌کنیم. دراین‌صورت $U_M$ یك عملگر خطی روی $H$ است که دترمینانها را حفظ می‌کند. حال

$$T_M = \Phi^{-1} U_M \Phi$$

را تعریف می‌کنیم. چون $\Phi$ یك یکریختی است $T_M$ هم عملگری خطی روی $R^4$ است. همچنین، $T_M$ یك تبدیل لورنتس است؛ زیرا

$$\begin{aligned} q(T_M\alpha) &= q(\Phi^{-1} U_M \Phi\alpha) \\ &= \det (\Phi\Phi^{-1} U_M \Phi\alpha) \\ &= \det (U_M \Phi\alpha) \end{aligned}$$

www.riazisara.ir

$$= \det(\Phi\alpha)$$
$$= q(\alpha)$$

وازاین‌رو، $T_M$ فرم درجهٔ دوم $q$ را حفظ می‌کند.

با به‌کارگیری ماتریسهای $2 \times 2$ ویژهٔ $M$ می‌توان روش بالا را برای محاسبهٔ تبدیلهای لورنتس ویژه مورد استفاده قرارداد. دو نکته هست که دراینجا می‌توان به‌ذکرآنها پرداخت؛ بررسی آنهاهم مشکل نیست.

(۱) اگر $M_1$ و $M_2$ ماتریسهای $2 \times 2$ معکوس‌پذیری با درایه‌های مختلط باشند، آنگاه $U_{M_1} = U_{M_2}$ اگر وتنها اگر $M_2$ مضربی اسکالری از $M_1$ باشد. پس، همهٔ تبدیلهای لورنتس نمایش داده شده درفوق از ماتریسهای تك مدولی $M$، یعنی از ماتریسهای $M$ باشرط $\det M = 1$، قابل‌حصول هستند. اگر $M_1$ و $M_2$ ماتریسهایی تك‌مدولی باشندکه $M_1 \neq M_2$ و $M_1 \neq -M_2$، آنگاه $T_{M_1} \neq T_{M_2}$.

(۲) همهٔ تبدیلهای لورنتس با روش بالا قابل حصول نیستند.

## تمرین

۱. فرض‌کنید $M$ عنصری ازگروه متعامد مختلط $O(n, C)$ باشد. نشان‌دهیدکه $M^t$، $\overline{M}$، و $M^* = \overline{M}^t$ نیز به $O(n, C)$ تعلق دارند.

۲. فرض‌کنید $M$ متعلق به $O(n, C)$ و $M'$ متشابه با $M$ باشد. آیا $M'$ نیز به $O(n, C)$ تعلق دارد؟

۳. فرض‌کنید

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} M_{jk} x_k$$

که درآن $M$ عنصری از $O(n, C)$ است. نشان دهیدکه

$$\sum_j y_j^2 = \sum_j x_j^2 .$$

۴. فرض کنید $M$ ماتریسی $n \times n$ برروی $C$ باستونهای $M_1$، $M_2$، ...، $M_n$ باشد. نشان‌دهیدکه $M$ متعلق به $O(n, C)$ است اگر وتنها اگر

$$M_j^t M_k = \delta_{jk} .$$

۵. فرض‌کنید $X$ يك ماتريس $n \times 1$ برروی $C$ باشد. تحت‌چه‌شرایطی $O(n, C)$ شامل ماتریسی چون $M$ است که ستون اولش $X$ باشد؟

۶. ماتریسی در $O(3, C)$ بیابید که سطر اولش $(2i, 2i, 3)$ باشد.

۷. فرض کنید $V$ فضای همهٔ ماتریسهای $n \times 1$ برروی $C$ و $f$ فرم دوخطی روی $V$ دادهشده توسط $f(X, Y) = X^t Y$ باشد. فرض کنید $M$ متعلق به $O(n, C)$ باشد. ماتریس $f$ درپایهٔ $V$ متشکل از ستونهای $M_1$، $M_2$، ...، $M_n$ از $M$ چیست؟

۸. گیریم $X$ یك ماتریس $n \times 1$ برروی $C$ بـا شرط $X^t X = 1$؛ و $I_j$ برابر $j$امین ستون ماتریس همانی باشد. نشان دهید ماتریسی چـون $M$ در $O(n, C)$ وجود دارد کـه $MX = I_j$. اگر $X$ دارای درایههای حقیقی باشد، نشاندهید که یك $M$ در $O(n, C)$ وجود دارد بااین خاصیت که $MX = I_j$.

۹. فرض کنید $V$ فضای همهٔ ماتریسهای $n \times 1$ برروی $C$، $A$ یك ماتریس $n \times n$ برروی $C$، و $f$ فرم دوخطی روی $V$ داده شده توسط $f(X, Y) = X^t AY$ باشد. نشاندهید که $f$ تحت $O(n, C)$ پایاست، یعنی بهازایهر $X$ و $Y$ در $V$ وهر $M$ در $O(n, C)$، $f(MX, MY) = f(X, Y)$ اگر وتنها اگر $A$ باهرعنصر $O(n, C)$ جابجا شود.

۱۰. فرض کنید $S$ مجموعهای دلخواه ازماتریسهای $n \times n$ برروی $C$، و $S'$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی $C$ باشد که باهرعنصر $S$ جابجا میشود. نشاندهید که $S'$ یك جبر برروی $C$ است.

۱۱. فرض کنید $F$ زیرهیأتی از $C$، $V$ فضایی برداری با بعد متناهی برروی $F$، و $f$ فرم دوخطی نامنفردی روی $V$ باشد. اگـر $T$ عملگری خطی روی $V$ و حافظ $f$ باشد، ثابت کنید $\det T = \pm 1$.

۱۲. فرض کنید $F$ زیرهیأتی از $C$، $V$ فضای ماتریسهای $n \times 1$ برروی $F$، $A$ ماتـریس $n \times n$ معکـوسپذیـری بـروی $F$، و $f$ فـرم دوخطی روی $V$ داده شده تـوسط $f(X, Y) = X^t AY$ باشد. اگر $M$ ماتریسی $n \times n$ بروی $F$ باشد، نشان دهید که $M$، $f$ را حفظ می کند اگر وتنها اگر $A^{-1} M^t A = M^{-1}$.

۱۳. فرض کنید $g$ فـرم دوخطی نامنفردی روی یك فضای بـرداری بعد متناهی $V$ باشد. فرض کنید $T$ عملگرخطی معکوسپذیریروی $V$ و $f$ فرم دوخطی روی $V$ تعیینشده توسط $f(\alpha, \beta) = g(\alpha, T\beta)$ باشد. اگر $U$ عملگری خطی روی $V$ باشد، شرایطی لازم وکافی برای $U$ بیابید که $f$ را حفظ کند.

۱۴. فرض کنید $T$ عملگری خطی روی $C^2$ باشد که فـرم درجهٔ دوم $x_1^2 - x_2^2$ را حفظ می کند. نشان دهید

(الف) $\det(T) = \pm 1$

(ب) اگر $M$ ماتریس $T$ در پایهٔ استانده باشد، آنگاه $M_{22}=\pm M_{11}$، $M_{21}=\pm M_{12}$، $M_{11}^2-M_{12}^2=1$.

(پ) اگر $\det M=1$، آنگاه عدد مختلط غیرصفری چون $c$ وجود دارد که

$$M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} c+\frac{1}{c} & c-\frac{1}{c} \\ c-\frac{1}{c} & c+\frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

(ت) اگر $\det M=-1$، آنگاه عدد مختلطی چون $c$ وجود دارد که

$$M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} c+\frac{1}{c} & c-\frac{1}{c} \\ -c+\frac{1}{c} & -c-\frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

۱۵. فرض کنید $f$ فرم دوخطی روی $C^2$ تعریف شده توسط

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2))=x_1y_2-x_2y_1$$

باشد. نشان دهید

(الف) اگر $T$ عملگری خطی روی $C^2$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $\alpha$ و $\beta$ در $C^2$ داریم $f(T\alpha, T\beta)=(\det T)f(\alpha, \beta)$.

(ب) $T$، $f$ را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر $\det T=+1$.

(پ) بند (ب) دربارهٔ گروه ماتریسهای ۲ × ۲ی $M$ با شرط $M^tAM=A$ که درآن

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

چه می‌گوید؟

۱۶. فرض کنید $n$ عدد صحیحی مثبت، $I$ ماتریس همانی $n\times n$ برروی $C$، و $J$ ماتریس $2n\times 2n$ داده شده توسط

$$J=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. فرض می‌کنیم $M$ ماتریسی $۲n \times ۲n$ برروی $C$ به‌صورت

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد که درآن $A$، $B$، $C$، و $D$ ماتریسهایی $n \times n$ بر روی $C$ هستند. شرایطی لازم و کافی روی $A$، $B$، $C$، و $D$ پیدا کنید که $M^t J M = J$.

۱۷. همهٔ فرمهای دوخطی‌روی فضای ماتریسهای $n \times ۱$ برروی $R$ راکه تحت $O(n, R)$ پایا هستند، بیابید.

۱۸. همهٔ فرمهای دوخطی روی فضای ماتریسهای $n \times ۱$ برروی $C$ راکه تحت $O(n, C)$ پایا هستند پیدا کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

# پیوست

این پیوست از لحاظ منطقی به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمت اول که سه بخش اول را در بر می‌گیرد شامل مفاهیم بنیانی معینی است که در سرتاسر کتاب (درحقیقت، در تمام ریاضیات) ظاهرمی‌شوند. این قسمت بیشتر به‌منزلهٔ مقدمه‌ای است برای کتاب تا یک پیوست. اما قسمت دوم واقعاً پیوستی برای متن اصلی است.

بخش ۱ حاوی بحثی در مورد مجموعه‌ها، اجتماع، و اشتراک آنهاست. بخش ۲ مفهوم تابع و ایده‌های وابسته چون برد، دامنه، تابع معکوس، و تحدید تابعی به زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش را مورد بحث قرار می‌دهد. بخش ۳ در بارهٔ رابطه‌های هم‌ارزی بحث می‌کند. مطالب این سه بخش، خصوصاً مطالب بخشهای ۱ و ۲، به‌اختصار ارائه می‌شوند. مطالب، بیشتر به‌جهت تثبیت اصطلاحات بیان می‌شوند تا برای تشریح جزئیات. به‌معنی منطقی دقیق، این مطالب قسمتی از پیش نیازهای لازم جهت مطالعه کتاب را تشکیل می‌دهند. اما، در صورتی که خواننده در مطالعهٔ اول نتواند مفاد این ایده‌ها را به‌طور کامل جذب کند نباید دلسرد شود. البته این ایده‌ها مهم هستند، ولی خواننده‌ای که با آنها خیلی آشنا نیست، هر گاه حین مطالعهٔ متن اصلی گه‌گاه این مبحث را هم دوره کند، آسانتر می‌تواند آنها را فرا بگیرد.

بخشهای ۴ و ۵ رابطه‌های هم ارزی را در رابطه با جبر خطی مورد بررسی قرار می‌دهند. بخش ۴ شامل بحث مختصری در بارهٔ فضاهای خارج قسمت است. این بخش‌را می‌توان در هر زمانی پس از مطالعهٔ دو یا سه فصل اول کتاب خواند. بخش ۵ به چند رابطهٔ هم‌ارزی که در کتاب پیش می‌آیند نظری می‌افکند، با این قصد که نشان دهد برخی از نتایج حاصل را چگونه می‌توان از دیدگاه رابطه‌های هم‌ارزی تفسیر کرد. بخش ۶، اصل انتخاب و نتایجش را در مورد جبر خطی تشریح می‌کند.

## پ۰۱. مجموعه

هرچند ما واژهٔ «مجموعه» را ترجیح می‌دهیم ولی «رده»، «دسته» و «خانواده» را هم با همان مفهوم به کار خواهیم برد. اگر $S$ یك مجموعه، و $x$ شیئی در مجموعهٔ $S$ باشد، خواهیم گفت که $x$ یك **عنصر** $S$ است، یا $x$ **متعلق** به $S$ است و یا به‌طور ساده اینکه $x$ در $S$ است. اگر $S$ تنها دارای تعدادی متناهی عنصر چون $x_1، \cdots، x_n$ باشد، غالباً $S$ را با نشان دادن عناصرش در بین دو ابرو توصیف می‌کنیم:

$$S=\{x_1, \cdots, x_n\}.$$

پس، مجموعهٔ $S$ متشکل از اعداد صحیح مثبت از ۱ تا ۵ عبارت است از

$$S=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}.$$

اگر $S$ و $T$ دو مجموعه باشند، گوییم $S$ یك **زیرمجموعهٔ** $T$ است یا $S$ **مشمول در** $T$ است هرگاه هر عنصر $S$ عنصری از $T$ نیز باشد. هر مجموعهٔ $S$ زیر مجموعه‌ای از خودش است. اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از $T$ باشد، اما $S$ و $T$ یکی نباشند، $S$ را یك **زیرمجموعهٔ سرهٔ** $T$ می‌نامیم. به بیان دیگر، $S$ زیر مجموعهٔ سره‌ای از $T$ است به‌این شرط که $S$ مشمول در $T$ باشد ولی $T$ مشمول در $S$ نباشد.

اگر $S$ و $T$ دو مجموعه باشند. **اجتماع** $S$ **و** $T$ عبارت است از مجموعهٔ $S\bigcup T$ متشکل ازهمهٔ اشیائی چون $x$ که عنصر $S$ یا عنصر $T$ باشند. **اشتراك** $S$ **و** $T$ عبارت‌است ازمجموعهٔ $S\bigcap T$ متشکل از همهٔ $x$هایی که هم عنصر $S$ و هم عنصر $T$ باشند. به‌ازای هر دو مجموعهٔ مفروض $S$ و $T$، اشتراك $S\bigcap T$ زیرمجموعه‌ای است از اجتماع $S\bigcup T$. این امر باید به‌روشن شدن مورد استفادهٔ واژهٔ «یا» که در این‌کتاب رایج است کمك کند. وقتی می‌گوییم $x$ یا در $S$ است یا در $T$، این امکان را که $x$ هم در $S$ و هم در $T$ باشد رفع نمی‌کنیم.

برای اینکه اشتراك $S$ و $T$ همواره مجموعه باشد، لازم است **مجموعهٔ تهی**، یعنی، مجموعه‌ای با هیچ عنصر هم معرفی شود. پس $S\bigcap T$ مجموعهٔ تهی است اگر و تنها اگر $S$ و $T$ هیچ عنصری در اشتراك نداشته باشند.

غالباً نیازمندیم که اجتماع یا اشتراك مجموعه‌های متعددی را بررسی کنیم. اگر $S_1، \cdots، S_n$ مجموعه‌هایی باشند، **اجتماع** آنها عبارت است از مجموعهٔ $\bigcup_{j=1}^{n} S_j$ متشکل از همهٔ $x$ هایی که دست‌کم عنصر یکی از مجموعه‌های $S_1، \cdots، S_n$ باشند. **اشتراك** آنها عبارت است از مجموعهٔ $\bigcap_{j=1}^{n} S_j$ متشکل‌ازهمهٔ$x$هایی که‌عنصر همهٔمجموعه‌های $S_1، \cdots، S_n$ باشند. درچند مورد، اجتماع یا اشتراك دسته‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها را نیز مورد بحث قرار خواهیم داد. اینکه چنین اجتماع یا اشتراکی چگونه تعریف می‌شود باید واضح باشد. مثال زیر، این تعاریف را روشن می‌سازد و نمادهایی را برای آنها ارائه می‌نماید.

**مثال ۰۱** گیریم $R$ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی (خط حقیقی) را نشان دهد. اگر $t$ در $R$ باشد، به $t$ زیر مجموعه‌ای چون $S_t$ از $R$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، وابسته می‌سازیم: $S_t$ متشکل است از همهٔ اعداد حقیقی چون $x$ که از $t$ کمتر نباشد.

(الف) $S_{t_1} \cup S_{t_2} = S_t$ که در آن $t$ کوچکترین $t_1$ و $t_2$ است.

(ب) $S_{t_1} \cap S_{t_2} = S_t$ که در آن $t$ بزرگترین $t_1$ و $t_2$ است.

(پ) گیریم $I$ فاصلهٔ یکه، یعنی مجموعهٔ همهٔ $t$ های در $R$ با شرط $0 \leqslant t \leqslant 1$ باشد. آنگاه

$$\bigcup_{t \text{ در } I} S_t = S_0$$

$$\bigcap_{t \text{ در } I} S_t = S_1$$

## پ.۲. تابع

یك **تابع** متشکل است از:

(۱) مجموعه‌ای چون $X$ که دامنهٔ تابع نامیده می‌شود؛

(۲) مجموعه‌ای چون $Y$ که همدامنهٔ تابع نامیده می‌شود؛

(۳) قاعده‌ای (یا تناظری) چون $f$ که به‌هرعنصر $x$ از $X$ تك عنصری از $Y$ چون $f(x)$ را وابسته می‌سازد.

اگر $(X, Y, f)$ یك تابع باشد، $f$ را **تابعی از $X$ در $Y$** هم می گوییم. گفتن این مطلب حاکی ازکمی عدم دقت است چراکه این $f$ نیست که تابع است؛ $f$ قاعدهٔ تابع است. با این وجود استفاده از نماد واحد برای تابع و قاعده‌اش محاوره دربارهٔ توابع‌را بسیار آسان می کند. پس، اگر بگوییم که $f$ تابعی از $X$ در $Y$ است، یا $X$ دامنهٔ $f$ است یا اینکه $Y$ همدامنهٔ $f$ است ـ همه حاکی از این هستندکه طبق تعریف فوق $(X, Y, f)$ یك تابع است. واژه‌های متعدد دیگری هم وجود دارندکه معمولاً به‌جای واژهٔ «تابع» به کار می‌روند. برخی از اینها عبارتند از «تبدیل»، «عملگر»، و «نگاشت». این واژه‌ها در زمینه‌هایی به کار می‌روندکه در رساندن نقش ایفا شده توسط تابعی خاص به‌نظر الهام‌بخش‌تر باشند.

اگر $f$ تابعی از $X$ در $Y$ باشد، **برد** (یا **نگارهٔ**) $f$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ $f(x)$های با شرط $x$ در $X$. به بیان دیگر، برد $f$ متشکل است از همهٔ عناصر $y$ در $Y$ با این شرط که $x$ ی در $X$ باشدکه $y = f(x)$. هرگاه برد $f$ تمام $Y$ باشد، می گوییم $f$ **تابعی از $X$ بروی $Y$** است یا به‌طور ساده $f$ **پوشاست**. غالباً برد $f$ با $f(X)$ نشان داده می‌شود.

**مثال ۲.** (الف) فرض کنیم $X$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $X=Y$. گیریم $f$ تابعی از $X$ در $Y$ تعریف شده با $f(x)=x^{2}$ باشد. برد $f$ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است و بدین سان $f$ پوشا نیست.

(ب) گیریم $X$ صفحهٔ اقلیدسی باشد و $X=Y$. فرض کنیم $f$ به‌صورت زیر تعریف شود: اگر $P$ نقطه‌ای از صفحه باشد، آنگاه $f(P)$ عبارت است از نقطهٔ حاصل از دوران $P$ به‌اندازهٔ $90^{\circ}$ (حول مبدأ درجهت عکس عقربه‌های ساعت). برد $f$ همهٔ $Y$ یعنی تمام صفحه است و لذا $f$ پوشاست.

(پ) دوباره $X$ را صفحهٔ اقلیدسی می‌گیریم. با روش معمول در هندسهٔ تحلیلی، با استفاده از دو خط عمود برهم دستگاه مختصاتی در $X$ می‌سازیم تا نقاط $X$ را با جفتهای مرتب $(x_{1}, x_{2})$ از اعداد حقیقی یکی بگیریم. فرض کنیم $Y$ محور $x_{1}$ها یعنی همهٔ نقاط $(x_{1}, x_{2})$ با $x_{2}=0$ باشد. اگر $P$ نقطه‌ای از $X$ باشد، $f(P)$ را نقطهٔ حاصل از تصویر $P$ بروی محور $x_{1}$ها به موازات محور $x_{2}$ ها می‌گیریم. به بیان دیگر، $f((x_{1}, x_{2}))=(x_{1}, 0)$. در این صورت برد $f$ همهٔ $Y$ است و لذا $f$ پوشاست.

(ت) گیریم $X$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و $Y$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد. تابع $f$ از $X$ در $Y$ را با ضابطهٔ $f(x)=e^{x}$ تعریف می‌کنیم. آنگاه $f$ تابعی است از $X$ بروی $Y$.

(ث) فرض کنیم $X$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و $Y$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. گیریم $f$ تابع لگاریتم طبیعی، یعنی تابع تعریف‌شده توسط $f(x)=\log x=\ln x$ باشد. مجدداً $f$ پوشاست، یعنی هر عدد حقیقی لگاریتم طبیعی عددی مثبت است.

فرض کنیم $X$، $Y$، و $Z$ سه مجموعه، $f$ تابعی از $X$ در $Y$، و $g$ تابعی از $Y$ در $Z$ باشد. وابسته به $f$ و $g$ تابعی چون $g\circ f$ از $X$ در $Z$ هست که به **ترکیب** $g$ **و** $f$ معروف است. این تابع طبق

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

تعریف می‌شود. به عنوان مثالی ساده، گیریم $X=Y=Z$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشند. فرض کنیم $f$، $g$، $h$ سه تابع از $X$ در $X$ باشند که با ضابطه‌های

$$f(x)=x^{2},\ g(x)=e^{x},\ h(x)=e^{x^{2}}$$

تعریف می‌شوند. دراین‌صورت $h=g\circ f$. ترکیب $g\circ f$ غالباً به‌طورساده با $gf$ نمایش داده می‌شود؛ اما، چنانکه مثال سادهٔ بالا نشان می‌دهد، گاهی ممکن است این طرز نمایش گمراه کننده باشد.

یکی از سؤالهای جالب، سؤال زیر است: فرض کنیم $f$ تابعی از $X$ در $Y$ باشد. چه‌وقت تابعی چون $g$ از $Y$ در $X$ وجود دارد که به‌ازای هر $x$ در $X$، $g(f(x))=x$؟ اگر $I$ **تابع همانی** روی $X$، یعنی تابع از $X$ در $X$ تعریف شده توسط $I(x)=x$ را نمایش

www.riazisara.ir

دهد، سؤال این است: چه وقت تابعی چون $g$ از $Y$ در $X$ وجود دارد که $g\circ f=I$؟ به‌اجمال، تابعی‌چون $g$ را می‌خواهیم که «هرعنصر $Y$ را به‌جای اولش پس بفرستد». برای اینکه این تابع $g$ وجود داشته باشد، مسلماً $f$ باید یك به یك باشد، یعنی $f$ باید دارای این خاصیت باشد که اگر $x_1\neq x_2$ آنگاه $f(x_1)\neq f(x_2)$. اگر $f$ یك به‌یك باشد،این تابع $g$ مسلماً وجود دارد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود: گیریم $y$ عنصری از $Y$ باشد. اگر $y$ در برد $f$ باشد،آنگاه عنصری چون $x$ در $X$ وجود دارد که $y=f(x)$؛ و چون $f$ یك به‌یك است چنین $x$ی یکتاست. تعریف می‌کنیم $g(y)=x$. اما، اگر $y$ در برد $f$ نباشد، $g(y)$ را عنصر دلخواهی از $X$ تعریف می‌کنیم. واضح است که در این صورت $g\circ f=I$.

فرض‌کنیم $f$ تابعی از $X$ در $Y$ باشد. گوییم $f$ **معکوس‌پذیر** است هرگاه تابعی چون $g$ از $Y$ در $X$ وجود داشته باشد که

(۱) $g\circ f$ تابع همانی روی $X$ باشد،

(۲) $f\circ g$ تابع همانی روی $Y$ باشد.

هم اکنون دیدیم که اگر $g$یی وجود داشته باشد که در (۱) صدق کند،آنگاه $f$ یك به یك است. به‌طور مشابه، می‌توان دید که اگر $g$یی وجود داشته باشد که در (۲) صدق کند،برد $f$ همهٔ $Y$ است. یعنی $f$ پوشاست. پس، اگر $f$ معکوس پذیر باشد، $f$ یك به‌یك و پوشاست. بعکس، اگر $f$ یك به‌یك و پوشا باشد، تابعی چون $g$ از $Y$ در $X$ وجود دارد که در (۱) و (۲) صدق می‌کند. بعلاوه، این $g$ یکتاست. این تابع، تابعی از $Y$ در $X$ است که با قاعدهٔ زیر تعریف می‌شود: اگر $y$ در $Y$ باشد،آنگاه $g(y)$ همان عنصر و تنها عنصر چون $x$ در $X$ است که به‌ازای آن $y=f(x)$.

اگر $f$ معکوس‌پذیر (یك به‌یك و پوشا) باشد، **معکوس** $f$ یکتا تابع $f^{-1}$ از $Y$ در $X$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱′) به‌ازای هر $x$ در $X$، $f^{-1}(f(x))=x$،

(۲′) به‌ازای هر $y$ در $Y$، $f(f^{-1}(y))=y$.

**مثال ۳.** توابع در مثال ۲ را مجدداً بررسی می‌کنیم.

(الف) اگر $X=Y$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $f(x)=x^2$، آنگاه $f$ معکوس‌پذیر نیست. زیرا $f$ نه یك به‌یك است و نه پوشا.

(ب) اگر $X=Y$ صفحهٔ اقلیدسی و $f$ «دوران به‌اندازهٔ $90^\circ$» باشد،آنگاه $f$ هم یك به یك و هم پوشاست. تابع معکوس $f^{-1}$ «دوران به‌اندازهٔ $-90^\circ$» یا «دوران به‌اندازهٔ $270^\circ$» است.

(پ) اگر $X$ صفحهٔ اقلیدسی، $Y$ محور $x_1$، و $f((x_1, x_2))=(x_1, 0)$ باشد، آنگاه $f$ معکوس پذیر نیست. زیرا، اگرچه $f$ پوشاست اما یك به‌یك نیست.

(ت) اگر $X$ مجموعهٔ اعداد حقیقی، $Y$ مجموعهٔ‌اعدادحقیقی مثبت، و $f(x)=e^x$

باشد، آنگاه $f$ معکوس‌پذیر است. تابع $f^{-1}$ همان تابع لگاریتم طبیعی است که درقسمت (ث) آمد: $\log e^x = x$، $e^{\log y} = y$.

( ث ) معکوس تابع لگاریتم طبیعی همان تابع نمایی در قسمت (ت) است.

گیریم $f$ تابعی از $X$ در $Y$ و $f_0$ تابعی از $X_0$ در $Y_0$ باشد. $f_0$ را یك **تحدید** (یا یك تحدید $f$ به $X_0$) نامیم، هرگاه

(۱) $X_0$ زیر مجموعه‌ای از $X$ باشد،

(۲) به‌ازای هر $x$ در $X_0$، $f_0(x) = f(x)$.

بدیهی است وقتی که $f_0$ یك تحدید $f$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $Y_0$ زیر مجموعه‌ای است از $Y$. نام «تحدید» از این امر ناشی می‌شود که $f$ و $f_0$ دارای یك قاعده هستند و عمدتاً بدین لحاظ فرق دارند که دامنهٔ تعریف قاعده را به‌زیرمجموعهٔ $X_0$ از $X$ محدود می‌کنیم.

اگر تابع $f$ و زیر مجموعهٔ دلخواهی چون $X_0$ از $X$ به‌ما داده شود، برای ساختن یك تحدید $f$ بــه $X_0$ روش ساده‌ای وجود دارد. تابعی چون $f_0$ از $X_0$ در $Y$ را بنا بر $f_0(x) = f(x)$، به‌ازای هر $x$ در $X_0$، تعریف می‌کنیم. ممکن است تعجب‌آور باشد که چرا این تابع را تحدید[1] $f$ به $X_0$ نامیده‌ایم. دلیل این امر این است که در بحث مربوط به‌تحدیدهای $f$، همانند تغییر دامنهٔ $X$ خواهان آزادی تغییر همدامنهٔ $Y$ نیز هستیم.

**مثال ۴.** (الف) گیریم $X$ مجموعـهٔ اعداد حقیقی و $f$ تابع از $X$ در $X$ تعریف‌شده توسط $f(x) = x^2$ باشد. در این صورت $f$ تابعی معکوس‌پذیر نیست، اما اگر دامنهٔ آن را به‌اعداد حقیقی نامنفی محدود کنیم معکوس‌پــذیــر است. گیریم $X_0$ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی و $f_0$ تــابع از $X_0$ در $X_0$ تعریف شده توسط $f_0(x) = x^2$ باشد، در این صورت $f_0$ یك تحدید $f$ به $X_0$ است. حال آنکه $f$ نه یك به‌یك است و نه پوشا، درحالی که $f_0$ هم یك به‌یك است و هم پوشا. بیان اخیر چیزی جز این نیست که هرعدد نامنفی، توان دوم دقیقاً یك عدد نامنفی است. تابع معکوس $f_0^{-1}$ تابـعی از $X_0$ در $X_0$ است که با $f_0^{-1}(x) = \sqrt{x}$ تعریف می‌شود.

(ب) گیریم $X$ مجموعـهٔ اعداد حقیقی و $f$ تابع از $X$ در $X$ تعریف شده توسط $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ باشد. برد $f$ همهٔ $X$ و لذا $f$ پوشاست. تابع $f$ قطعاً یك به یك نیست، مثلاً $f(0) = f(-1)$. اما $f$ روی $X_0$، مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی، یك‌به‌یك است چرا که مشتق $f$ به‌ازای $x > 0$ مثبت است. وقتی کـه $x$ بر روی همهٔ اعداد نامنفی تغییر کند، $f(x)$ بر روی همه اعداد حقیقی $y$، با شرط $y \geqslant 1$، تغییر می‌کند. اگر $Y_0$ را مجموعهٔ همهٔ $y \geqslant 1$ و $f_0$ را تابـع از $X_0$ در $Y_0$ تعریف شده توسط $f_0(x) = f(x)$ بگیریم، آنگاه $f_0$ تابعی یك به‌یك از $X_0$ بروی $Y_0$ است. از این قرار، $f_0$ تابع معکوسی

---

۱. در مقابل یك تحدید $f$ به $X_0$.ــم.

چون $f_\circ^{-1}$ از $Y_\circ$ بروی $X_\circ$ دارد. هر فرمولی برای $f_\circ^{-1}(y)$ نسبتاً پیچیده است.

(پ) مجدداً $X$ را مجموعهٔ اعداد حقیقی و $f$ را تابع سینوس، یعنی تابع از $X$ در $X$ تعریف شده توسط $f(x)=\sin x$ می‌گیریم. برد $f$ مجموعهٔ همهٔ $y$هایی است که در $-۱\leqslant y\leqslant ۱$ صدق می‌کنند. از این رو، $f$ پوشا نیست. چون $f(x+۲\pi)=f(x)$ می‌بینیم که $f$ یك به‌یك هم نیست. اگر $X_\circ$ را فاصلهٔ $-\pi/۲\leqslant x\leqslant \pi/۲$ بگیریم، آنگاه $f$ روی $X_\circ$ یك به‌یك است. گیریم $Y_\circ$ فاصلهٔ $-۱\leqslant y\leqslant ۱$ و $f_\circ$ تابع از $X$ در $Y_\circ$ تعریف شده توسط $f_\circ(x)=\sin x$ باشد. در این صورت $f_\circ$ یك تحدید $f$ به‌فاصلهٔ $X_\circ$ است که هم یك به‌یك و هم پوشاست.

این درست طریق دیگری از بیان این واقعیت است که روی فاصلهٔ از $-\pi/۲$ تا $\pi/۲$، تابع سینوس هر مقدار بین $-۱$ و $+۱$ را تنها یك باز اختیار می‌کند. تابع $f_\circ^{-1}$، تابع سینوس معکوس است:

$$f_\circ^{-1}(y)=\sin^{-1}y=\arcsin y.$$

(ت) مثالی عمومی‌ از تحدیدی برای یك تابع، مثال زیر است. این مثال نمونهٔ خیلی بهتری است از نوع تحدیدهایی که در این کتاب به‌کار خواهیم برد تا مثالهای بندهای (ب) و (پ). مثالی که در (الف) آمد حالت خاصی است از این مثال. گیریم $X$ یك مجموعه و $f$ تابعی از $X$ درخودش باشد. گیریم $X_\circ$ زیرمجموعه‌ای از $X$ باشد. گوییم $X_\circ$ **تحت $f$ پایاست**، هرگاه به ازای هر $x$ در $X_\circ$، عنصر $f(x)$ در $X_\circ$ باشد. اگر $X_\circ$ **تحت $f$ پایا** باشد، آنگاه $f$ با تحدید دامنهٔ تعریفش به $X_\circ$، تابعی چون $f_\circ$ از $X_\circ$ در خودش را القا می‌کند. اهمیت پایائی در این است که به وسیلهٔ تحدید $f$ به $X_\circ$ می‌توان تابعی از $X_\circ$ در خودش به دست آورد و نه تابعی صرفاً از $X_\circ$ در $X$.

## پ.۳. رابطهٔ هم‌ارزی

رابطهٔ هم ارزی نوع ویژه‌ای از روابط بین‌جفت عناصر یك مجموعه است. برای تعریف یك رابطهٔ هم ارزی، ابتدا باید روشن‌کنیم که یك «رابطه» چیست.

به‌طور قطع هر تعریف رسمی از «رابطه» باید روابط آشنایی چون «$x=y$»، «$x<y$»، «$x$ مادر $y$ است»، و «$x$ مسن‌تر از $y$ است» را در برگیرد. اگر $X$ یك‌مجموعه باشد، چه چیزی باعث تعیین رابطه‌ای بین جفتهای از عناصر $X$ می‌شود؟ بدیهی است که پاسخ قاعده‌ای است برای تعیین اینکه آیا به‌ازای هر دو عنصر مفروض $x$ و $y$ از $X$، $x$ در رابطهٔ داده شده با $y$ قرار می‌گیرد یا نه. چنین قاعدهٔ $R$ را، **رابطه‌ای** (دوتایی) روی $X$ می‌نامیم. اگر بخواهیم اندکی دقیق‌تر باشیم، بهتر است به‌صورت زیر به پیش برویم. گیریم $X\times X$ مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب $(x, y)$ از عناصر $X$ را نشان دهد. رابطه‌ای دوتایی روی $X$ تابعی است چون $R$ از $X\times X$ در مجموعهٔ $\{۱, ۰\}$. به بیان دیگر، $R$ به هر جفت مرتب $(x, y)$ یا ۱ یا ۰ را اختصاص می‌دهد. منظور این است که اگر

$R(x, y) = ۱$، آنگاه $x$ در رابطهٔ مفروض با $y$ قرار می‌گیرد، و اگر $R(x, y) = ۰$، در این رابطه قرار نمی‌گیرد.

اگر $R$ رابطه‌ای دوتایی روی مجموعهٔ $X$ باشد، وقتی که $R(x, y) = ۱$، نوشتن $xRy$ به‌جای آن راحت‌تر است. رابطه‌ای دوتایی چون $R$

(۱) **انعکاسی** نامیده‌می‌شود، هرگاه به‌ازای هر $x$ در $X$، $xRx$؛

(۲) **متقارن** است، هرگاه از $xRy$ نتیجه بگیریم $yRx$؛

(۳) **متعدی** نام دارد، هرگاه از $xRy$ و $yRz$ نتیجه شود $xRz$.

یك **رابطهٔ هم‌ارزی** روی $X$ عبارت است از یك رابطهٔ دوتایی انعکاسی، متقارن، و متعدی روی $X$.

**مثال ۵.** (الف) روی هر مجموعه تساوی رابطه‌ای هم ارزی است. به بیان دیگر، اگر $xRy$ به‌معنی $x = y$ باشد، آنگاه $R$ رابطه‌ای هم ارزی است. زیرا $x = x$؛ اگر $x = y$ آنگاه $y = x$؛ و اگر $x = y$ و $y = z$ آنگاه $x = z$. رابطهٔ «$x \neq y$» متقارن است، اما نه انعکاسی است و نه متعدی.

(ب) $X$ را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌گیریم و فرض می‌کنیم $xRy$ به‌معنی $x < y$ باشد. در این صورت $R$ رابطه‌ای هم‌ارزی نیست. این رابطه متعدی است، اما نه انعکاسی است و نه متقارن، رابطهٔ «$x \leqslant y$» انعکاسی و متعدی است ولی متقارن نیست.

(پ) گیریم $E$ صفحهٔ اقلیدسی و $X$ مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع در صفحهٔ $E$ باشد. در این صورت تشابه رابطه‌ای است هم‌ارزی روی $X$، یعنی، «$T_۱ \cong T_۲$» ($T_۱$ متشابه‌به $T_۲$ است) رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع در یك صفحه است.

(ت) گیریم $X$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح:

$$\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots$$

و فرض کنیم $n$ عدد صحیح‌مثبت ثابتی باشد. رابطهٔ $R_n$ روی $X$ را چنین تعریف می‌کنیم: $xR_ny$ اگر و تنها اگر $(x - y)$ بر $n$ قابل قسمت باشد. رابطهٔ $R_n$ **همنهشتی به‌پیمانهٔ** $n$ نامیده می‌شود. وقتی که $(x - y)$ بر $n$ قابل قسمت باشد به جای $xR_ny$ معمولاً نوشته می‌شود

$x \equiv y, \mod n$ ($x$ همنهشت $y$ به‌پیمانهٔ $n$ است).

به‌ازای هرعدد صحیح مثبت $n$، همنهشتی به‌پیمانهٔ $n$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ‌اعداد صحیح است.

(ث) گیریم $X$ و $Y$ دو مجموعه و $f$ تابعی از $X$ در $Y$ باشد. رابطهٔ $R$ روی $X$ را چنین تعریف می‌کنیم: $x_۱Rx_۲$ اگر و تنها اگر $f(x_۱) = f(x_۲)$. بسادگی می‌توان نشان دادکه $R$ رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعهٔ $X$ است، چنانکه خواهیم دید، این مثال عملاً همهٔ روابط هم ارزی را در بر می‌گیرد.

فرض کنیم $R$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ $X$ باشد. اگر $x$ عنصری از $X$ باشد، فرض می‌کنیم $E(x;R)$ مجموعهٔ همهٔ عناصری مانند $y$ از $X$ را نشان دهد که $xRy$. مجموعهٔ $E(x;R)$ **ردهٔ هم ارزی** $x$ (به ازای رابطهٔ هم ارزی $R$) نامیده می‌شود. چون $R$ رابطه‌ای هم ارزی است، رده‌های هم‌ارزی خواص زیر را دارند:

(۱) همهٔ $E(x;R)$ها ناتهی هستند؛ زیرا، نظر به اینکه $xRx$، عنصر $x$ متعلق به $E(x;R)$ است.

(۲) گیریم $x$ و $y$ عناصر $X$ باشند. چون $R$ متقارن است، $y$ به $E(x;R)$ تعلق دارد اگر و تنها اگر $x$ متعلق به $E(y;R)$ باشد.

(۳) اگر $x$ و $y$ عناصر $X$ باشند، رده‌های هم‌ارزی $E(x;R)$ و $E(y;R)$ یامساوی‌اند ویا هیچ‌عنصرمشترکی ندارند. ابتدا، فرض کنیم $xRy$. گیریم $z$ عنصری از $E(x;R)$، یعنی عنصری از $X$ باشد که $xRz$. چون $R$ متقارن‌است، همچنین‌داریم $zRx$. بنا به‌فرض $xRy$ و چون $R$ متعدی‌است داریم $zRy$، پس $yRz$. این‌مطلب نشان‌می‌دهد که هر عنصر $E(x;R)$ عنصری از $E(y;R)$ نیز هست. بنابر تقارن $R$، همچنین می‌بینیم که هر عنصر $E(y;R)$ عنصری از $E(x;R)$ هم هست؛ پس $E(x;R)=E(y;R)$. حال استدلال می‌کنیم که اگر رابطهٔ $xRy$ برقرار نباشد، آنگاه $E(x;R)\bigcap E(y;R)$ تهی است. زیرا، اگر $z$ در هر دوی این رده‌های هم ارزی باشد، داریم $xRz$ و $yRz$؛ پس $xRz$ و $zRy$ و بدین سان $xRy$.

اگر $\mathscr{F}$ را خانوادهٔ رده‌های هم‌ارزی برای رابطهٔ هم‌ارزی $R$ بگیریم، می‌بینیم که (۱) هر مجموعه‌ای از خانوادهٔ $\mathscr{F}$ ناتهی است، (۲) هر عنصر $x$ از $X$ به یك و تنها یکی از مجموعه‌های خانوادهٔ $\mathscr{F}$ تعلق دارد، (۳) $xRy$، اگر و تنها اگر $x$ و $y$ هر دو متعلق به یك مجموعه از خانوادهٔ $\mathscr{F}$ باشند. به طور خلاصه، رابطهٔ هم‌ارزی $R$ مجموعهٔ $X$ را به‌اجتماع خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های (ناتهی) نامتداخل تقسیم می‌کند. سوی دیگر قضیه نیز قابل استدلال است. فرض کنیم $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های $X$ باشد که در شرایط (۱) و (۲) اخیر صدق می‌کنند. اگر بنا بر (۳) رابطه‌ای مانند $R$ را تعریف کنیم، آنگاه $R$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $X$ است و $\mathscr{F}$ خانوادهٔ رده‌های هم ارزی برای $R$.

**مثال ۶.** ببینیم رده‌های هم‌ارزی برای رابطه‌های هم‌ارزی در مثال ۵ چه هستند.

(الف) اگر $R$ رابطهٔ تساوی روی مجموعهٔ $X$ باشد ، آنگاه ردهٔ هم‌ارزی عنصر $x$ چیزی جز مجموعهٔ $\{x\}$، که تنها عنصر آن $x$ است، نیست.

(ب) اگر $X$ مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع دریك صفحه و $R$ رابطهٔ تشابه باشد، قریب تمامی آنچه که در وهلهٔ نخست می‌توان گفت این‌است که ردهٔ هم‌ارزی مثلث $T$ متشکل است ازهمهٔ مثلثهایی که‌با $T$ متشابه هستند. یکی ازوظایف‌هندسهٔ مسطحه ارائهٔ توصیفهای‌دیگری از این رده‌های هم‌ارزی است.

(پ) اگر $X$ مجموعهٔ اعداد صحیح و $R_n$ رابطهٔ «همنهشتی به‌پیمانهٔ $n$» باشد، آنگاه

دقیقاً $n$ ردهٔ هم‌ارزی داریم. هرعددصحیح $x$ به‌طوریکتا به‌صورت $x = qn + r$ قابل بیان است که در آن $q$ و $r$ اعدادی صحیح‌اند و $0 \leqslant r \leqslant n-1$. این مطلب نشان می‌دهد که هر $x$ دقیقاً با یکی از $n$ عدد صحیح ۰، ۱، ۲، . . . ، $n-1$ همنهشت به پیمانهٔ $n$ است. رده‌های هم‌ارزی عبارتند از

$$E_0 = \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \cdots\}$$

$$E_1 = \{\cdots, 1-2n, 1-n, 1+n, 1+2n, \cdots\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$E_{n-1} = \{\cdots, n-1-2n, n-1-n, n-1, n-1+n, n-1+2n, \cdots\}.$$

(ت) فرض کنیم $X$ و $Y$ دومجموعه، $f$ تابعی‌از $X$ در $Y$، و $R$ رابطه‌ای هم‌ارزی باشد که چنین‌تعریف‌می‌شود: $x_1 R x_2$ اگر وتنها اگر $f(x_1) = f(x_2)$. رده‌های‌هم‌ارزی برای $R$ درست بزرگترین زیرمجموعه‌های $X$ هستند که روی آنها $f$ «ثابت» است. توصیف دیگر این رده‌های هم‌ارزی بدین صورت است. این رده‌های هم‌ارزی درتناظر یك به یك با عناصر برد $f$ قرار دارند. اگر $y$ در برد $f$ باشد، مجموعهٔ همهٔ $x$های در $X$ با شرط $f(x) = y$ رده‌ای هم‌ارزی برای $R$ است؛ و این خود تناظری یك به‌یك بین عناصر برد $f$ و رده‌های هم‌ارزی $R$ تعریف می‌کند.

حال به توضیحی دیگر در بارهٔ روابط هم‌ارزی مـی‌پردازیم. بـا مفروض بودن رابطه‌ای هم‌ارزی چون $R$ روی $X$، گیریم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ رده‌های هم‌ارزی برای $R$ باشد. وابستگی ردهٔ هم‌ارزی $E(x; R)$ به عنصر $x$، تـابعی چون $f$ از $X$ در $\mathscr{F}$ (در حقیقت، بروی $\mathscr{F}$) تعریف می‌کند:

$$f(x) = E(x; R).$$

این نشان می‌دهد که $R$، همچون در مثال ۵ (ث)، رابطهٔ هم‌ارزی وابسته به تابعی است که دامنهٔ آن $X$ است. آنچه این‌مطلب می‌گوید این است که هر رابطهٔ هم‌ارزی روی‌مجموعهٔ $X$ به‌صورت زیر تعیین می‌شود. قاعده‌ای (تابعی) چون $f$ داریم که به‌هر عنصر $x$ از $X$ شیئی چون $f(x)$ را وابسته می‌سازد و $xRy$ اگر و تنها اگـر $f(x) = f(y)$. اکنون باید $f(x)$ را به‌عنوان‌خاصیتی از $x$ درنظر گرفت که آنچه رابطهٔ هم‌ارزی انجام می‌دهد (اجمالاً) عبارت از گردآوردن همهٔ آن عناصری از $X$ باشد که این خاصیت را مشترکاً دارا هستند. اگر شیء $f(x)$ ردهٔ هـم‌ارزی $x$ باشد، آنگـاه آنچه گفته شد این است که خاصیت مشترك عناصر یك ردهٔ هم‌ارزی، تعلق داشتن آنها به یکی از رده‌هـای هم‌ارزی است. بدیهی است که این مطلب چیز زیادی نمی‌گـوید. درحالت عمومی، تعداد بسیاری تابع متفاوت چون $f$ وجود دارند که رابطهٔ هم ارزی مفـروضی را به‌صورت بالا تعیین می‌کنند و یکی از اهداف موردنظر درمطالعهٔ روابط هم‌ارزی یافتن یکی از این توابع $f$ است که توصیفی ابتدایی و در عین حال بامعنی از رابطهٔ هم‌ارزی به‌دست دهد. در بخش

پ. ۵. خواهیم دید که در مورد چند رابطهٔ هم‌ارزی خاصی که در جبرخطی پیش‌می‌آیند، این امر چگونه انجام می‌شود.

## پ. ۴. فضاهای خارج قسمت

فرض‌کنیم $V$ فضایی برداری برروی هیأت $F$ و $W$ زیرفضایی از $V$ باشد. در حالت عمومی، تعداد زیادی‌زیرفضا چون $W'$ وجود دارند‌که مکمل $W$ هستند؛ یعنی، زیرفضایی با این خاصیت هستند که $V=W\oplus W'$. اگر ضربی داخلی روی $V$ داشته باشیم و بعد $W$ هم متناهی باشد، زیرفضای خاصی‌وجود داردکه یحتمل نام زیرفضای مکمل «طبیعی» $W$ برای آن مناسب است. این زیرفضا، مکمل متعامد $W$ است. اما، اگر $V$ بجز ساختار فضای برداری‌ساختار دیگری نداشته باشد، هیچ راهی برای‌گزینش زیرفضایی چون $W'$ که بتوان آن را زیرفضای مکمل طبیعی $W$ نامید وجود ندارد. با این وجود، از $V$ و $W$ می‌توان فضایی برداری چون $V/W$ را ساخت که به «خارج قسمت» $V$ و $W$ مشهور است ونقش‌مکمل طبیعی $W$ را بازی‌کند. این‌فضای خارج قسمت زیرفضایی از $V$ نیست، ولذا نمی‌تواند عملاً زیرفضایی مکمل برای $W$ باشد، ولی فضایی برداری است‌که تنها برحسب $V$ و $W$ تعریف می‌شود و دارای این خاصیت است‌که با هر زیرفضای مکمل $W$، مانند $W'$ یکریخت است.

گیریم $W$ زیرفضایی ازفضای برداری $V$ باشد. اگر $\alpha$ و $\beta$ بردارهایی از $V$ باشند، گوییم $\alpha$ **همنهشت** $\beta$ به **پیمانهٔ** $W$ است هرگاه بردار $(\alpha-\beta)$ در زیرفضای $W$ باشد. اگر $\alpha$ همنهشت $\beta$ به‌پیمانهٔ $W$ باشد، می‌نویسیم

$$\alpha\equiv\beta,\quad \operatorname{mod} W.$$

همنهشتی به پیمانهٔ $W$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $V$ است.

(۱) $\alpha\equiv\alpha,\ \operatorname{mod} W$، زیرا $\alpha-\alpha=0$ در $W$ است.

(۲) اگر $\alpha\equiv\beta,\ \operatorname{mod} W$، آنگاه $\beta\equiv\alpha,\ \operatorname{mod} W$. زیرا، از آنجاکه $W$ زیر-فضایی از $V$ است، بردار $(\alpha-\beta)$ در $W$ است اگر و تنها اگر $(\beta-\alpha)$ در $W$ باشد.

(۳) اگر $\alpha\equiv\beta,\ \operatorname{mod} W$ و $\beta\equiv\gamma,\operatorname{mod} W$، آنگاه $\alpha\equiv\gamma,\operatorname{mod} W$. زیرا اگر $(\alpha-\beta)$ و $(\beta-\gamma)$ در $W$ باشند، آنگاه $\alpha-\gamma=(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)$ هم‌در $W$ است.

رده‌های هم‌ارزی برای این رابطهٔ هم ارزی به عنوان **همجموعه‌های** $W$ شناخته می‌شوند. ردهٔ هم‌ارزی (**همجموعه**) برداری چون $\alpha$ چیست؟ این ردهٔ هم‌ارزی متشکل‌از همهٔ بردارهای $\beta$ در $V$ است‌که $(\beta-\alpha)$ در $W$ باشد، یعنی همهٔ بردارهای $\beta$ به‌صورت $\beta=\alpha+\gamma$ که $\gamma$ در $W$ باشد. بدین‌دلیل، همجموعهٔ بردار $\alpha$ با

$$\alpha+W$$

نشان داده می‌شود. مناسب است که همجموعهٔ $\alpha$ نسبت به $W$ به عنوان مجموعهٔ بردارهای حاصل از انتقال زیرفضای $W$ توسط بردار $\alpha$ درنظر گرفته شود. برای تجسم

www.riazisara.ir

این همجموعه‌ها، بهتر است خواننده حالت خاص زیر را در نظر بگیرد. گیریم $V$ فضای $R^2$ و $W$ زیرفضایی یك بعدی از $V$ باشد. اگر $V$ را به‌عنوان صفحهٔ اقلیدسی تصور کنیم، $W$ خطی مستقیم مار بر مبدأ خواهد بود. اگر $\alpha=(x_1, x_2)$ برداری در $V$ باشد، همجموعهٔ $\alpha+W$ خط مستقیمی‌است که از نقطهٔ $(x_1, x_2)$ می‌گذرد و موازی $W$ است.

دستهٔ همهٔ همجموعه‌های $W$ با $V/W$ نشان داده خواهد شد. اکنون به صورت زیر، جمعی برداری وضربی اسکالری روی $V/W$ تعریف می‌کنیم:

$$(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W$$
$$c(\alpha+W)=(c\alpha)+W$$

به‌بیان دیگر، مجموع همجموعهٔ $\alpha$ وهمجموعهٔ $\beta$ عبارت است‌ازهمجموعهٔ $(\alpha+\beta)$و حاصل‌ضرب اسکالر $c$ و همجموعهٔ $\alpha$ عبارت است از همجموعهٔ بردار $c\alpha$ . بردارهای متفاوت بسیاری از $V$ نسبت به $W$ همجموعه‌های مساوی خواهند داشت ولذا باید نشان دهیم که جمع وضرب فوق تنها به همجموعه‌های مورد بحث وابسته‌اند. این بدین معنی است که بایداحکام زیر را اثبات کنیم:

(الف) اگر $\alpha\equiv\alpha', \bmod W$ و $\beta\equiv\beta' , \bmod W$، آنگاه

$$\alpha+\beta\equiv\alpha'+\beta', \bmod W$$

(ب) اگر $\alpha\equiv\alpha', \bmod W$ ، آنگاه $c\alpha\equiv c\alpha' , \bmod W$.

نشان دادن‌این احکام ساده است. (۱) اگر $\alpha-\alpha'$ و $\beta-\beta'$ در $W$ باشند، آنگاه چون $(\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta')=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')$، می‌بینیم که $\alpha+\beta$ همنهشت $\alpha'+\beta'$ به پیمانهٔ $W$ است. (۲) اگر $\alpha-\alpha'$ در $W$ و $c$ اسکالری باشد، آنگاه $c\alpha-c\alpha'=c(\alpha-\alpha')$ در $W$ است.

اکنون بسادگی‌می‌توان نشان دادکه $V/W$ همراه باجمع برداری وضرب اسکالری تعریف شده‌درفوق فضایی‌برداری برروی هیأت $F$ تشکیل‌می‌دهد. البته‌هریك از اصول یك فضای برداری را باید به‌طور مستقیم بررسی کرد. هریك ازخواص جمع برداری‌وضرب اسکالری از خاصیت متناظر اعمال در $V$ منتج می‌شوند. نکته‌ای را هم باید متذکر شد. بردار صفر در $V/W$ همجموعهٔ بردار صفر در $V$ است. به‌بیان دیگر، $W$ بردار صفر در $V/W$ است.

فضای برداری $V/W$ **خارج قسمت** (یا تفاضل) $V$ و $W$ نامیده می‌شود. یك تبدیل خطی طبیعی چون $Q$ از $V$ برروی $V/W$ وجود دارد. این تبدیل با $Q(\alpha)=\alpha+W$ تعریف می‌شود. باید در نظرداشت که عملهای در $V/W$ را درست طوری تعریف کردیم که این تبدیل $Q$ خطی باشد. توجه‌کنیدکه فضای پوچ $Q$ دقیقاً زیرفضای $W$ است. $Q$ را **تبدیل خارج قسمت** (یا **نگاشت خارج قسمت**) از $V$ برروی $W$ می‌نامیم.

حال می‌توان رابطهٔ بین فضای خارج قسمت $V/W$ و زیر فضاهایی از $V$ را که مکمل $W$ هستند به‌شرح زیربیان کرد.

**قضیه.** گیریم $W$ زیرفضایی از فضای برداری $V$ و $Q$ نگاشت خارج قسمت از $V$ بروی $V/W$ باشد. فرض کنیم $W'$ زیرفضایی از $V$ باشد. در این صورت $V=W\oplus W'$ اگر وتنها اگر تحدید $Q$ به $W'$ یك یکریختی از $W'$ بروی $V/W$ باشد:

اثبات. فرض کنیم $V=W\oplus W'$. پس هر بردار $\alpha$ در $V$ به‌طور یکتا به صورت $\alpha=\gamma+\gamma'$، کـه در آن $\gamma$ در $W$ و $\gamma'$ در $W'$ است، قابل بیان است. در این صورت $Q\alpha=Q\gamma+Q\gamma'=Q\gamma'$؛ یعنی $\alpha+W=\gamma'+W$. این نشان می‌دهد کـه $Q$، $W'$ را بروی $V/W$ می‌نگارد، یعنی $Q(W')=V/W$. بعلاوه $Q$ روی $W'$ یك به‌یك است؛ زیرا، فـرض کنیم $\gamma'_1$ و $\gamma'_2$ دو بـردار در $W'$ بـاشند و $Q\gamma'_1=Q\gamma'_2$. در این صورت $Q(\gamma'_1-\gamma'_2)=0$، پس $\gamma'_1-\gamma'_2$ در $W$ قـراردارد. این بردار همچنین در $W'$ که مجزا از $W$ است قراردارد؛ پس $\gamma'_1-\gamma'_2=0$. بنابراین تحدید $Q$ به $W'$ تبدیل خطی یك به یکی از $W'$ بروی $V/W$ است.

فرض کنیم $W'$ چنان زیـرفضایی از $V$ باشد کـه $Q$ روی $W'$ یك به یك باشد و $Q(W')=V/W$. گیریم $\alpha$ برداری از $V$ باشد. دراین‌صورت برداری چون $\gamma'$ در $W'$ وجود دارد که $Q\gamma'=Q\alpha$؛ یعنی $\gamma'+W=\alpha+W$. پس برداری چون $\gamma$ در $W$ هست که $\alpha=\gamma+\gamma'$. بنابراین $V=W+W'$. برای اینکه نشان‌دهیم $W$ و $W'$ مجزا هستند، فرض‌کنیم $\gamma$ هم در $W$ و هم در $W'$ باشد. چون $\gamma$ در $W$ است، داریم $Q\gamma=0$. ولی $Q$ روی $W'$ یك‌به‌یك است ولذا باید داشته‌باشیم $\gamma=0$. بدین‌سان $V=W\oplus W'$. □

آنچه که حقیقتاً این قضیه می‌گوید این است که $W'$ مکمل $W$ است اگر وتنها اگر $W'$ زیرفضایی باشد که دقیقاً یك عضو ازهر هممجموعه $W$ را شامل باشد. این قضیه نشان می‌دهد کـه وقتی $V=W\oplus W'$، نگاشت خارج قسمت $Q$، فضای $W'$ را بـا $V/W$ «یکی می‌کند». به‌طور خلاصه $(W\oplus W')/W$ به‌طریقی طبیعی با $W'$ یکریخت است.

نکته‌ای نسبتاً آشکار را هم باید متذکرشد. اگر $W$ زیرفضایی از فضای بـرداری بعد متناهی $V$ باشد، آنگاه

$$\text{بعد}(V)=\text{بعد}(V/W)+\text{بعد}(W) .$$

این مطلب را می‌توان از قضیهٔ بالا نتیجه‌گرفت. شاید آسانتر باشد مشاهده‌کنیم که آنچه این فرمول بعدی بیان می‌کند این است که

$$\text{بعد}(V)=\text{رتبهٔ}(Q)+\text{پوچی}(Q)$$

هدف ما در اینجا بررسی دقیق فضاهای خارج قسمت نیست. لکن نتیجه‌ای بنیانی هست که لازم است اثبات آن ارائه شود.

**قضیه.** گیریم $V$ و $Z$ دو فضای برداری برروی هیأت $F$ باشند. فرض کنیم $T$ تبدیلی خطی‌از $V$ بروی $Z$ باشد. اگر $W$ فضای‌پوچ $T$ باشد، آنگاه $Z$ با $V/W$ یکریخت‌است.

اثبات. تبدیلی چون $U$ از $V/W$ در $Z$ را به صورت $U(\alpha+W)=T\alpha$ تعریف می‌کنیم. باید نشان دهیم که $U$ خوش‌تعریف است، یعنی اگر $\alpha+W=\beta+W$، آنگاه $T\alpha=T\beta$. این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که $W$ فضای پوچ $T$ است؛ زیرا $\alpha+W=\beta+W$ بدین معنی است که $\alpha-\beta$ در $W$ است و این امر صورت می‌پذیرد اگر و تنها اگر $T(\alpha-\beta)=0$. این مطلب نه تنها نشان می‌دهد که $U$ خوش تعریف است، بلکه نشان می‌دهد که $U$ یك به‌یك نیز هست.

اکنون بررسی اینکه $U$ خطی است و $V/W$ را بروی $Z$ می‌فرستد بسادگی میسر است، زیرا که $T$ تبدیلی خطی از $V$ بروی $Z$ است. □

## پ. ۵. روابط هم‌ارزی در جبر خطی

حال برخی از روابط هم‌ارزی را که درمتن این کتاب ظاهر می‌شوند، مورد توجه قرار می‌دهیم. مجموعهٔ زیر درست نمونه‌ای از این روابط است.

(۱) گیریم $m$ و $n$ دو عدد صحیح مثبت و $F$ یك هیأت باشد. $X$ را مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی $F$ می‌گیریم. دراین‌صورت هم‌ارزی‌سطری، رابطه‌ای‌هم‌ارزی روی مجموعهٔ $X$ است. حکم «$A$ هم‌ارز سطری $B$ است» بدین معنی است که $A$ می‌تواند از $B$ توسط دنباله‌ای متناهی از عملهای سطری مقدماتی به‌دست آید. اگر به‌جای «$A$ هم‌ارز سطری $B$ است» بنویسیم $A\sim B$، آنگاه بررسی خواص زیر مشکل نیست: (۱) $A\sim A$؛ (۲) اگر $A\sim B$، آنگاه $B\sim A$؛ (۳) اگر $A\sim B$ و $B\sim C$، آنگاه $A\sim C$. دربارهٔ این رابطهٔ هم‌ارزی چه می‌دانیم؟ در واقع، مطالب زیادی دراین مورد می‌دانیم. مثلاً می‌دانیم که $A\sim B$ اگر و تنها اگر به‌ازای ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری چون $P$، $A=PB$؛ یا $A\sim B$ اگر و تنها اگر دستگاههای همگن معادلات خطی $AX=0$ و $BX=0$ دارای جوابهای مساوی باشند. همچنین اطلاعات بسیار واضحی دربارهٔ رده‌های هم‌ارزی این رابطه داریم. هرماتریس $m\times n$ی مانند $A$ بایك و تنها یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز سطری است. آنچه این مطلب می‌گوید این است که هر ردهٔ هم‌ارزی برای این رابطه دقیقاً شامل یك ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی $R$ است؛ ردهٔ هم‌ارزی تعیین‌شده توسط $R$ متشکل از همهٔ ماتریسهای $A=PR$ است که در آن $P$ ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری است. این توصیف از رده‌های هم‌ارزی را می‌توان به‌طریق زیرهم تصور کرد. با مفروض بودن ماتریس $m\times n$ی مانند $A$، قاعده‌ای (تابعی) چون $f$ داریم که به $A$ ماتریس تحویل‌شدهٔ‌سطری‌پلکانی $f(A)$ را که‌هم‌ارز‌سطری $A$ است‌وابسته‌می‌کند. رابطهٔ هم‌ارزی‌سطری کاملاً توسط $f$ تعیین می‌شود. زیرا، $A\sim B$ اگروتنها اگر $f(A)=f(B)$؛ یعنی، اگر و تنها اگر $A$ و $B$ دارای یك شکل تحویل شدهٔ سطری پلکانی باشند.

(۲) گیریم $n$ عددی صحیح مثبت و $F$ یك هیأت باشد. فرض می‌کنیم $X$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی $F$ باشد. آنگاه تشابه رابطه‌ای هم‌ارزی روی $X$ است؛ هر ماتریس $n\times n$ی مانند $A$ متشابه خودش است؛ اگر $A$ متشابه با $B$ باشد، آنگاه $B$ متشابه

با $A$ است؛ اگر $A$ متشابه‌با $B$ و $B$ متشابه با $C$ باشد، آنگاه $A$ متشابه با $C$ است. دربارهٔ این رابطهٔ هم‌ارزی نیز مطالب نسبتاً زیادی می‌دانیم. مثلاً، $A$ متشابه با $B$ است اگر و تنها اگر $A$ و $B$ روی $F^n$ عملگرهای خطی‌مساوی را (احتمالاً) درپایه‌های مرتب‌متفاوتی نمایش دهند. اما، مطلبی عمیق‌تر از این می‌دانیم. هر ماتریس $n\times n$ مانند $A$، برروی $F$، با یك و تنها یك ماتریس که درفرم گویاست (فصل ۷)، (برروی $F$)، متشابه است. به‌بیان دیگر،هر ردهٔ‌هم‌ارزی برای‌رابطهٔ تشابه دقیقاً شامل‌یك ماتریس‌است که درفرم‌گویاست. هر ماتریس در فرم گویا، توسط یك $k$تایی $(p_1, \ldots, p_k)$ از چندجمله‌ایهای تکین‌دارای این خاصیت‌که $p_{j+1}$ چند جمله‌ای $p_j$ را عاد می‌کند، $j=1, \ldots, k-1$، تعیین می‌شود. بدین‌سان، تابعی چون $f$ داریم‌که به هر ماتریس $n\times n$ مانند $A$ یك $k$تایی $f(A)=(p_1, \ldots, p_k)$ را که درشرط تقسیم‌پذیری $p_{j+1}$ بر $p_j$ صدق می‌کند وابسته می‌سازد؛ و $A$ و $B$ متشابه‌اند اگر و تنها اگر $f(A)=f(B)$.

(۳) اینك حالت خاصی از همین مثال ۲. گیریم $X$ مجموعهٔ ماتریسهای $3\times 3$ بر روی‌هیأتی چون $F$ باشد. رابطهٔ تشابه‌روی $X$ را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. اگر $A$ و $B$ دو ماتریس $3\times 3$ برروی $F$ باشند. آنگاه $A$ و $B$ متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی و چند جمله‌ای مینیمال مساوی باشند. به‌ازای هرماتریس $3\times 3$ چون $A$، جفتی مانند $(f, p)$ از دو چندجمله‌ای تکین داریم‌که

(الف) $\deg f=3$،

(ب) $p$ چندجمله‌ای $f$ را عاد می‌کند،

$f$ چندجمله‌ای سرشت‌نمای $A$ است و $p$ چندجمله‌ای مینیمال $A$. با مفروض بودن چندجمله‌ایهای تکین $f$ و $p$ برروی $F$ که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند، به‌آسانی‌می‌توان ماتریسی $3\times 3$ برروی $F$ به‌دست‌آورد که $f$ و $p$ را، بترتیب، به‌عنوان چندجمله‌ایهای سرشت‌نما و مینیمال خود داشته باشد. لب همهٔ این مطالب چنین است. اگر رابطهٔ تشابه روی مجموعهٔ ماتریسهای $3\times 3$ برروی $F$ را مورد بررسی قرار دهیم، رده‌های هم‌ارزی درتناظریك‌به‌یك خواهند بود باجفتهای‌مرتب $(f, p)$ ازچندجمله‌ایهای تکین برروی $F$ که درشرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند.

## پ. ۶. اصل موضوع انتخاب

به‌بیانی مجمل، اصل انتخاب یك قاعده (یا اصل) فکرکردن است حاکی از اینکه با در دست داشتن خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی، می‌توانیم از هر مجموعه یك عنصر را برگزینیم. برای بیان دقیق‌تر مطلب، فرض‌کنیم مجموعهٔ نمایه‌ای چون $A$ و به‌ازای هر $\alpha$ در $A$ مجموعه‌ای وابسته وغیر تهی چون $S_\alpha$ در دست باشد. «انتخاب» یك عنصر از هر $S_\alpha$ به‌معنی ارائهٔ قاعده‌ای است چون $f$ که به هر $\alpha$ یك عنصر $f(\alpha)$ از مجموعهٔ $S_\alpha$ را وابسته سازد. اصل انتخاب حاکی‌است که این امر امکان‌پذیر است، یعنی بادر دست‌داشتن

خانوادهٔ مجموعه‌های $\{S_\alpha\}$ تابعی چون $f$ از $A$ در

$$\bigcup_\alpha S_\alpha$$

یافت می‌شود که به‌ازای هر $\alpha$، $f(\alpha)$ در $S_\alpha$ باشد. این‌اصل هرچند مورد پذیرش اکثریت ریاضیدانان است در موارد بسیاری به‌هیچ‌وجه روشن نیست که تابع صریحی چون $f$ را چگونه می‌توان به‌دست آورد.

اصل انتخاب پیامدهای تکان‌دهنده‌ای هم دارد. اکثر این نتایج، به مواد مورد بحث این‌کتاب یا ارتباط اندکی دارند یا هیچ ربطی پیدا نمی‌کنند. اما، یك پیامد شایستهٔ ذکر است: هرفضای برداری پایه‌ای‌دارد. مثلاً هیأت اعداد حقیقی به‌عنوان یك فضای‌برداری بر روی هیأت اعدادگویا، دارای یك پایه است. به‌بیان دیگر، زیرمجموعه‌ای چون $S$ از $R$ وجود داردکه برروی هیأت اعدادگویا مستقل خطی است و دارای این خاصیت‌است که هرعدد حقیقی ترکیب خطی‌گویایی از تعدادی متناهی از عناصر $S$ است. ما در اینجا برای استنتاج این‌قضیهٔ مربوط به‌فضاهای برداری ازاصل انتخاب خود را معطل نمی‌کنیم و برای دیدن اثباتی از آن، خواننده را به‌کتاب کلی[1] که در فهرست مراجع آمده است، ارجاع می‌دهیم.

## مراجع


Halmos, P., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1958.

Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra*, II, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1953.

Kelley, John L., *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1955.

MacLane, S. and Birkhoff, G., *Algebra*, The Macmillan Co., New York, 1967.

Schreier, O. and Sperner, E., *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, 2nd Ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1955.

van der Waerden, B. L., *Modern Algebra* (two volumes), Rev. Ed., Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1969.


---

1. Kelley

## واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی

| | |
|---|---|
| action | عمل، کنش |
| add | اضافه کردن |
| adjacent | مجاور |
| adjoint | الحاقی |
| -operation | عمل الحاق |
| -operator | عملگر- |
| adjunction | الحاق |
| admissible | مجاز |
| algebra | جبر |
| algebraic | جبری |
| algebraically closed | بستهٔ جبری |
| algorithm | الگوریتم |
| alternating | متناوب |
| analysis | آنالیز |
| angle | زاویه |
| annihilating polynomial | چندجمله‌ای پوچساز |
| annihilator | پوچساز |
| anti-isomorphism | پادیکریختی |
| application | کاربرد |
| approximation | تقریب-نزدیك‌سازی |
| arbitrary | دلخواه |
| argument | استدلال، آوند |

| | |
|---|---|
| array | آرایش |
| assertion | حکم |
| associativity law | قانون شرکت‌پذیری |
| augmented matrix | ماتریس افزوده |
| axial | محوری |
| axis | محور |
| axiom of choice | اصل موضوع انتخاب |
| | |
| base | پایه، مبنا [لگاریتم] |
| basis | پایه |
| bilinear | دوخطی |
| –form | فرم– |
| binary | دوتایی |
| binomial | دوجمله‌ای |
| | |
| calculation(→computation) | محاسبه |
| canonical | متعارف |
| character | سرشت |
| characterisation | سرشت‌نمایی |
| characteristic | سرشت‌نما |
| –polynomial | چندجمله‌ای– |
| –value | مقدار– [= مقدار ویژه] |
| –vector | بردار– |
| class | رده |
| classic | کلاسیك |
| classical adjoint | الحاقی کلاسیك |
| classification | رده‌بندی |
| codimension | همبعد |
| codomain | همدامنه |
| coefficient | ضریب |
| cofactor | همسازه |
| coincidence | انطباق |
| collection | گردآورده، دسته |

| | |
|---|---|
| column | ستون |
| -operation | عمل ستونی |
| -rank | رتبهٔ ستونی |
| combination | ترکیب |
| linear- | ـ خطی |
| combinatorial analysis | آنالیز ترکیبی |
| commutative | جابجایی |
| commutator | جابجاگر |
| commute | جابجاشدن |
| companion | همدم |
| -matrix | ماتریس ـ |
| complement | مکمل |
| complex | مختلط |
| component | مؤلفه |
| composed function | تابع مرکب |
| composition | ترکیب [توابع] |
| computation(→calculation) | محاسبه |
| conductor | هادی |
| congruence | همنهشتی |
| -modulo n | ـ به‌پیمانهٔ n |
| congruent | همنهشت |
| conjugate | مزدوج |
| -transpose | ترانهادهٔ ـ |
| conjugation function | تابع تزویجی |
| consequence | پی‌آمد |
| consistant | سازگار |
| continuous | پیوسته |
| convergence | همگرایی |
| convergent | همگرا |
| converse | عکس |
| coordinate | مختص |
| corollary | نتیجه |
| correspondence | تناظر |
| correspondent | متناظر |

| | |
|---|---|
| coset | هم‌مجموعه |
| countability | شمارش‌پذیری |
| countable | شمارش‌پذیر |
| criterion | معیار |
| cross product | ضرب خارجی |
| cyclic | دوری |
| -decomposition | تجزیهٔ ـ |
| -subspace | زیرفضای ـ |
| -vector | بردار ـ |
| decomposable | تجزیه‌پذیر |
| decompose | تجزیه‌کردن |
| decomposition | تجزیه |
| decrease | نزول کردن |
| decreasing | نزولی |
| deduction | قیاس، استنتاج |
| definite | معین |
| -integral | انتگرال ـ |
| degenerate | تبهگون |
| degree | درجه |
| dependence | وابستگی |
| dependent | وابسته |
| derivative | مشتق |
| determinant | دترمینان |
| -rank | رتبهٔ ـ |
| diagonal | قطر، قطری |
| -matrix | ماتریس قطری |
| diagonalizable | قطری‌شدنی |
| -operator | عملگر ـ |
| diagonalization | قطری کردن |
| differentiable | مشتق‌پذیر |
| differential | دیفرانسیل |
| differentiation | مشتق‌گیری، دیفرانسیل‌گیری |
| -transformation | تبدیل ـ |

| | |
|---|---|
| dimension | بعد |
| direct | مستقیم |
| –sum | مجموع– |
| direction | سو |
| directional | سویی |
| disjoint | مجزا |
| distance | فاصله [دو نقطه] |
| distributive law | قانون پخش‌پذیری |
| divide | تقسیم کردن-بخش کردن، عاد کردن |
| divident | مقسوم |
| divisibility | بخش‌پذیری |
| division | تقسیم |
| divisor | مقسوم‌علیه |
| domain | دامنه |
| dot product | ضرب نقطه‌ای |
| double | مضاعف |
| –dual | دوگان– |
| dual | دوگان |
| –basis | پایهٔ – |
| - space | فضای– |
| duality | دوگانی |
| echelon | پلکانی |
| eigenvalue | مقدارویژه [= مقدار سرشت‌نما] |
| element | عنصر، عضو |
| elimination | حذف |
| –process | فرآیند– |
| empty | تهی |
| entire | تام |
| –space | فضای– |
| entry | درایه |
| equivalence | هم‌ارزی |
| –relation | رابطهٔ– |
| equivalent | هم‌ارز |

| | |
|---|---|
| evaluation | محاسبه، تعیین‌مقدار |
| expand | بسط دادن |
| expansion | بسط |
| explicit | صریح |
| exponent | نما |
| exponential | نمایی |
| extension | گسترش |
| | |
| factor | سازه |
| factorization | تجزیه به‌سازه‌ها |
| field | هیأت |
| finite | متناهی |
| finitely generated | بطور متناهی تولیدشده |
| form | فرم، صورت |
| formal | صوری |
| –power series | سری‌توانی– |
| formula | فرمول |
| free module | مدول آزاد |
| function | تابع |
| functional | تابعك |
| | |
| generalization | تعمیم |
| generalize | تعمیم‌دادن، عمومیت‌دادن |
| generate | تولیدکردن |
| generated | تولیدشده |
| generator | مولد |
| graph | نمودار |
| greatest common divisor | بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك |
| group | گروه |
| | |
| Hermitian[=self adjoint] | هرمیتی |
| –form | فرم– |
| homogeneous | همگن |

| | |
|---|---|
| homomorphic | همریخت |
| homomorphism | همریختی |
| hyperplane | ابرصفحه |
| hyperspace | ابرفضا |
| hypothesis | فرض |
| | |
| ideal | ایدآل |
| idempotence | خودتوانی |
| idempotent | خودتوان |
| –operator | عملگر– |
| identical | همانند، یکسان |
| identity | همانی [ = عنصرهمانی]، اتحاد |
| –function | تابع همانی |
| image | نگاره |
| imaginary | موهومی-انگاری |
| increasing | صعودی |
| inclusion | شمول |
| independence | استقلال |
| independent | مستقل |
| –variable | متغیر– |
| index | نمایه |
| indices | نمایه‌ها |
| induce | القاکردن |
| induced operator | عملگرالقاشده |
| induction | استقرا |
| inductive | استقرایی |
| inequality | نامساوی |
| infinite | نامتناهی |
| inner product | ضرب داخلی |
| integration | انتگرال گیری |
| –by parts | – جزء به‌جزء |
| interpolation | درون‌یابی |
| intersection | اشتراک |
| interval | فاصله |

| | |
|---|---|
| invariance | پایایی |
| invariant | پایا |
| –subspace | زیرفضای– |
| inverse | معکوس |
| inversion | انعکاس |
| invertible | معکوس‌پذیر |
| irreducible | تحویل‌ناپذیر |
| isomorphic | یکریخت |
| isomorphism | یکریختی |
| iterated | مکرر |
| iteration | تکرار |
| | |
| kernel | هسته |
| | |
| latent root | ریشهٔ راکد، [= مقدار سرشت‌نما] |
| leading | مقدم |
| –nonzero entry | درایهٔ غیرصفر– |
| least common divisor | کوچکترین مضرب مشترك |
| lemma | لم |
| length | طول |
| line | خط |
| linear | خطی |
| –combination | ترکیب– |
| –function | تابع– |
| –functional | تابعك– |
| –transformation | تبدیل– |
| linearly dependent | وابستهٔ خطی |
| linearly independent | مستقل خطی |
| lower triangular | پایین‌مثلثی |
| | |
| magnitude | بزرگی |
| main diagonal | قطر اصلی |
| map = mapping | نگاشت |

| | |
|---|---|
| matrix | ماتریس |
| maximal | ماکسیمال |
| –subspace | زیرفضای– |
| maximum | ماکسیمم |
| member | عضو |
| minimal | مینیمال |
| –polynomial | چندجمله‌ای– |
| minimum | مینیمم |
| minor | کهاد |
| module | مدول |
| monic polynomial | چندجمله‌ای تکین |
| motion | حرکت |
| multilinear function | تابع چندخطی |
| multiplicand | مضروب |
| multiplication | ضرب |
| multiplicity | چندگانگی |
| multiplier | ضریب، مضروب‌فیه |
| mutually perpendicular | دوبه‌دوعمود برهم |
| negative | منفی |
| nilpotent | پوچ‌توان |
| non-degenerate | ناتبهگون |
| –bilinear form | فرم دوخطی– |
| non-overlapping | نامتداخل |
| non-singular | نامنفرد |
| norm | نرم |
| normal | نرمال |
| –operator | عملگر– |
| normalizer | نرمال‌کننده |
| normed | نرم‌دار |
| notation | نماد، نمادگذاری |
| n-tuple | nتایی |
| nullity | پوچی |
| null- space | فضای پوچ |

| | |
|---|---|
| odd | فرد |
| on | روی |
| one-one | یك به‌یك |
| onto | پوشا، بروی |
| operate | عمل کردن |
| operation | عمل |
| operator | عملگر |
| order | مرتبه |
| ordered basis | پایهٔ مرتب |
| origin | مبدأ |
| orthogonal | متعامد |
| –basis | پایه– |
| –complement | مکمل– |
| –group | گروه– |
| –projection | تصویر– |
| –set | مجموعهٔ– |
| –vector | بردار– |
| orthogonality | تعامد |
| orthogonalization | متعامدسازی |
| orthonormal | متعامدیکه |
| –basis | پایهٔ– |
| –set | مجموعهٔ– |
| over | برروی |
| overlap | تداخل کردن |
| parallel | موازی |
| parallelogram law | قانون متوازی‌الاضلاع |
| period | دورهٔ تناوب |
| periodic | دوره‌ای |
| permutation | جایگشت |
| –group | گروه جایگشتی |
| perpendicular | عمود |
| perpendicularity | عمود بودن، تعامد |
| polar | قطبی |

| | |
|---|---|
| polarization identity | اتحاد قطبی |
| pole | قطب |
| polynomial | چندجمله‌ای |
| positive | مثبت |
| –definite | معین– |
| – –bilinear form | فرم دوخطی– – |
| –form | فرم– |
| power series | رشتهٔ توانی |
| primary | اولیه |
| –decomposition | تجزیهٔ– |
| prime | اول |
| principal ideal | ایدآل اصلی |
| process | فرآیند |
| product | حاصل‌ضرب، ضرب |
| project | طرح، تصویر کردن |
| projection | تصویر |
| –operator | عملگر– |
| proof | اثبات |
| proper | سره |
| –subset | زیرمجموعهٔ– |
| –value | مقدار– |
| pseudo orthogonal group | گروه شبه متعامد |
| quadratic | درجهٔ دوم |
| –form | فرم– |
| quotient | خارج قسمت |
| –space | فضای– |
| range | برد |
| rank | رتبه |
| rational | گویا |
| –form | فرم– |
| real | حقیقی |
| –line | خط– |

| | |
|---|---|
| -valued function | تابع حقیقی |
| reciproca | عکس [یک‌عدد] |
| rectangle | مستطیل |
| rectangular | مستطیلی |
| reduced | تحویل شده |
| reducibility | تحویل‌پذیری |
| reflection | انعکاس |
| reflective | انعکاسی |
| relation | رابطهٔ |
| relatively prime | نسبت به‌هم اول |
| remainder | باقیمانده |
| representation | نمایش |
| representative | نمایشگر |
| resolution | تفکیک، حل |
| restrict | تحدید کردن |
| restricted | محدود شده |
| restriction | تحدید |
| -operator | عملگر ـ. |
| reverse | وارونه، وارونه کردن |
| reversible | وارونه‌پذیر |
| rigid motion | حرکت صلب |
| ring | حلقه |
| root | ریشه |
| rotation | دوران |
| row | سطر |
| -equivalence | هم‌ارز سطری |
| -operation | عمل سطری |
| -rank | رتبهٔ سطری |
| -reduced | تحویل‌شدهٔ سطری |
| - - echelon | ـ ـ پلکانی |
| -space | فضای سطری |
| -vector | بردار سطری |
| r-shuffle | r-بر |

| | |
|---|---|
| scalar | اسکالر |
| -polynomial | چندجمله‌ای- |
| -product | ضرب- |
| self adjoint[=Hermitian] | خودالحاق |
| semi-simple operator | عملگر نیم‌ساده |
| separating vector | بردارجداکننده |
| separation | جداسازی |
| sequence | دنباله |
| series | رشته، سری |
| sesqui-linear | یک‌ونیم‌خطی |
| -form | فرم- |
| set | مجموعه |
| shift | انتقال |
| shuffle | بر |
| sign | علامت |
| signature | نشان |
| signum | علامت |
| similarity | تشابه |
| simultaneous | همزمان |
| -diagonalization | قطری‌سازی- |
| -triangulation | مثلث‌بندی- |
| singular | منفرد |
| -matrix | ماتریس- |
| -transformation | تبدیل- |
| skew | کج |
| -symmetric | متقارن- |
| --bilinear form | فرم دوخطی -- |
| solution | جواب |
| space | فضا |
| span | پدیدآوردن |
| spanned by | پدیدآمده توسط |
| spanning | پدیدآورنده |
| spatial | فضایی |
| spectral | طیفی |

| | |
|---|---|
| -resolution | تفکیک- |
| -value | مقدار- |
| spectrum | طیف |
| square | مربع، مجذور |
| -matrix | ماتریس مربعی |
| -root | جذر، ریشهٔ دوم |
| standard | استانده |
| -basis | پایهٔ- |
| strict | اکید |
| structure | ساختار-ساخت |
| stuffer | پرکننده [ = T-هادی] |
| subdivision | زیربخش |
| subfield | زیرهیأت |
| submatrix | زیرماتریس |
| submodule | زیرمدول |
| subscript | شاخص‌زیر |
| subset | زیرمجموعه |
| subspace | زیرفضا |
| substitution | جایگزینی |
| subtraction | تفریق |
| succession | توالی |
| successive | متوالی |
| sum | مجموع |
| symbol | نماد |
| symmetric | متقارن |
| -bilinear form | فرم دوخطی- |
| -group | گروه متقارن- |
| symmetry | تقارن |
| T-conductor | T-هادی |
| tensor | تانسور |
| -product | ضرب تانسوری |
| term | جمله، اصطلاح |
| theorem | قضیه |

| | |
|---|---|
| theory | نظریه |
| trace | رد |
| –of linear transformation | ـ تبدیل خطی |
| –of matrix | ـ ماتریس |
| transformation | تبدیل |
| transitive | متعدی |
| transitivity | تعدی |
| translation | انتقال |
| transpose | ترانهاده |
| transposition | ترانهش |
| triangulable | مثلثی‌شونده |
| triangular | مثلثی |
| triangulation | مثلث‌بندی |
| trivial | بدیهی |
| unimodular | تک‌مدولی |
| union | اجتماع |
| unique | یکتا |
| unit | یکه |
| unitary | یکانی |
| –diagonalization | قطری‌کردن ـ |
| unity | یگانی |
| upper triangular | بالامثلثی |
| validity | اعتبار |
| value | مقدار |
| vanish | صفرشدن |
| variable | متغیر |
| variation | تغییر |
| vector | بردار |
| –space | فضای برداری |

| | |
|---|---|
| wedge product | ضرب گوه‌ای |
| well-defined | خوش تعریف |
| zero | صفر |

# واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی

| | |
|---|---|
| آرایش | array |
| آر-بر [r-بر] | r-shuffle |
| آزاد | free |
| آنالیز | analysis |
| - ترکیبی | combinatorial- |
| آوند | argument |
| | |
| ابرصفحه | hyperplane |
| ابرفضا | hyperspace |
| اتحاد | identity |
| - قطبی | polarization- |
| اثبات | proof |
| اجتماع | union |
| استانده | standard |
| استدلال | argument |
| استقرا | induction |
| استقرایی | inductive |
| استقلال | independence |
| استنتاج | deduction |
| اسکالر | scalar |
| اشتراک | intersection |
| اصطلاح | term |

| | |
|---|---|
| axiom | اصل موضوع |
| principal | اصلی |
| add | اضافه کردن |
| validity | اعتبار |
| augmented | افزوده |
| strict | اکید |
| adjunction | الحاق |
| adjoint | الحاقی |
| classical– | ـ کلاسیک |
| induce | القا کردن |
| algorithm | الگوریتم |
| shift | انتقال |
| translation | انتقال |
| integral | انتگرال |
| definite– | ـ معین |
| integration | انتگرال گیری |
| –by parts | ـ جزء به‌جزء |
| coincidence | انطباق |
| reflection | انعکاس |
| inversion | انعکاس |
| imaginary | انگاری [= موهومی] |
| prime | اول |
| primary | اولیه |
| ideal | ایدال |
| principal– | ـ اصلی |
| remainder | باقیمانده |
| upper triangular | بالامثلثی |
| divisibility | بخش‌پذیری |
| trivial | بدیهی |
| shuffle | بر |
| range | برد |
| vector | بردار |

| | |
|---|---|
| ـ جداکننده | separating- |
| ـ دوری | cyclic- |
| ـ سطری | row- |
| ـ متعامد | orthogonel- |
| برروی | over |
| بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك | greatest common divisor |
| بزرگی | magnitude |
| بستهٔ جبری | algebraically closed |
| بسط | expansion |
| بسط دادن | expand |
| بعد | dimension |
| | |
| پاد یکریختی | anti-isomorphism |
| پایا | invariant |
| پایایی | invariance |
| پایه | base |
| پایه | basis |
| ـ دوگان | dual- |
| ـ متعامد | orthogonal- |
| ـ متعامد یکه | orthonormal- |
| ـ مرتب | ordered- |
| پایین مثلثی | lower triangular |
| پخش‌پذیری | distributive |
| پدیدآمده توسط | spanned by |
| پدیدآوردن | span |
| پدیدآورنده | spanning |
| پرکننده | stuffer |
| پلکانی | echelon |
| پوچ‌توان | nilpotent |
| پوچساز | annihilator |
| پوچی | nullity |
| پوشا | onto |
| پیوسته | continuous |

| | |
|---|---|
| تابع | function |
| ـ ترویجی | conjugation– |
| ـ چندخطی | multilinear– |
| ـ خطی | linear– |
| ـ مرکب | composed– |
| تابعك | functional |
| ـ خطی | linear– |
| تام | entire |
| تانسور | tensor |
| تبدیل | transformation |
| ـ خطی | linear– |
| ـ مشتق‌گیری [ = دیفرانسیل‌گیری] | differentiation– |
| ـ منفرد | singular– |
| تبهگون | degenerate |
| تجزیه | decomposition |
| ـ اولیه | primary– |
| تجزیه به‌سازه‌ها | factorization |
| تجزیه‌پذیر | decomposable |
| تجزیه‌کردن | decompose |
| تحدید | restriction |
| تحویل شده | reduced |
| ـ سطری | row– |
| ـ ـ پلکانی | – – echelon |
| تحویل‌ناپذیر | irreducible |
| تداخل‌کردن | overlap |
| ترانهاده | transpose |
| ـ مزدوج | conjugate– |
| ترانهش | transposition |
| ترکیب | combination |
| ـ خطی | linear– |
| ترکیب [توابع] | composition |
| ترویجی | conjugation |
| تشابه | similarity |
| تصویر | projection |

| | |
|---|---|
| orthogonal- | ـ متعامد |
| project | تصویر کردن |
| orthogonality[=perpendicularity] | تعامد |
| transitivity | تعدی |
| generalization | تعمیم |
| generalize | تعمیم دادن |
| evaluation | تعیین مقدار [= محاسبه] |
| variation | تغییر |
| subtraction | تفریق |
| resolution | تفکیك |
| spectral- | ـ طیفی |
| symmetry | تقارن |
| approximation | تقریب |
| division | تقسیم |
| divide | تقسیم کردن، بخش کردن، عادکردن |
| iteration | تکرار |
| unimodular | تك‌مدولی |
| correspondence | تناظر |
| succession | توالی |
| generate | تولید کردن |
| empty | تهی |
| T-conductor | T ـ هادی [T ـ هادی] |

| | |
|---|---|
| commute | ا بجا شدن |
| commutator | جابجاگر |
| commutative | جابجایی |
| substitution | جایگزینی |
| permutation | جایگشت |
| algebra | جبر |
| algebraic | جبری |
| separation | جداسازی |
| term | جمله |
| solution | جواب |

| | |
|---|---|
| polynomial | چندجمله‌ای |
| annihilating- | ــ پوچساز |
| monic- | ــ تکین |
| characteristic- | ــ سرشت‌نما |
| multiplicity | چندگانگی |
| product | حاصلضرب ، ضرب |
| elimination | حذف |
| motion | حرکت |
| rigid- | ــ صلب |
| real | حقیقی |
| assertion | حکم |
| resolution | حل |
| ring | حلقه |
| quotient | خارج قسمت |
| line | خط |
| real- | ــ حقیقی |
| linear | خطی |
| self adjoint | خودالحاق |
| idempotent | خودتوان |
| idempotence | خودتوانی |
| well defined | خوش‌تعریف |
| domain | دامنه |
| determinant | دترمینان |
| entry | درایه |
| nonzero- | ــ غیرصفر |
| leading- - | ــ ــ مقدم |
| degree | درجه |
| quadratic | درجهٔ دوم |
| interpolation | درون‌یابی |
| arbitrary | دلخواه |

| | |
|---|---|
| sequence | دنباله |
| binary | دوتایی |
| binomial | دوجمله‌ای |
| rotation | دوران |
| periodic | دوره‌ای |
| period | دورهٔ تناوب |
| cyclic | دوری |
| dual | دوگان |
| double- | ـ مضاعف |
| duality | دوگانی |
| differential | دیفرانسیل |
| differentiation | ـ گیری [= مشتق گیری] |
| relation | رابطه |
| equivalence- | ـ هم‌ارزی |
| rank | رتبه |
| determinant- | ـ دترمینان |
| column- | ـ ستونی |
| row- | ـ سطری |
| trace | رد |
| of linear transformation | ـ تبدیل خطی |
| of Matrix- | ـ ماتریس |
| class | رده |
| classification | رده‌بندی |
| series | رشته |
| power- | ـ توانی |
| Formal power- | ـ توانی صوری |
| root | ریشه |
| latent- | ـ راکد، [= مقدار سرشت‌نما] |
| angle | زاویه |
| subdivision | زیربخش |
| subspace | زیرفضا |

| | |
|---|---|
| cyclic– | ـ ی‌دوری |
| maximal– | ـ ی‌ماکسیمال |
| submatrix | زیرماتریس |
| subset | زیرمجموعه |
| proper– | ـ سره |
| submodule | زیرمدول |

| | |
|---|---|
| structure | ساختار |
| consistant | سازگار |
| factor | سازه |
| column | ستون |
| character | سرشت |
| characteristic | سرشت‌نما |
| characterization | سرشت‌نمایی |
| proper | سره |
| row | سطر |
| direction | سو |
| directional | سویی |

| | |
|---|---|
| subscript | شاخص زیر |
| associativity | شرکت‌پذیری |
| countable | شمارش‌پذیر |
| countability | شمارش‌پذیری |
| inclusion | شمول |

| | |
|---|---|
| explicit | صریح |
| increasing | صعودی |
| zero | صفر |
| vanish | صفر شدن |

| | |
|---|---|
| multiplication | ضرب |
| product | ضرب ، حاصل‌ضرب |
| tensor– | ـ تانسوری |

| | |
|---|---|
| cross– | ـ خارجی |
| inner– | ـ داخلی |
| wedge– | ـ گوه‌ای |
| dot– | ـ نقطه‌ای |
| coefficient | ضریب |
| multiplier | ضریب [= مضروب‌فیه] |
| project | طرح |
| length | طول |
| spectrum | طیف |
| member | عضو [= عنصر] |
| converse | عکس |
| sign[=signum] | علامت |
| action | عمل |
| operation | عمل |
| adjoint– | ـ الحاق |
| column– | ـ ستونی |
| row | ـ سطری |
| operator | عملگر |
| adjoint– | ـ الحاقی |
| induced– | ـ القاء شده |
| projection– | ـ تصویر |
| idempotent– | ـ خودتوان |
| diagonalizable– | ـ قطری‌شدنی |
| normal– | ـ نرمال |
| semi-simple– | ـ نیم‌ساده |
| sesqui-linear– | ـ یک‌ونیم‌خطی |
| perpendicular | عمود |
| perpendicularity | عمود بودن |
| element | عنصر [= عضو] |
| identity– | ـ همانی |

| | |
|---|---|
| interval | فاصله [اعداد حقیقی] |
| distance | فاصله [دو نقطه] |
| process | فرآیند |
| elimination– | ـ حذف |
| odd | فرد |
| hypothesis | فرض |
| form | فرم |
| multilinear– | ـ چندخطی |
| quadratic– | ـ درجهٔ دوم |
| bilinear– | ـ دوخطی |
| symmetric– | ـ متقارن |
| skew-symmetric– | ـ متقارن کج |
| positive definite– | ـ معین مثبت |
| non-degenerate– | ـ ناتبهگون |
| Hermitian– | ـ هرمیتی |
| formula | فرمول |
| space | فضا |
| vector– | ـ ی برداری |
| null– | ـ ی پوچ |
| entire– | ـ ی تام |
| quotient– | ـ ی خارج قسمت |
| dual– | ـ ی دوگان |
| row– | ـ ی سطری |
| spatial | فضایی |
| theorem | قضیه |
| pole | قطب |
| polar | قطبی |
| diagonal | قطر |
| main– | ـ اصلی |
| diagonalizable | قطری‌شدنی |
| diagonalization | قطری کردن |
| unitary– | ـ یکانی |

| | |
|---|---|
| application | کاربرد |
| skew | کج |
| classical | کلاسیك |
| action | کنش |
| least common divisor | کوچکترین مضرب مشترك |
| minor | کهاد |
| | |
| collection | گردآورده |
| group | گروه |
| permutation- | ـ جایگشتی |
| pseudo-orthogonal- | ـ شبه متعامد |
| orthogonal- | ـ متعامد |
| symmetric- | ـ متقارن |
| extension | گسترش |
| rational | گویا |
| | |
| lemma | لم |
| | |
| matrix | ماتریس |
| diagonal- | ـ قطری |
| square- | ـ مربعی |
| singular- | ـ منفرد |
| companion- | ـ همدم |
| maximal | ماکسیمال |
| maximum | ماکسیمم |
| origion | مبدأ |
| base | مبنا [لگاریتم] |
| canonical | متعارف |
| orthogonal | متعامد |
| orthogonalization | متعامدسازی |
| orthonormal | متعامدیکه |
| transitive | متعدی |
| variable | متغیر |

| | |
|---|---|
| independent– | ـ مستقل |
| symmetric | متقارن |
| skew– | ـ کج |
| correspondent | متناظر |
| alternating | متناوب |
| finite | متناهی |
| parallelogram | متوازی‌الاضلاع |
| successive | متوالی |
| positive | مثبت |
| triangulation | مثلث‌بندی |
| triangular | مثلثی |
| triangulable | مثلثی‌شونده |
| admissible | مجاز |
| adjacent | مجاور |
| disjoint | مجزا |
| sum | مجموع |
| direct– | ـ مستقیم |
| set | مجموعه |
| orthogonal– | ـ متعامد |
| orthonormal– | ـ ـ یکه |
| calculation | محاسبه |
| computation | محاسبه |
| evaluation | محاسبه [ = تعیین مقدار] |
| axis | محور |
| axial | محوری |
| coordinate | مختص |
| complex | مختلط |
| module | مدول |
| free– | ـ آزاد |
| square | مربع |
| order | مرتبه |
| composed | مرکب |
| conjugate | مزدوج |
| linear– | ـ خطی |

| | |
|---|---|
| مستطیل | rectangle |
| مستطیلی | rectangular |
| مستقل | independent |
| ـ خطی | linearly- |
| مستقیم | direct |
| مشتق | derivative |
| مشتق‌پذیر | differentiable |
| مشتق‌گیری، دیفرانسیل‌گیری | differentiation |
| مضاعف | double |
| مضروب | multiplicand |
| مضروب‌فیه [= ضریب] | multiplier |
| معکوس | inverse |
| معکوس‌پذیر | invertible |
| معیار | criterion |
| معین | definite |
| ـ مثبت | positive- |
| مقدار سرشت‌نما [= مقدارویژه] | characteristic value |
| مقدارسره | proper value |
| مقدارطیفی | spectral value |
| مقدارویژه | eigen value |
| مقدم | leading |
| مقسوم | divident |
| مقسوم‌علیه | divisor |
| مکرر | iterated |
| مکمل | complement |
| ـ متعامد | orthogonal- |
| منفرد | singular |
| منفی | negative |
| موازی | parallel |
| مولد | generator |
| مؤلفه | component |
| موهومی [= انگاری] | imaginary |
| مینیمال | minimal |
| مینیمم | minimum |

| | |
|---|---|
| non-degenerate | ناتبهگون |
| non-empty | ناتهی |
| non-overlapping | نامتداخل |
| infinite | نامتناهی |
| inequality | نامساوی |
| non-singular | نامنفرد |
| corollary | نتیجه |
| norm | نرم |
| normal | نرمال |
| normalizer | نرمال کننده |
| normed | نرم‌دار |
| decrease | نزول کردن |
| decreasing | نزولی |
| relatively prime | نسبت به‌هم اول |
| signature | نشان |
| theory | نظریه |
| image | نگاره |
| map[ = mapping] | نگاشت |
| exponent | نما |
| symbol | نماد |
| notation | نماد |
| notation– | ـ گذاری |
| representation | نمایش |
| representative | نمایشگر |
| index | نمایه |
| indices | نمایه‌ها |
| exponential | نمایی |
| graph | نمودار |
| | |
| dependence | وابستگی |
| linearly– | ـ خطی |
| dependent | وابسته |
| reverse | وارونه |
| reversible | وارونه‌پذیر |

| | |
|---|---|
| reverse | وارونه کردن |
| | |
| conductor | هادی |
| Hermition | هرمیتی |
| kernel | هسته |
| equivalent | هم‌ارز |
| equivalence | هم‌ارزی |
| row- | ـ سطری |
| identity | همانی [= عنصر همانی]، اتحاد |
| codimension | همبعد |
| codomain | همدامنه |
| companion | همدم |
| homomorphic | همریخت |
| homomorphism | همریختی |
| simultaneous | همزمان |
| cofactor | همسازه |
| convergent | همگرا |
| convergence | همگرایی |
| homogeneous | همگن |
| coset | هم‌مجموعه |
| congruent | همنهشت |
| congruence | همنهشتی |
| -modulo n | ـ به‌پیمانهٔ n |
| field | هیأت |
| | |
| unitary | یکانی |
| one-one | یك به یك |
| unique | یکتا |
| isomorphic | یکریخت |
| isomorphism | یکریختی |
| unit | یکه |
| unity | یگانی |

# فهرست راهنما


r–بر ۲۲۳
آزاد، مدول– ←

ابرفضا ۱۳۴، ۱۱۴
اتحاد قطبی ۳۵۵، ۴۷۲
اجتماع ۴۹۶
استانده
پایهٔ– ←
ضرب داخلی– ←
استقلال خطی ۵۶، ۶۴
اسکالر ۶
چندجمله‌ای– ←
اشتراك ۴۹۶
پوچساز– ←
– زیرفضاها ۵۱
اصل (موضوع) انتخاب ۵۰۹
اعداد
–حقیقی ۶
– صحیح ۷
– – مثبت ۷
–گویا ۷
– مختلط ۶
اعمال ستونی مقدماتی ۳۸، ۳۳۴
اعمال سطری مقدماتی ۱۱، ۳۲۹
افزوده، ماتریس– ←
اقلیدس، فضای–ی ←
الحاقی
– تبدیل‌خطی ۳۸۲
– کلاسیك ۱۹۴ (تمرین ۳)، ۲۰۸
ایدآل ۱۷۱
–اصلی ۱۷۱
–پرکننده ۲۶۳

بالامثلثی، ماتریس– ←
بخش‌پذیری چندجمله‌ایها ← تقسیم‌پذیری چندجمله‌ایها
بر۲۲۳
برد ۹۵
–تابع ۴۹۷
–تبدیل‌خطی ۹۶
بردار
–جداکننده ۳۱۷ (تمرین ۱۴)
–دوری ۲۹۷
–سرشت‌نما ۲۳۹
–سطری ۵۴
–های متعامد ۳۶۱، ۴۷۳

ترکیب خطی‌ـها ←
$T$ـپوچساز ← 
مختص‌ـ ←
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ۱۷۳
بستهٔ جبری، هیأت‌ـ ←
بسطهای لاپلاس ۲۳۳
بعد ۶۱
ـفضای برداری ۶۱
ـمتناهی ۵۷
فرمول‌ـ ۶۱

پایا
زیرفضای‌ـ ←
زیرمجموعهٔ‌ـ ←
سازه‌های‌ـ ←
مجموع مستقیم‌ـ ←
پایه ۵۷
ـاستانده ۵۸
ـبرای مدول ۲۱۴
ـدوگان ۱۳۱، ۲۱۶
ـفضای برداری ۵۷
ـمتعامد ۳۶۴
ـیکه ۳۶۴
ـمرتب ۶۸
تغییرـ ←
پرکننده ←ایدآل پرکننده
پوچ‌توان
تبدیل‌خطی‌ـ ←
عملگرـ ←
ماتریس‌ـ ←
پوچساز
ـاشتراك ۱۴۰ (تمرین ۱۱)
ـبردارها ← $T$ـپوچساز
ـزیرفضاها ۱۳۵
ـزیرمجموعه ۱۳۴
ـمجموع ۱۴۰ (تمرین ۱۱)
پوچی تبدیل خطی ۹۶
پوشا ۴۹۷

تابع ۴۹۷
بردـ ←
ـ $n$خطی ۱۸۵
ـ $n$خطی متناوب ۱۸۸، ۲۲۰
ـتحدید ۵۰۰
ـچندجمله‌ایها ۴۴
ـچندخطی ۲۱۶
ـخطی ۹۱، ۱۲۹، ۳۷۶
ـدترمینان ۱۸۸
ـمعکوس‌پذیر ۴۹۹
ـهمانی ۴۹۸
معکوس‌ـ ←
تابعك‌خطی ۱۲۹
تانسور ۲۱۶
ضرب‌ـی ←
تبدیل
ـخارج‌قسمت ۵۰۶
ـلورنتز ۴۰۲ (تمرین ۱۵)، ۴۸۹
ـمشتق گیری ۹۲
ـصفر ۹۱
ـیکانی ۴۵۷
تبدیلهای خطی ۹۱، ۱۰۳
الحاقی‌ـ ←
بردـ ←
پوچی‌ـ ←
ـپوچ‌توان ۲۸۹
ـخارج‌قسمت ۵۰۶
ـخودالحاق ۳۸۶، ۴۰۶
ـقطری‌شدنی ۲۴۱

ــکیلی ۴۰۱ (تمرین ۷)
ــمتعامد ۳۹۳
ــمثبت ۴۲۵
ــمثلثی‌شونده ۲۶۴، ۴۰۸
ــمعکوس‌پذیر ۱۰۶
ــنامنفرد ۱۰۷
ــنامنفی ←عملگر نامنفی
ــنرمال ۴۰۳
ــنیم‌ساده ←عملگر نیم‌ساده
ــیکانی ۳۹۱
تجزیهٔ دوری ــ←
تجزیهٔ قطبی ــ←
ترانهادهٔ ــ←
جزءقطری‌شدنی ــ←
چندجمله‌ایهای مینیمال ــ←
دترمینان ــ←
رتبهٔ ــ←
رد ــ←
ضرب ــ←
ماتریس ــ←
ــدرپایهٔ متعامد یکه ←
تجزیهٔ
ــاولیهٔ چندجمله‌ایها ۱۷۸
ــچندجمله‌ایها به‌سازه‌های اول ۱۷۷
ــدوری تبدیلهای خطی ۳۰۴
ــقطبی تبدیل خطی ۴۴۱
قضیهٔ ــ اولیه ←
تحدید
ــتابع ۵۰۰
عملگر ــی ←
تحویل شدهٔ
ــسطری ۱۵
ــپلکانی ۱۸، ۷۶
تحویل‌ناپذیر، چندجمله‌ای ــ←
ترانهادهٔ
ــتبدیل‌خطی ۱۴۷
ــماتریس ۱۴۹
ــمزدوج ماتریس ۳۵۳
ترکیب
ــتوابع ۴۹۸
ــخطی بردارها ۴۵
ــخطی معادلات ۹
تزویجی ۳۵۹ (تمرین ۱۳)
تشابه ماتریسها ۱۲۵
تصویر
ــفضای‌برداری ۲۷۵
ــمتعامد ۳۷۰
تغییرپایه ۱۲۱
تفکیك
ــطیفی ۴۳۳، ۴۴۴
ــهمانی ۴۳۴، ۴۴۴
تقریب ۳۶۸
تقسیم‌پذیری چندجمله‌ایها ۱۶۸
$T$ــپوچساز ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۸۹
$T$ــمجاز ۳۰۳
$T$ــهادی ۲۶۳، ۲۶۴، ۳۰۴

جابجایی
جبر ــ←
حلقهٔ ــ←
گروه ــ←
جایگشتها ۱۹۷
ــی زوج ۱۹۸
ــی فرد ۱۹۸
ضرب ــ←
علامت ــ←
جبر ۱۵۳
ــجابجایی ۱۵۴

ـخطی ۱۵۳
ـخودالحاق ۴۴۴
ـرشته‌های توانی صوری ۱۵۵
جذر ۴۳۹
جزء قطری‌شدنی تبدیل خطی ۲۸۹

چندجمله‌ایها
تابع ـ←
تجزیهٔ اولیهٔ ـ←
تجزیهٔ ـبه‌سازه‌های اول ←
تقسیم‌پذیری ـ←
ـی اسکالر ۱۵۶
ـی اول ۱۷۶
ـی تحویل‌پذیر ۱۷۶
ـی تحویل‌ناپذیر ۱۷۶
ـی تکین ۱۵۶
ـی سرشت‌نما ۲۴۰
ـی مینیمال تبدیلهای خطی ۲۵۰
ـماتریسها ۲۵۰
درجهٔ ـ←
ریشه‌های ـ←
صفرهای ـ←
ضرایب ـ←
مشتق ـ←
چندخطی
تابع ـ←
فرم ـ←

حاصلضرب ←ضرب
حرکت صلب ۴۰۲ (تمرین ۱۴)
حقیقی، اعداد ـ←
حلقه ۱۸۳
ـجابجایی ۱۸۳، ۱۸۴
ـگراسمان ۲۳۵

خارج قسمت
تبدیلهای خطی ـ←
ـفضاهای برداری ۵۰۶
عملگر ـ←
خارجی، ضرب ـ←
خطی، تابع ـ←
خودالحاق
تبدیلهای خطی ـ←
جبر ـ←
عملگر ـ←
فرم ـ←
ماتریس ـ←
خودتوان، عملگر ـ←

دترمینان ۱۸۳ـ۲۳۵
تابع ـ←
ـتبدیل خطی ۲۲۴
رتبهٔ ـ←
درایهٔ ماتریس ۱۱
درجهٔ
ـچندجمله‌ایها ۱۵۶
ـفرم چندخطی ۲۱۶
فرم ـدوم ←
درون‌یابی، ۱۶۱
دستگاه معادلات
ـخطی، ۷
ـهم‌ارز ۹
ـهمگن ۸
دلتای کرونکر ۱۵
دنبالهٔ بردارها ۶۴
دوخطی، فرم ـ←
دوران ۷۲، ۴۰۰ (تمرین ۴)
دوری
بردار ـ←

زیرفضای ـــ←
قضیهٔ تجزیهٔ ـ
دوگان
پایهٔ ـــ←
فضای ـــ←
مدول ـــ←

رابطه ۵۰۱
ـ هم‌ارزی ۵۰۲
رتبهٔ
ـ تبدیل‌خطی ۹۶
ـ دترمینان ۲۱۳ (تمرین ۹)
ـ ستونی ماتریس ۹۷، ۱۵۰
ـ سطری ماتریس ۷۵، ۹۷، ۱۵۰
ـ فرم دوخطی ۴۶۸
ـ ماتریس ۱۵۰
ـ مدول ۲۱۵
رد
ـ تبدیل‌خطی ۱۴۱ (تمرین ۱۵)
ـ ماتریس ۱۳۰
رشتهٔ
ـ توانی ۱۵۵
ـ توانی صوری ۱۵۵
ریشهٔ
ـ چندجمله‌ایها، ۱۶۸
ـ خانواده‌ای ازعملگرها، ۴۴۲
ـ دوم ـــ← جذر
ـ راکد ـــ← مقدارسرشت‌نما

زیرفضاها، ۴۸
پوچساز ـــ←
ـ ی پایا ۲۶۰، ۲۷۰، ۴۰۶
ـ ی پدیدآمده ۵۱
ـ ی $T$ ـ مجاز ۳۰۳
ـ ی دوری ۲۹۷
ـ ی صفر ۴۹
ـ ی مکمل ۳۰۳
ـ ی مکمل متعامد ۳۶۹
ـ ی مجزا ـــ← زیرفضاهای مستقل
ـ ی مستقل ۲۷۳
مجموع ـــ←
زیرماتریس ۲۱۳ (تمرین ۹)
زیرمجموعهٔ
پوچساز ـــ←
ـ پایا ۵۰۱
ـ سره ۴۹۶
زیرهیأت ۶

ژوردان، فرم ـ ماتریس ـــ←

سازه‌های پایای ماتریس ۳۱۲، ۳۴۰
ستونی
اعمال ـــ←
رتبهٔ ـــ←
هم‌ارزی ـــ←
سرشت‌نما
بردار ـــ←
چندجمله‌ای ـــ←
فضای ـــ←
مقدار ـــ←
سرشت‌نمایی هیأت ۷
سطری
اعمال ـــ←
بردار ـــ←
رتبهٔ ـــ←
فضای ـــ←
هم‌ارزی ـــ←

شبه متعامد، گروه— ←
شرکت‌پذیری ۵
—جمع برداری ۴۲
—ضرب ماتریسها ۲۸، ۱۲۰

صفر
تبدیل— ←
زیرفضاهای— ←
—های چندجمله‌ایها ۱۶۸
ماتریس— ←

ضرایب چندجمله‌ایها، ۱۵۶
ضرب، حاصلضرب
—تانسوری ۲۱۹
—تبدیلهای خطی ۱۰۳
—جایگشتها ۲۰۰
—خارجی ۲۲۸، ۲۳۰
—داخلی ۳۵۱
—استانده ۳۵۲، ۳۵۳
—ضرب گوه‌ای ←ضرب داخلی
—ماتریسها ۲۵، ۱۱۹
شرکت‌پذیری— ←
—نقطه‌ای ←ضرب داخلی
فرم درجهٔ دوم—داخلی ←
فضای—داخلی ←
ماتریس—داخلی ←

طیف، ۴۳۳
طیفی، ۴۳۳
تفکیک— ←
قضیهٔ— ←
نظریهٔ— ←

عادکردن ۱۶۸

عضو ←عنصر
علامت جایگشتها ۱۹۸
عمل ←اعمال
عملگر ۱۰۳
—پوچ‌توان ۲۸۹
—تحدیدی ۲۶۱
—تصویر ۲۷۵
—خارج‌قسمت ۵۰۶
—خودالحاق ۳۸۶، ۴۰۶
—خودتوان ←تصویرفضاهای برداری
—قطری‌شدنی ۲۴۱
—مثبت ۴۲۵
—نامنفی ۴۲۵، ۴۳۹
—نرمال ۴۰۳
—نیم‌ساده ۳۴۳
—یکانی ۳۹۱
مجموع مستقیم—ها ←
عنصرمجموعه ۴۹۶
عنصرهمانی ۱۵۴، ۱۸۴

فاصله ۳۷۴ (تمرین ۴)
فرآیند متعامدسازی گرام—اشمیت ۳۶۳، ۳۷۲
فرد، جایگشتهای— ←
فرم
—r‌خطی ۲۱۶
—چندخطی ۲۱۶
—خودالحاق ۴۱۷
—درجهٔ دوم ۳۵۵، ۴۷۲
—دوخطی ۲۱۷، ۴۱۴، ۴۶۰
—ناتبهگون ۴۶۹
—ژردان ماتریس، ۳۲۲
—گویای ماتریسها ۳۱۱
—متناوب ۲۲۰
—مثبت ۴۲۰، ۴۲۳

ـناتبهگون ۴۱۹ (تمرین۶)
نامنفرد ← فرم ناتبهگون
ـنامنفی ۴۲۵
ـنرمال ۳۳۶، ۳۴۰
ـهرمیتی ← فرم خودالحاق
ـیك‌ونیم‌خطی ۴۱۴
ماتریس ـ ←
فرم‌دوخطی ۲۱۷، ۴۱۴، ۴۶۰
رتبهٔ ـ ←
ـمتقارن ۴۷۱
ـمتقارن‌کج ۴۸۲
ـمعین مثبت ۴۷۹
ـناتبهگون ۴۶۹
ـنامنفرد ← فرم دوخطی ناتبهگون
قطری‌سازی ـ ←
گروه حافظ ـ ←
ماتریس ـ ←
نشان ـ ←
فرمول
ـبعد، ۶۳
ـتیلور ۱۶۹، ۳۴۶
ـدرون‌یابی لاگرانژ ۱۶۲
فضاها
ـی $F^n$ ۴۲
ـی $F^{m\times n}$ ۴۳
ـی اقلیدسی ۳۶۰
ـی برداری ۴۱
ـی پوچ ۹۶
ـی جواب ۵۰
ـی خارج قسمت ۵۰۵
ـی دوگان ۱۳۱
ـی سرشت‌نما ۲۳۹
ـی سطری ۵۴
ـی ضرب داخلی ۳۵۹
ـی یکانی ۳۶۰
فضاهای برداری
بعد ـ ←
پایهٔ ـ ←
تصویر ـ ←
خارج‌قسمت ـ ←
زیرفضاهای ـ ←
ـ$n$تاییها ۴۱
ـ با بعد متناهی ۴۲
ـتوابع چندجمله‌ای ۴۴
ـجواب دستگاه معادلات خطی ۵۰
یکریختی ـ ←

قاعدهٔ‌کرامر ۲۱۰
قانون متوازی‌الاضلاع ۳۵۸ (تمرین ۹)
قضیهٔ
ـاساسی جبر ۱۸۰
ـتجزیهٔ اولیه ۲۸۶
ـتجزیهٔ دوری ۳۰۴
ـطیفی ۴۳۳
ـکیلی‌ـهمیلتون ۲۵۴، ۳۰۹
ـمحوراصلی ۴۱۸
قطبی
تجزیهٔ ـ تبدیل‌خطی ←
قطری‌شدنی
جزء ـ تبدیل‌خطی ←
عملگر ـ ←
قطری‌کردن ۲۶۶، ۲۶۹، ۲۸۱
ـفرم دوخطی ۴۷۳
ـفرم دوخطی متقارن ۴۷۴
ـفرم هرمیتی ۴۱۸
ـماتریس (عملگر) خودالحاقی ۴۰۹
ـماتریس (عملگر) نرمال ۴۰۹
ـهمزمان ۲۶۹

ــیکانی ۴۰۹

کرونکر، دلتای ــ ←

کلاسیک، الحاقی ــ ←

کهادهای اصلی ماتریس ۴۲۲

گروه ۱۱۰
ــجابجایی ۱۱۰
ــحافظ فرم ۴۸۷
ــخطی عمومی ۳۹۷
ــشبه متعامد ۴۸۹
ــلورنتز ۴۸۹
ــمتعامد ۴۸۸
ــمتقارن ۲۰۰

گویا
اعداد ــ ←
فرم ــی ماتریسها ←

لورنتز
گروه ــ ←
تبدیل ــ ←

ماتریس ۱۵
ترانهادهٔ ــ ←
ترانهادهٔ مزدوج ــ ←
تشابه ــ ها ←
چندجمله ایهای مینیمال ــ ها ←
رتبهٔ ــ ←
رتبه ستونی ــ ←
رتبهٔ سطری ــ ←
رد ــ ←
سازه‌های پایای ــ ←
ضرب ــ ها ←
فرم ژوردان ــ ←
فرم گویای ــ ←
کهادهای اصلی ــ ←
ــافزوده ۲۱
ــالحاقی کلاسیک ۱۹۴ (تمرین ۳)، ۲۰۸
ــبالامثلثی ۳۹ (تمرین ۹)
ــپوچ توان ۳۱۹
ــتبدیلهای خطی ۱۱۶، ۱۱۷
ــــ در پایهٔ متعامد یکه ۳۸۰
تحویل شدهٔ سطری ۱۵
ــ ــ ۱۸، ۷۶
ــخودالحاقی ← ماتریس هرمیتی
ــصفر ۱۹
ــضرایب ۱۱
ــضرب داخلی ۳۵۶
ــفرم یک‌ونیم خطی ۴۱۶
ــفرم دوخطی ۴۶۴
ــمتعامد ۲۱۲ (تمرین ۴)، ۴۸۸
ــمتقارن ۴۹، ۲۷۵
ــمتقارن کج ۲۱۲ (تمرین ۳)، ۲۷۵
ــمثبت ۴۲۵
ــمثلثی ۲۰۲ (تمرین ۷)
ــشونده ۲۶۴، ۴۰۸
ــمختصات ۶۹
ــمعکوس‌پذیر ۳۲، ۲۰۹
ــمقدماتی ۲۹، ۳۳۰
ــژوردان ۳۲۰
ــنرمال ۴۰۸
ــوندرموند ۱۶۳
ــهرمیتی ۵۰، ۴۰۶
ــهمانی ۱۵
ــهمدم ۳۰۰
همسازه‌های ــ ←
ــیکانی ۲۱۲ (تمرین ۵)، ۳۹۲
مجموع مستقیم ــ ها ←

معکوس—←

متعامد

بردارهای—←

تبدیل‌خطی—←

تصویر—←

گروه—←

ماتریس—←

مجموعهٔ—←

مکمل—←

هم‌ارزی—ماتریسها ←

متعامدسازی ۳۶۳

متعامد یکه

پایهٔ—←

مجموعهٔ—←

متقارن

فرم دوخطی—←

گروه—←

ماتریس—←

متقارن کج

فرم دوخطی—←

ماتریس—←

متناوب، فرم—←

مثبت

اعداد صحیح—←

عملگر—←

فرم—←

ماتریس—←

مثلث‌بندی ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۹، ۳۳۱

—همزمان ۲۶۹

مثلثی، ماتریس—←

مثلثی‌شونده، ماتریس—←

مجاز، زیرفضاهای—←

مجموع زیرفضاها ۵۲

مجموع مستقیم ۲۷۴

—پایا ۲۷۸

—عمگرها ۲۷۹

—ماتریسها ۲۷۹

مجموعه

عنصر—←

—تهی ۴۹۶

—متعامد ۳۶۱

—یکه ۳۶۱

مختصات

—بردار ۶۷

ماتریس—←

مختلط، اعداد—←

مدول ۲۱۴

پایه برای—←

رتبهٔ—←

—آزاد ۲۱۵

—به‌طورمتناهی تولیدشده ۲۱۵

—دوگان ۲۱۶

مزدوج

ترانهادهٔ—ماتریس←

مستقل

زیرفضاهای—←

—خطی ۵۶، ۶۴

مشتق چندجمله‌ایها ۱۶۸، ۱۶۹، ۳۴۶

مضرب بودن ۱۶۸

معادلات خطی ۷

معادلات دیفرانسیل ۲۲۴ (مثال ۸)، ۲۹۱ (مثال ۱۴)

معکوس

—تابع ۴۹۹

—چپ ۳۲

—دوطرفه ۳۲

—راست ۳۲

—ماتریس ۳۲، ۲۰۹

معکوس‌پذیر
تابع ← 
تبدیل خطی ← 
ماتریس ← 
معین مثبت ۴۷۲
مقدار سرشت‌نما ۲۳۸، ۲۳۹
مقدار طیفی ← مقدار سرشت‌نما
مقدار ویژه ← مقدار سرشت‌نما
مقدماتی
اعمال ستونی ← 
اعمال سطری ← 
ماتریس ← 
ـ ژوردان ← 
مکمل ۳۰۳
ـ متعامد ۳۶۹
مینیمال، چندجمله‌ایهای ← 

ناتبهگون
فرم دوخطی ← 
فرم ← 
نامساوی
ـ بسل ۳۷۲
ـ کوشی ـ شوارتز ۳۶۱
نامنفرد
تبدیل خطی ← 
فرم ← فرم ناتبهگون
نامنفی
عملگر ← 
فرم ← 
نرم ۳۵۵
نرمال
عملگر ← 
فرم ← 
ماتریس ← 
نشان فرم دوخطی متقارن ۴۷۷
نظریهٔ طیفی ۴۳۳
نیم‌ساده، عملگر ← 
وابستگی خطی ۵۶، ۶۴
وجود تابع دترمینان ۱۹۱

هادی ۲۶۳، ۲۶۴، ۳۰۴
هرمیتی ← خودالحاق
هم‌ارزی
رابطهٔ ← 
ـ ستونی ۳۳۴
ـ سطری ۱۲، ۷۸، ۳۳۰
ـ متعامد ماتریسها ۳۹۸
ـ یکانی تبدیلهای خطی ۴۵۷
ـ یکانی ماتریسها ۳۹۸
همانی
تابع ← 
تفکیک ← 
عنصر ← 
ماتریس ← 
همدم، ماتریس ← 
همسازه‌های ماتریس ۲۰۷
هم‌مجموعه ۲۳۰، ۵۰۵
همنهشتی ۱۸۱، ۵۰۲، ۵۰۵
ـ به‌پیمانهٔ $n$ ۵۰۵
هیأت ۶
زیر ← 
سرشت‌نمایی ← 
ـ بستهٔ جبری ۱۸۰

یکتایی تابع دترمینان ۱۹۹
یکریختی
ـ فضاهای برداری ۱۱۲
ـ فضاهای ضرب داخلی ۳۸۸

یکانی
تبدیل ـــ ←
تبدیلهای خطی ـــ ←
عملگر ـــ ←
فضای ـــ ←

قطری کردن ـــ ←
ماتریس ـــ ←
هم‌ارزی ـ تبدیلهای خطی ←
هم‌ارزی ـ ماتریسها ←

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir